CÁLCULO ALGEBRAICO

Dra. Patricia Kisbye

Dr. David Merlo

INTRODUCCIÓN

Estas notas han sido elaboradas con el fin de ofrecer al ingresante a las carreras de la FaMAF herramientas elementales del cálculo algebraico y han sido parte de la bibliografía utilizada en el Curso de Nivelación de la FaMAF. desde el año 2004. El texto abarca los siguientes temas: los distintos campos numéricos, operaciones y propiedades; el uso de las letras en el álgebra y el planteo de problemas con lenguaje simbólico; polinomios, ecuaciones lineales y cuadráticas, sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y expresiones algebraicas fraccionarias. Cada capítulo contiene un desarrollo teórico del tema considerado, variedad de ejemplos y una completa lista de ejercicios de aplicación.

Esperamos que las encuentren accesibles y útiles para el propósito de revisión de contenidos aprendidos y de introducción a los estudios universitarios como fueron pensadas.

Sabemos que todavía pueden ser mejoradas en muchos aspectos; por esto les pedimos, a quienes las utilicen, nos hagan llegar sus sugerencias para cumplir con dicho propósito.

David Merlo
Patricia Kisbye

Índice general

Capítulo 1

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS Y SUS OPERACIONES

1. Introducción

Aún en las etapas más primitivas de la evolución humana se ha desarrollado en el hombre el sentido del número y la capacidad de contar. Esta habilidad le ha permitido reconocer lo que ha cambiado en un conjunto de elementos, por ejemplo, si se ha extraído o añadido algún objeto.

¿Cómo pudo un hombre, hace 5000 años, saber que en su rebaño no faltaba ninguna de sus 41 ovejas, si ni siquiera sabía contar hasta 10? Una simple solución es la siguiente: llevaba consigo tantas piedritas como ovejas, y al terminar la jornada guardaba por cada oveja una piedrita en su bolsa; si sobraba alguna sabía que debía buscar una oveja. Establecía una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de objetos.

Mucho tiempo después, los romanos usaron también piedritas para hacer sus cálculos; la palabra "cálculo" significa etimológicamente piedra, y de ahí el origen de la palabra calcular. La actividad de contar y la necesidad de simplificar la tarea de hacer cálculos, implicó la necesidad de utilizar símbolos escritos para representar lo que se había contado. Fue así que surgieron los distintos *sistemas de numeración*. A través de la historia se han usado distintos sistemas, y en cada uno de ellos cada número se representa como un combinación de símbolos. En algunos casos los símbolos representan cantidades y una combinación de símbolos representa la suma de estas cantidades; estos sistemas emplean una descomposición *aditiva*.

En otros casos, como el sistema decimal actual, importa la ubicación del símbolo en la representación del número. Por ejemplo, 21 significa veintiuno, mientras que 12 significa doce. Estos sistemas se llaman *posicionales*. Algunas culturas usaron una base de 20 símbolos, otros de 60, pero el sistema de numeración que ha predominado y es el que actualmente usamos tiene base 10, y por eso se llama *decimal*. Eso significa que podemos escribir números arbitrariamente grandes con tan sólo diez símbolos: $0, 1, 2, \ldots, 9$. Así es como el número 10 ha dejado sus marcas en nuestra forma de contar y en las palabras para nombrar los números. Así por ejemplo, "dieciséis" está compuesto por las palabras "diez" y "seis", "treinta" hace alusión a "tres" veces 10.

Los números que se usan para contar se llaman números naturales: $1, 2, 3, \ldots$. Fueron los primeros números que aparecieron en la historia de las matemáticas. Más adelante surgió la necesidad de agregar el 0 como una forma de representar lo que *no* hay, los números negativos para poder resolver todas las restas, las fracciones para resolver los cocientes, también los números irracionales y los imaginarios. De esta manera quedaron definidos los distintos conjuntos numéricos: los naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos.

Haremos en este capítulo un recorrido por los distintos conjuntos numéricos, justificando brevemente la necesidad de construir cada uno de ellos.

2. Números Naturales

Los números que se usan para contar se llaman *números naturales*. Al conjunto formado por todos los números naturales se lo denota con la letra $\mathbb{N}$. Para contar *un* elemento se usa el número 1, para el siguiente el número 2, y así sucesivamente.

A cada número natural le sigue otro natural que se obtiene agregando 1 al anterior. Así aparece la operación de *sumar*. Sumar 1 es nombrar al siguiente número natural. Por ejemplo, el siguiente del 5 es el 6, y por eso $6 = 5 + 1$. De esta manera y según este orden, los primeros naturales son:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

La operación de suma se extiende a todos los naturales. Así por ejemplo, como $2 = 1 + 1$, entonces $5 + 2$ es el "siguiente del siguiente de 5", es decir que $5 + 2 = 7$.

Para indicar que un número está *antes* que otro se usa el signo $<$, y se lee "menor que". Así por ejemplo, $2 < 5$ se lee "2 es menor que 5", e indica que 2 está antes que el 5. Del mismo modo, el símbolo $>$ se utiliza para indicar que un número está *después* que otro y se lee "mayor que".

La suma repetida de un mismo número se llama *multiplicación*, o también usaremos el término *producto*. Así, sumar 5 veces 8 es multiplicar 5 por 8, y coincidentemente, es lo mismo que sumar 8 veces 5. Esto es

$$8+8+8+8+8 = 5 \cdot 8 \quad \text{y además}$$

$$\underbrace{8+8+8+8+8}_{\text{5 veces}} = \underbrace{5+5+5+5+5+5+5+5}_{\text{8 veces}}.$$

Así, en el conjunto de los números naturales podemos definir 2 operaciones: suma y multiplicación. Estas operaciones son *cerradas*, es decir, la suma y la multiplicación entre dos números naturales es otro número natural. Además, estas operaciones cumplen con las siguientes propiedades:

Conmutatividad: Esta propiedad se refiere a que el orden de los términos de una suma o de los factores en una multiplicación no altera el resultado. Por ejemplo,

$$5+6 = 11 \quad \text{y} \quad 6+5 = 11, \qquad\qquad 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{y} \quad 3 \cdot 2 = 6.$$

Es decir que

$$5 + 6 = 6 + 5, \qquad \text{y} \qquad 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2.$$

Asociatividad: Esta propiedad se refiere a que la forma de agrupar los términos en una suma o en una multiplicación no altera el resultado. Por ejemplo:

$$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9 \qquad \text{y} \qquad (2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9;$$

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24 \qquad \text{y} \qquad (2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24.$$

Es decir que

$$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4; \qquad \text{y} \qquad 2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24.$$

Distributividad de la multiplicación respecto de la suma: La multiplicación distribuye respecto de la suma. Por ejemplo:

$$(2 + 1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \qquad \text{y} \qquad 3 \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1.$$

Así como la multiplicación por un natural es una suma iterada de términos iguales, se conviene en representar la multiplicación iterada como una *potencia*:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4.$$

En este caso, 8 se llama la *base* y 4 el *exponente*. El exponente indica el número de veces que se multiplica a la base por sí misma. Notemos por ejemplo que:

$$5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6, \qquad \text{puesto que}$$

$$\underbrace{(5 \cdot 5)}_{2} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot}_{6}.$$

> *La multiplicación de dos potencias de igual base es otra potencia con la misma base, y cuyo exponente es la suma de los exponentes.*

La *resta* entre dos números, por ejemplo, 10 y 2, es el número que hay que sumarle a 2 para obtener 10. Se denota con el signo $-$. Decimos entonces que

$$10 - 2 = 8 \qquad \text{porque} \qquad 8 + 2 = 10.$$

3. Números Enteros

Ahora consideremos el siguiente problema:

Hallar el número que sumado a 5 sea igual a 3.

Este problema no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que si sumamos un natural a 5 obtendremos otro natural *mayor* que 5, y 3 es menor que 5. Este problema es análogo a querer calcular la resta $3 - 5$. Es decir, ninguna resta en la que el sustraendo sea mayor o igual que el minuendo puede ser resuelta en el conjunto de los naturales.

La introducción de los *números enteros negativos* y el *cero* sirvió para resolver este tipo de problemas. En primer lugar, el 0 es el número que sumado a cualquier natural da el mismo natural:

$$3 + 0 = 3, \qquad 125 + 0 = 125.$$

Así queda definida la suma de un natural con el 0 y la resta entre dos naturales iguales:

$$3 - 3 = 0, \qquad 125 - 125 = 0.$$

Además, para cada natural consideramos el *opuesto* como el número que sumado a él da 0. Así por ejemplo, el número que sumado a 1 da como resultado 0 se lo denota -1 y es el *opuesto* al número natural 1. El opuesto de 2 es -2, el de 3 es -3 y así sucesivamente. Todos los opuestos de los números naturales se denominan *enteros negativos*, y a los naturales se los denomina *enteros positivos*. Así, los enteros negativos, los positivos y el cero dan lugar al conjunto de los *Números Enteros*.
Además, así como -3 es el opuesto de 3, también decimos que 3 es el opuesto de -3, y que el 0 es el opuesto de sí mismo. Las operaciones de suma y de multiplicación se extienden a este nuevo conjunto, y la resta queda bien definida entre cualquier par de números enteros. En efecto, la resta entre dos números enteros se define como la suma de un número y el opuesto del otro:

$$1 - 4 = 1 + (-4) = -3, \qquad -7 - 15 = -7 + (-15) = -22.$$

Si bien la resta es una operación cerrada en el conjunto de los enteros, *no* cumple con las propiedades asociativa ni conmutativa.

Al conjunto de los *números enteros* se lo representa con la letra $\mathbb{Z}$. Así como en los naturales existe un orden natural: $1 < 2$, $2 < 3$, $3 < 4$, etc, en los enteros también hay un orden compatible con el de los naturales. Los enteros conforman una sucesión infinita de números, donde cada elemento tiene un *sucesor* que se obtiene sumando 1 al número, y un *antecesor*, que se obtiene restándole 1. Por ejemplo, -7 es el antecesor de -6 pues $-6 - \mathbf{1} = -7$, y -5 es el sucesor de -6 pues $-6+\mathbf{1} = -5$. La siguiente es una lista ordenada de algunos enteros:

$$\cdots, -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \cdots.$$

En el conjunto de los números enteros están definidas entonces las operaciones de suma y de multiplicación, y satisfacen las mismas propiedades que se satisfacen para los números naturales. También la potencia de un número con exponente natural se define como la multiplicación iterada del número tantas veces como lo indique el exponente. Por ejemplo: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$. Las potencias con exponente negativo no están definidas para los enteros, excepto para 1 y -1. En el conjunto de los números enteros, destacamos dos elementos que cumplen ciertas propiedades especiales: el 0 y el 1.

Propiedad del número 0

- *Elemento neutro para la suma*: Si lo sumamos con cualquier número se obtiene el mismo número. Por ejemplo: $7 + 0 = 7, \quad -4 + 0 = -4$.
- *Multiplicación por 0*: La multiplicación por cero siempre da como resultado cero. Por ejemplo: $6 \cdot 0 = 0, \quad (-3) \cdot 0 = 0$.
- *Potencia con exponente 0:* Se conviene definir la potencia de un número no nulo con exponente cero, igual a 1. Por ejemplo: $7^0 = 1$ y $(-5)^0 = 1$.

Propiedad del número 1.

- *Elemento neutro para la multiplicación*: Si se lo multiplica por cualquier número se obtiene el mismo número; por ejemplo: $4 \cdot 1 = 4$, $(-9) \cdot 1 = -9$ y $0 \cdot 1 = 0$.

Más adelante, en las clases de álgebra, se verá que esto implica la siguiente regla general:

Regla de los signos:
La multiplicación entre dos enteros negativos o dos enteros positivos es un entero positivo.
La multiplicación entre un entero positivo y uno negativo es un entero negativo.

Los números enteros suelen representarse como puntos de una recta. Esto es, se eligen dos puntos distintos, uno representa el 0 y el otro el 1. Así se tiene un segmento unidad. Transportando este segmento hacia un lado de la recta se representan todos los enteros positivos, y hacia el otro todos los enteros negativos. Claramente, existen muchos puntos de la recta que no se corresponden con ningún entero. La Figura 1 es una representación de algunos números enteros:

Valor absoluto: El valor absoluto de un entero positivo o cero es el mismo número, y el valor absoluto de un entero negativo es su opuesto. Se denota encerrando el número entre barras. Por ejemplo: $|3| = 3$, $|-4| = 4$ y $|0| = 0$.

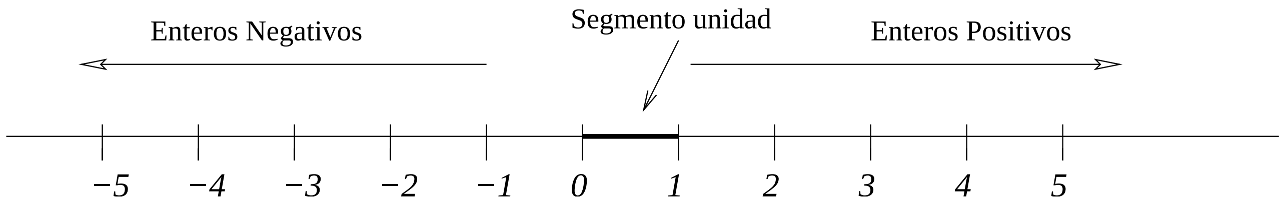

FIGURA 1. Representación de los números enteros en una recta

3.1. La división entera. Hemos dicho que si se efectúan sumas, restas y multiplicaciones de números enteros se obtienen números enteros, por lo que se dice que este conjunto es *cerrado* respecto a estas operaciones.

Existe otra operación en el conjunto de los números enteros llamada la *división entera*. La *división entera* es una operación que sólo tiene sentido en el conjunto de los números enteros y también en el de los naturales si le agregamos el 0. La división entera entre dos números, llamados *dividendo* y *divisor*, permite hallar otros dos números enteros, llamados *cociente* y *resto*. El resto es un entero no negativo y menor que el *valor absoluto* del divisor, y tal que si se le suma el producto entre el divisor y el cociente se obtiene el dividendo.

Por ejemplo, la división entre 27 y 6 tiene como cociente 4 y como resto 3 pues

$$27 = 6 \cdot \mathbf{4} + \mathbf{3}.$$

También, si dividimos -124 por -50, entonces el cociente es 3 y el resto es 26 dado que

$$-124 = (-50) \cdot 3 + 26,$$

o si dividimos 1500 por 125 el cociente es 12 y el resto es 0 puesto que $1500 = 125 \cdot 12 + 0$.

Si el resto de la división es 0 se dice que el divisor *divide* al dividendo, o que el dividendo es *divisible* por el divisor o que el dividendo *es múltiplo* del divisor. Por ejemplo, 8 es divisible por 4, o bien, 4 es divisor de 8, o 8 es múltiplo de 4 puesto que $8 = 4 \cdot 2 + \mathbf{0}$.

Ahora bien, notemos que si bien el cociente entre 27 y 6 es 4, no es cierto que $4 \cdot 6$ sea igual a 27. Por lo tanto la división entera *no* es la operación inversa a la multiplicación. Así como con los naturales no podemos resolver el problema de hallar el número que sumado a 5 dé como resultado 3, en el conjunto de los enteros no es posible resolver problemas como *hallar el número que multiplicado por 6 sea igual a 27*.

4. Números Racionales

Siempre que medimos algo, longitudes, capacidad, volumen, áreas, tiempo, etc., utilizamos una *unidad de medida*. Así es que *medimos* cuántas veces cabe nuestra unidad en aquello que queremos medir. Pero sea cual fuera esta unidad, no siempre ésta cabe una cantidad entera de veces, y debemos *fraccionarla*. Es así como surgieron históricamente las fracciones. Siglos más tarde, a estas fracciones se les dio una categoría de *números*, ya que sirvieron para resolver problemas numéricos como por ejemplo:

Hallar el número que multiplicado por 5 *dé como resultado* 2.

La solución de dicho problema es la fracción $\frac{2}{5}$, y se lee "dos quintos". Las fracciones se representan como cocientes entre dos enteros, llamados *numerador* y *denominador* respectivamente, siendo el denominador distinto de 0. Por ejemplo

$$\frac{7}{3}, \qquad \frac{-2}{8}, \qquad \frac{0}{-5}, \qquad \frac{3}{3}.$$

Toda fracción multiplicada por su denominador es igual al numerador. Por ejemplo, la fracción $\frac{2}{5}$ multiplicada por 5 es igual a 2:

$$5 \cdot \mathbf{\frac{2}{5}} = 2.$$

Notemos que entonces $\frac{4}{10}$ debe representar al número que multiplicado por 10 es igual a 4, y por lo tanto es el número que multiplicado por 5 es igual a 2. Esto sugiere que las fracciones

$$\frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \frac{4}{10}$$

resuelvan ambas un mismo problema. Es por ello que se dice que estas fracciones son *equivalentes*.

Las fracciones *irreducibles* son aquellas cuyo numerador y denominador no son ambos divisibles por un mismo entero, excepto 1 y -1. Estas fracciones tienen la propiedad que toda fracción equivalente a ella se obtiene multiplicando el numerador y el denominador por un mismo entero no nulo. Por ejemplo, $\frac{-10}{9}$ es una fracción irreducible, y algunas de sus fracciones equivalentes son:

$$\frac{10}{-9}, \qquad \frac{-20}{18}, \qquad \frac{-30}{27}, \qquad \dots$$

Los *números racionales* se construyen a partir de los números fraccionarios, considerando a todas las fracciones equivalentes como un solo número. Por ejemplo, las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ son distintas, pero todas representan el mismo número racional. Así, como números racionales, tenemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Al conjunto de los *números racionales* se lo denota con la letra $\mathbb{Q}$ e incluye al conjunto de números enteros, y por lo tanto a los números naturales. En efecto, cada número entero está representado por una fracción con denominador 1, o una equivalente. Por ejemplo, 2 es el número racional representado por la fracción $\frac{2}{1}$ o $\frac{4}{2}$, o cualquiera de sus equivalentes.

Los números racionales suelen expresarse en notación *decimal*, por ejemplo,

$$\frac{5}{10} = 0,5.$$

Aquellas fracciones que son equivalentes a una fracción con denominador 1, 10, 100 u otra potencia de 10 tienen una expresión decimal *finita*, y se denominan *fracciones decimales*. Por ejemplo, $\frac{7}{25}$ es equivalente a $\frac{28}{100}$, por lo tanto es una fracción decimal y se expresa en notación decimal como $0,28$. Si no son equivalentes a una expresión con denominador que sea potencia de 10 tienen una expresión decimal *infinita periódica*. Esto significa que en la parte decimal existe una secuencia de uno o más números que se repite indefinidamente. A dicha secuencia se la denomina período. Por ejemplo, $\frac{3}{9}$ se expresa como $0,333\ldots$, y su período es 3. Para denotar el período se lo suele marcar con un arco $\frown$ sobre él.

Así tenemos los siguientes ejemplos de números racionales y su representación decimal:

$$\frac{6}{100} = 0,06; \qquad \frac{6}{9} = 0,6666\ldots = 0,\overset{\frown}{6}\,; \qquad \frac{3549}{990} = 3,58484\ldots = 3,5\,\overset{\frown}{84}\;.$$

Por otro lado, todas las fracciones decimales también tienen una representación decimal infinita periódica. Para ver esto, notemos que $\frac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}$ y también $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. Por lo tanto

$$\mathbf{1} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,\overset{\frown}{3} = \mathbf{0},\overset{\frown}{\mathbf{9}}\,.$$

Así tenemos también que $4{,}53 = 4{,}52\overset{\frown}{9}$ y $1{,}239 = 1{,}238\overset{\frown}{9}$.

La importancia de la notación decimal es que todas las fracciones equivalentes tienen una misma representación, finita o periódica. Así por ejemplo,

$$\frac{7}{4}, \qquad \frac{14}{8}, \qquad \frac{35}{20}, \qquad \frac{175}{100}$$

son fracciones equivalentes, y todas con la misma representación decimal $1{,}75$, o $1{,}74\overset{\frown}{9}$.

4.1. Operaciones entre racionales. La suma y la resta de dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma (la resta respectivamente) de los numeradores. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{3} = \frac{2-7}{3} = \frac{-5}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3}.$$

En particular, tenemos que

$$\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{0}{3} = 0,$$

por ello decimos que $\frac{-2}{3}$ es el racional opuesto a $\frac{2}{3}$, y escribimos

$$\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}. \tag{4.1}$$

Si los denominadores son distintos el problema de sumar y restar fracciones se resuelve buscando dos fracciones del mismo denominador equivalentes a las dos fracciones dadas, es decir, dos fracciones con *denominador común*. Por ejemplo, para sumar $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$ podemos utilizar las fracciones $\frac{4}{6}$ y $\frac{3}{6}$:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6},$$

y para restar $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{4}$ podemos operar con las fracciones $\frac{4}{20}$ y $\frac{10}{20}$:

$$\frac{1}{5}-\frac{2}{4}=\frac{4}{20}-\frac{10}{20}=\frac{4-10}{20}=-\frac{6}{20}=-\frac{3}{10}.$$

En particular, podemos ver además que

$$\frac{2}{-3}+\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{0}{3}=0,$$

es decir que $\frac{2}{-3}$ es también el opuesto de $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}. \tag{4.2}$$

La multiplicación entre dos racionales se obtiene multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Por ejemplo,

$$\frac{2}{7}\cdot(-\frac{4}{3})=\frac{2\cdot(-4)}{7\cdot 3}=-\frac{8}{21}.$$

Observemos que las siguientes multiplicaciones tienen como resultado el número 1:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{6}=1,\qquad \frac{-5}{2}\cdot\frac{-2}{5}=\frac{10}{10}=1.$$

Un número racional es el *inverso* de otro si la multiplicación entre ambos es igual a 1.

Con la introducción de los números racionales se amplía la definición de potenciación con exponentes enteros negativos. Se define la potencia de un número racional con exponente negativo como igual a la potencia del inverso con el exponente cambiado de signo. Por ejemplo:

$$2^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3},\qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{5}.$$

La *división* de un número racional por otro debe entenderse como la multiplicación del primero por el inverso del segundo. Por ejemplo, la división del número racional 3 por la fracción $\dfrac{5}{4}$ consiste en multiplicar 3 por $\dfrac{4}{5}$. La operación de división se simboliza con dos puntos : o también con la línea de fracción:

$$3\ :\ \frac{5}{4}=\frac{12}{5};\qquad \text{o también}\qquad \frac{3}{\frac{5}{4}}=\frac{12}{5}.$$

La representación de los números racionales en notación decimal simplifica notablemente el cálculo en las operaciones, ya que se opera de manera similar a las operaciones entre enteros, teniendo siempre en cuenta la posición de la coma decimal. Por otro lado, también simplifica la comparación entre dos números racionales. Por ejemplo, no es obvio a simple vista cuál de los siguientes racionales es mayor: $\dfrac{15}{8}$ o $\dfrac{17}{10}$. Sin embargo, si los escribimos en notación decimal es sencillo notar que $1,675$ (igual a quince octavos) es menor que $1,7$.

4.2. Representación de los números racionales en la recta. Los números racionales también pueden representarse en la recta. Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, que son partes de una unidad, se representan precisamente fraccionando el segmento unidad en tantas partes como indica el denominador. La fracción $\frac{3}{2}$ se representa como 3 veces $\frac{1}{2}$. Es muy importante notar que si dos fracciones son equivalentes se representan por un mismo punto en la recta.

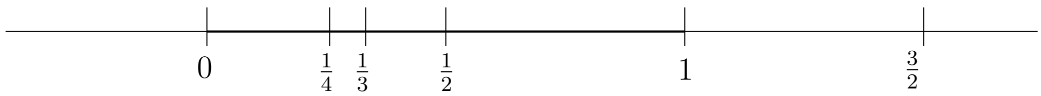

FIGURA 2. Representación de números racionales en una recta

Entre dos números enteros existen sólo un número finito de números enteros. Por ejemplo, entre 5 y -4 hay sólo 8 números enteros; pero ¿cuántos números racionales hay? La respuesta es: ¡infinitos! Lo mismo ocurre para cualquier par de números racionales distintos que tomemos.

Para ver esto basta tomar el promedio entre ambos y al resultado promediarlo con alguno de ellos, repitiendo el proceso indefinidamente. Por ejemplo, tomemos el 0 y el 2. Ambos son números racionales. Su promedio es el número que está entre ambos y equidista de los dos, y es igual a la semisuma de los dos números: $\frac{0+2}{2} = 1$. El número 1 está entre 0 y 2 y es racional. Calculemos ahora el promedio entre 1 y 0: $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Nuevamente obtenemos un número racional; y repitiendo este proceso obtenemos una sucesión infinita de números racionales distintos, todos entre 0 y 2:

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{0+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}, \quad \frac{0+\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}, \quad \frac{0+\frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{32}\dots$$

¿Significa esto que si representamos todos los números racionales en una recta, habremos “llenado” toda la recta? Veremos que no es así, que cualquiera sea el segmento unidad que usemos, siempre quedarán puntos en la recta que no se corresponden con ningún número racional.

5. Números Irracionales

Si pudiéramos marcar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales advertiríamos que quedarían aún infinitos puntos sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos de la recta que no se corresponden con ningún número racional. Dos problemas sencillos: determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno, y determinar la longitud de una circunferencia de radio uno, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales.

Como sabemos aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Sin embargo no existe ningún número racional que cumpla la propiedad que elevado al cuadrado sea igual a 2. Esto significa que no es posible medir la longitud de la diagonal con un número entero de *lados*, ni tampoco fraccionando dicho lado en subunidades tan pequeñas como se quisiera. Sin embargo, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama *raíz cuadrada de 2* y se lo denota $\sqrt{2}$. Más aún, $\sqrt{2}$ es comparable con los números racionales, en el sentido que se puede determinar qué números racionales son menores y cuáles mayores que él. [1].

La Figura 3 muestra la correspondencia entre $\sqrt{2}$ y un punto de la recta: el arco de circunferencia indica que la medida de la diagonal se corresponde con el número $\sqrt{2}$:

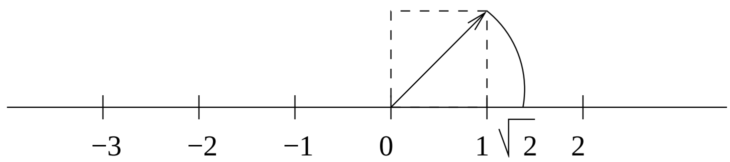

FIGURA 3. Ubicación en la recta numérica de $\sqrt{2}$

Los números irracionales tienen también una representación decimal, y esta expresión decimal es *infinita no periódica*. Por ejemplo, un número cuya parte decimal está formada por infinitos ceros y unos, en el cual el primer 0 está seguido de un 1, el segundo de dos unos, el tercero de tres unos, y así sucesivamente:

$$235,1011011101111011111011111101111111011\ldots$$

representa un número irracional porque no puede identificarse un "período" en la parte decimal del mismo. Si bien parecería poco frecuente estos tipos de números, los mismos constituyen, como dijimos, un conjunto infinito.

Algunos de los números irracionales que se utilizan con frecuencia son π: razón entre la medida de la circunferencia y su diámetro, e: número de Neper y base del logaritmo natural y M: logaritmo en base 10 del número e. Los primeros 15 dígitos decimales de estos números se listan a continuación:

[1]La demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número racional no será tema de este Curso, y se estudiará en las asignaturas de Álgebra I, Matemática Discreta I y Análisis Matemático I

$\pi = 3,141592653589793\cdots$
$e = 2,718281828459045\cdots$
$M = \log_{10}(e) = 0,434294481903252\cdots$

6. Números Reales

El conjunto de los números reales se simboliza con $\mathbb{R}$ y está formado por todos los números racionales e irracionales. Este conjunto está en biyección con los puntos de una recta. Esto significa que si consideramos una recta, entonces es posible hacer corresponder a cada número real un punto de la recta, y a cada punto de la recta un único número real. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son cerradas en los reales. Además todo número real distinto de cero tiene un inverso. El inverso de un número racional distinto de 0 es un número racional, y el inverso de un número irracional es un número irracional.

6.1. Potenciación y radicación. La potencia de un número real con exponente entero se define de la misma manera que para los números racionales. Notemos que las potencias con base no nula y exponente par son siempre positivas, por ejemplo:

$$(-3)^2 = 9, \qquad (-2)^4 = 16, \qquad 3^4 = 81.$$

En particular, cualquier número y su opuesto elevados a un exponente par dan el mismo resultado. Por lo tanto, si queremos hallar el número que elevado al cuadrado sea igual a 16 tendremos dos soluciones: 4 y -4. Para distinguir entre ellas, utilizaremos una notación diferente para cada una. Esto es, escribiremos

$$\sqrt{16} = 4, \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{16} = -4.$$

En general, para cualquier número positivo a, definiremos la raíz cuadrada positiva de a como el número *positivo* b tal que $b^2 = a$, y lo denotaremos $b = \sqrt{a}$.

$$b = \sqrt{a} \qquad \text{si } b \text{ es positivo y } b^2 = a.$$

De manera análoga definimos la raíz cuarta positiva, raíz sexta positiva, y demás raíces con índice par. Así por ejemplo,

$$\sqrt[4]{81} = 3, \qquad -\sqrt[6]{64} = -2, \qquad \sqrt{100} = 10.$$

Por otro lado, las raíces de índice impar están definidas para todos los números reales, y tienen el mismo signo que el radicando. Por lo tanto no es necesario hacer la distinción entre la raíz positiva y la negativa. Así por ejemplo

$$\sqrt[3]{64} = 4, \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{-64} = -4.$$

Para denotar la radicación con índice natural también se utiliza la notación con exponente fraccionario:

$$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}, \qquad \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}},$$

y de esta manera se puede extender la definición de potenciación de un número real <u>*positivo*</u> con cualquier exponente racional:

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}, \qquad 12^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{12}\right)^2}.$$

Además, es posible definir la potenciación de un número real positivo con cualquier exponente real, tema que excede a los objetivos de este curso. La potenciación con base real negativa no siempre da como resultado un número real, y sólo se puede dar una definición general en el campo de los números complejos.

Es importante notar que la potenciación y la radicación no son distributivas con respecto a la suma y la resta. Por ejemplo $(3+5)^2 = 64$ y $3^2 + 5^2 = 34$ por lo cual $(3+5)^2 \neq 3^2 + 5^2$. Asimismo $(3-5)^2 = 4$ y $3^2 - 5^2 = -16$ por lo que $(3-5)^2 \neq 3^2 - 5^2$.

La siguiente propiedad es conocida como **diferencia de cuadrados**: La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de estos números.

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Esta propiedad surge fácilmente aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y a la resta, y suele ser muy útil a la hora de realizar ciertos cálculos.

Así por ejemplo,

$$(3^2 - 5^2) = (3-5)(3+5).$$

Para estos números no hay mayor dificultad entre resolver la diferencia de los cuadrados ($3^2 - 5^2 = 9 - 25$) o la multiplicación entre la diferencia y la suma de los números ($(3-5)(3+5) = (-2) \cdot 8$).

Pero si se desea calcular

$$821^2 - 820^2$$

entonces es más sencillo resolver $(821 - 820)(821 + 820) = 1641$ que calcular la diferencia entre los cuadrados de 821 y 829.

Listamos a continuación algunas propiedades de las operaciones en los números reales:

Propiedad Conmutativa. Intercambiar el orden de los números en una suma o en una multiplicación no afecta el resultado.

$$5 + 6 = 6 + 5 = 11 \qquad \text{y} \qquad 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Propiedad Asociativa. El orden en que se agrupan los términos de una suma o los factores en una multiplicación no altera el resultado.

$$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 = 9, \qquad 2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 24.$$

Propiedad Distributiva. La multiplicación es distributiva con respecto a la suma y a la resta, en tanto que la potencia es distributiva con respecto al producto y la división.

$$(2 + 1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \qquad (2 - 1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3,$$

$$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2, \qquad (6 : 2)^3 = 6^3 : 2^3.$$

Propiedad de las Potencias. El producto y el cociente de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, siendo los exponentes iguales a la suma y a la diferencia de los exponentes, respectivamente.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7, \qquad 4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

Propiedad de las Raíces. La radicación es distributiva respecto del producto y el cociente.

$$\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64}, \qquad \sqrt[4]{81 : 16} = \sqrt[4]{81} : \sqrt[4]{16}.$$

Recalcamos que cada propiedad se satisface además en los otros conjuntos numéricos, siempre que tengan sentido en el mismo. Por ejemplo:

$$\sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18},$$

es cierta en el conjunto de los números reales, pero no lo es en el conjunto de los racionales, puesto que ni $\sqrt{2}$ ni $\sqrt{18}$ son racionales.

6.2. Valor absoluto y distancia entre dos puntos. La noción de valor absoluto de un número entero se extiende a los números reales: el valor absoluto de un real positivo o 0 es el mismo número, y el valor absoluto de un número negativo es su opuesto. Esto se escribe así:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es positivo o } 0 \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo} \end{cases}$$

Si consideramos la representación de los números reales en la recta numérica, entonces el valor absoluto de un número representa en esencia la distancia en la recta numérica entre dicho número y el 0.

El valor absoluto nos permite definir la noción de *distancia* entre dos puntos de la recta. La distancia entre dos puntos de la recta se define simplemente como el valor absoluto de la diferencia entre ellos, y la simbolizamos $d(\cdot, \cdot)$. Por ejemplo, la distancia entre 2 y -3 es

$$d(2, -3) = |2 - (-3)| = |2 + 3| = 5,$$

y la distancia entre -3 y 2 es

$$d(-3;2) = |-3-2| = |-5| = 5.$$

La Figura 4 ilustra algunos casos:

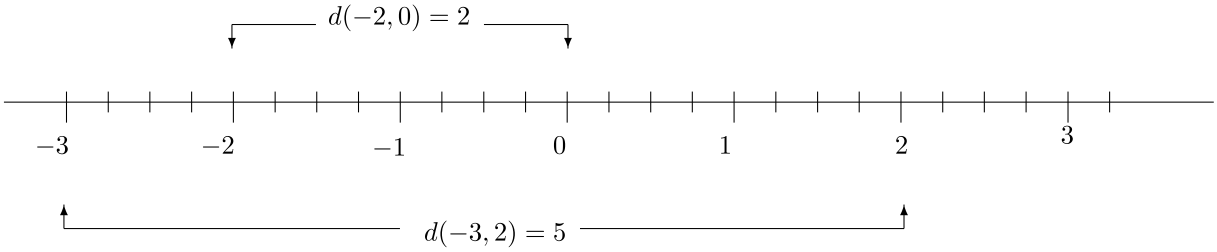

FIGURA 4. Distancia entre dos números reales

7. Números Complejos

7.1. Definición. En el conjunto de los números reales no está definida la raíz cuadrada de un número negativo.

Para superar este problema se define la *unidad imaginaria*, denotada con la letra i, como el *número* con la propiedad que $i^2 = -1$. Se construye entonces el conjunto de números *complejos* como el formado por todas las expresiones de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. Son ejemplos de números complejos los siguientes:

$$2+3i, \quad 4-4i, \quad -8+0i, \quad 0+7i.$$

Al conjunto de los números complejos se lo denota con la letra $\mathbb{C}$.

En un número complejo de la forma $a + bi$, se llama *parte real* al número a y *parte imaginaria* al número b. Así por ejemplo, $5 - \sqrt{2}i$ tiene parte real 5 y parte imaginaria $-\sqrt{2}$. En particular, los números reales son los números complejos cuya parte imaginaria es 0. Por ejemplo $7 = 7 + 0i$. Los números complejos cuya parte real es 0 se denominan *números imaginarios puros*, por ejemplo: $2i$. Los números imaginarios puros resuelven el problema de hallar las raíces cuadradas de números reales negativos. Por ejemplo, $2i$ y $-2i$ son las raíces cuadradas de -4, puesto que $(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = -4$ y $(-2i)^2 = (-2)^2(-i)^2 = -4$.

Se define el *complejo conjugado* del número complejo $a+bi$ como $a-bi$, es decir, el número complejo que tiene la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo, y se simboliza con una barra sobre el número complejo. Por ejemplo

$$\overline{-4+5i} = -4-5i, \qquad \overline{3i+1} = -3i+1.$$

De esta definición se deduce que el complejo conjugado de cualquier número real es el mismo número real; por ejemplo: $\overline{-8} = -8$, mientras que el complejo conjugado de un número imaginario puro es el opuesto; por ejemplo: $\overline{-8i} = 8i$.

7.2. Operaciones en los números complejos. En este conjunto numérico están definidas las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. La suma y la resta de dos complejos se realiza sumando (restando) las partes real e imaginaria, respectivamente. Por ejemplo,

$$(3+5i)+(2-i) = (3+2)+(5-1)i = 5+4i,$$

$$(3+5i)-(2-i) = (3-2)+(5-(-1))i = 1+6i.$$

En el caso de la multiplicación, se aplica la propiedad distributiva teniendo en cuenta la propiedad del número i:

$$(3+5i)\cdot(2-i) = 3\cdot 2 - 3i + 10i - 5i^2 = 6+7i+5 = 11+7i.$$

Todo número complejo distinto de cero tiene un *inverso*. El inverso del número complejo $a+bi$ es $\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$. En efecto,

$$(a+bi)\cdot\frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Así, el inverso de $3-4i$ es $\dfrac{3+4i}{3^2+4^2}$, o más precisamente $\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i$.

De esta manera, al igual que para los números reales, se define la división por un número complejo no nulo como la multiplicación por su inverso. Así por ejemplo:

$$\frac{2-3i}{3-4i} = (2-3i)\cdot\frac{3+4i}{25} = \frac{(6+12)+(8-9)i}{25} = \frac{18-i}{25} = -\frac{18}{25}-\frac{1}{25}i.$$

7.3. Representación gráfica de los números complejos. Los números reales pueden ser representados en una recta de tal manera que a cada punto de la recta le corresponde un único número real y viceversa. Decimos que es una correspondencia biunívoca. Si un número a es mayor que un número b lo representamos a la derecha de b, y si es menor lo representamos a la izquierda de b.

Para representar a los números complejos se suele utilizar un diagrama de ejes cartesianos, representando en el eje de las abscisas a los números reales, y en el de las ordenadas a los números imaginarios puros. A partir de esto, cada número complejo $a+bi$ se corresponde con el punto del plano cuya abscisa es a y su ordenada es b. La siguiente figura ilustra la representación de algunos números en el plano complejo:

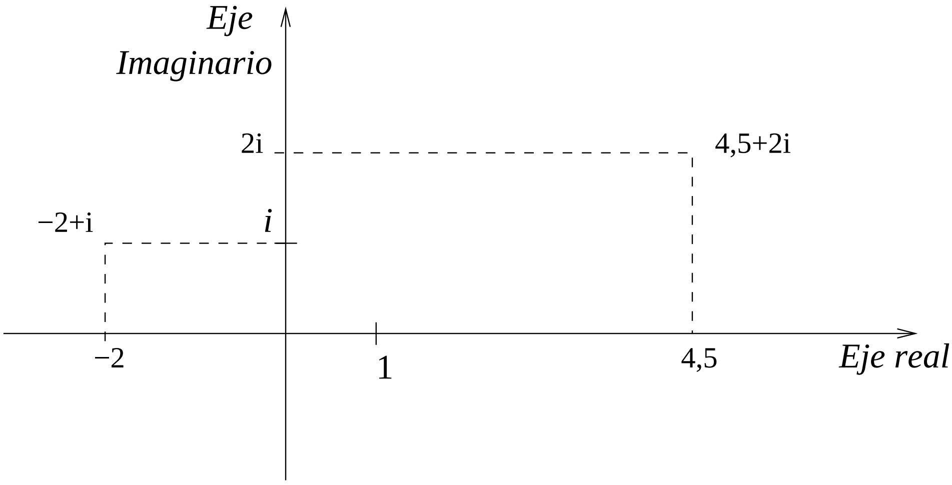

FIGURA 5. Representación gráfica del número complejo $a + bi$

8. Ejercicios

1. Realizar los siguientes cálculos.

a.) $3 - (-4 + \frac{5}{2}) =$

b.) $\dfrac{-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{5}\right)}{-3} =$

c.) $\dfrac{-\frac{2}{3} + \frac{5}{2}}{-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}} =$

d.) $-\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{2}}\right) =$

e.) $\dfrac{\frac{2}{7} + \frac{1}{13}\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{2}\right)}{(-2)\frac{1}{5} + \frac{3}{5}} =$

f.) $\dfrac{-2}{\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)} - \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\left(-3 + \frac{4}{3}\right)}{-\frac{1}{6}} =$

Resultados de los cálculos:

a)$\frac{9}{2}$, **b)**$\frac{1}{9}$, **c)** $-\frac{33}{8}$, **d)** $-\frac{4}{25}$, **e)**$\frac{27}{14}$ **f)** $-\frac{53}{6}$

2. Resolver las siguientes operaciones:

a.) $(5 + 2 \cdot (-4))^2 : (-3) - (5 \cdot (-4) + (-6)) - (-1)^2 =$

b.) $\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right)\right) =$

c.) $\left(2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) \cdot \frac{1}{18} - 2 \cdot \frac{1}{6} =$

d.) $-\frac{1}{6} + \frac{20}{7} \cdot \left(-\frac{14}{5}\right) - \dfrac{\frac{16}{15}}{-\frac{2}{5}} =$

e.) $-\dfrac{4}{\frac{1}{5} + 6} - \dfrac{-\frac{1}{31} + 1}{-\frac{1}{2}} =$

f.) $(-3)^{-2} =$

g.) $(3^{-2} + 2^{-1}) =$

h.) $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} =$

i.) $-3^{-2} =$

j.) $\left(\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} + 1}{1 - \frac{2}{3-\frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{1}{3}} =$

k.) $\left(\dfrac{1 - \frac{5}{4}}{\sqrt[3]{-\frac{11}{8} - 2}} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}} \right)^{-1} =$

l.) $\sqrt[3]{\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} - \frac{1}{6}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{8}}} \cdot \dfrac{10}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \frac{2}{3}}} =$

Respuestas:

a)22, **b)**$\dfrac{31}{20}$, **c)** $-\dfrac{1}{5}$, **d)** $-\dfrac{11}{2}$, **e)**$\dfrac{40}{31}$ **f)**$\dfrac{1}{9}$, **g)**$\dfrac{11}{18}$, **h)**$\dfrac{5}{8}$,

i) $-\dfrac{1}{9}$, **j)**$\dfrac{1}{2}$, **k)**$\dfrac{6}{25}$ **l)** -3

3. Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales y representarlos en una recta numérica:

$$\frac{9}{4}; \quad -\frac{2}{3}; \quad -\frac{6}{5}; \quad \frac{7}{3}; \quad -\frac{7}{4}$$

4. Ordenar de menor a mayor los siguientes números reales y ubicarlos en la recta numérica:

-5	$0{,}025$	$-\sqrt{16}$	$\sqrt{16}$
$\sqrt{\frac{4}{5}}$	$-\sqrt{12}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}$
4	$2{,}7172$	$4{,}\overset{\frown}{3}$	$\sqrt{\frac{16}{4}}$
-3	π	$0{,}\overset{\frown}{9}$	$\sqrt{\frac{25}{36}}$

5. Representar gráficamente en la recta numérica:
   a) los números enteros entre $-5{,}3 \quad \text{y} \quad 10{,}5$,
   b) los números naturales entre $-5{,}3 \quad \text{y} \quad 10{,}5$,
   c) los números reales entre $-5{,}3 \quad \text{y} \quad 10{,}5$.

6. Determinar, sin hacer la división de numerador por denominador, cuáles de los siguientes números racionales tienen una representación decimal finita y cuáles no.
$$\frac{37}{5}, \qquad \frac{19}{3}, \qquad \frac{57}{6}, \qquad \frac{270}{75}, \qquad \frac{28}{700}, \qquad \frac{521}{124}.$$

7. Realizar los siguientes cálculos.

   a) $12121212125^2 - 12121212124^2$,
   b) $25000029^2 - 25000031^2$,
   c) $(115115115 - 115115114)^2$,
   d) $(25299999 - 25300001)^2$.

8. Escribir al menos 10 números racionales que estén comprendidos:
   a) entre 0 y 1, b) entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$, c) entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$.

9. Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, realizando los cálculos correspondientes:
   a) $(\sqrt{2}-3)^2 + (\sqrt{2}+3)^2$ es un número irracional.
   b) $(\sqrt{2}-3)^2 \cdot (\sqrt{2}+3)^2$ es un número entero.
   c) $(\sqrt[3]{9})^2 - (\sqrt[3]{8})^2 = \big((\sqrt[3]{9}) - (\sqrt[3]{8})\big)\big((\sqrt[3]{9}) - (\sqrt[3]{8})\big)$
   d) $\big(\sqrt[3]{7}+5\big)^2 = \sqrt[3]{49} + 25$.

10. Encontrar el error en el siguiente razonamiento:
    $1^2 = (-1)^2$, *entonces vale que* $\sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2}$. *Simplificando, queda* $1 = -1$.

11. Indicar si las igualdades siguientes son correctas. Para las incorrectas escribir a qué número es igual el miembro izquierdo de la igualdad.

    a) $\sqrt{25+4} = \sqrt{25} + \sqrt{4}$
    b) $(3+8)^2 = 3^2 + 8^2$
    c) $\sqrt{(-4)^2} = -4$
    d) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{6}{9} = \dfrac{3+6}{4+9}$

e) $\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$

f) $\sqrt[5]{(-8)^5} = -8$

g) $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$

h) $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{0}$

i) $\frac{8}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9}$

j) $\frac{9}{25} : \frac{3}{5} = \frac{9:3}{25:5}$

k) $\left(-\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{(-6)^3}$

l) $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}}$

m) $(-2)^0 = 0$

n) $2^4 \cdot 3^4 = 6^{16}$

ñ) $15^{-2} : 5^{-2} = 3^{-2}$

o) $(-8)^0 = -1$

p) $\pi^0 = 1$

q) $2^3 = 3^2$

12. Calcular el valor absoluto de los siguientes números:

$$3, \qquad -3{,}5, \qquad 4{,}32 \qquad 0 \qquad -0{,}4.$$

13. Determinar la distancia entre los siguientes pares de números:

a) $-3{,}5$ y 3,
b) 2 y $9{,}1$,
c) $-3,5$ y $-5{,}3$,
d) 0 y $0{,}5$,
e) 0 y $-3{,}4$,
f) -2 y 2.

14. Calcular

a) $(5^{-2} + 12^{-2})^{\frac{1}{2}} =$

b) $(5^{-2})^{\frac{1}{2}} + (12^{-2})^{\frac{1}{2}} =$

15. Resolver sin utilizar calculadora:

a) $27^{\frac{2}{3}} =$
b) $49^{\frac{3}{2}} =$
c) $8^{\frac{2}{3}} =$
d) $(0,125)^{-\frac{1}{3}} =$
e) $32^{0{,}4} =$
f) $32^{-\frac{3}{5}} =$

16. Resolver, de modo que no queden raíces cuadradas en el denominador:

a) $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} =$

b) $\frac{4}{\sqrt{5}-3} =$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3} =$

17. Representar en el plano complejo cada uno de los siguientes números:

a) $3 + i$,
b) $5 - 2i$,
c) i,
d) $-7i$,
e) 8,
f) 0,
g) $-i + 7$,
h) $i - 7$
i) $-2 - 5i$

18. Calcular las siguientes operaciones de números complejos:

a) $\overline{-3 + 2i} =$
b) $\frac{1}{8-6i} =$
c) $(2 + 5i) - \overline{(2 + 5i)} =$
d) $(17 - 13i) \cdot i =$
e) $(1 + i)^2 =$
f) $(1 + i)^4 =$
g) $i^3 =$
h) $\frac{1}{i} =$
i) $\frac{(1+2i)(1-2i)}{(2+i)(2-i)} =$

Capítulo 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Introducción

La importancia relevante del Álgebra es poder, a través de ella, escribir una determinada situación problemática mediante ecuaciones, desigualdades u otras expresiones matemáticas. También permite la generalización de un determinado tipo de problemas o situaciones haciendo uso de "letras" que representan números.

En este punto es conveniente diferenciar desde el principio que existen distintos usos de las letras en el álgebra. En algunos casos representan un número desconocido o *incógnita* que se desea averiguar. En otros casos representan *constantes del problema*, las cuales no cambian en la situación planteada. También están las llamadas *variables* o *indeterminadas*, que como su nombre lo indica, adoptan distintos valores. En general en una misma situación aparecen dos o más variables y éstas están vinculadas por alguna relación.

En otros casos las letras se utilizan para *generalizar* números, representando entonces a todo un rango numérico.

Estos no son los únicos usos que se dan a las letras en el álgebra, también pueden representar parámetros, nombres de funciones, vectores, puntos, y muchos más. En este capítulo analizaremos algunas situaciones problemáticas y para cada una de ellas plantearemos una expresión algebraica que la represente.

Usualmente, para representar constantes o datos se utilizan las primeras letras del abecedario o del alfabeto griego (*a*, *b*, *c*, ..., o α, β, γ,...) , mientras que para representar variables o incógnitas suelen usarse las últimas letras (x, y, z, w, $\ldots$). No obstante recalcamos que la elección de las letras no siempre es esa.

2. Expresiones algebraicas

Una *expresión algebraica* es aquella en la que aparecen letras y números ligados con las operaciones numéricas usuales.

$$a^3 - 5x = 2, \qquad \Delta = b^2 - 4ac, \qquad a + b, \qquad x^2 \leq y.$$

En esta sección presentaremos algunos ejemplos a modo de ilustrar el uso de las letras en el álgebra.

2.1. Generalización de números. Como punto de partida en esta iniciación algebraica, reescribamos algunas propiedades que satisfacen los conjuntos numéricos estudiados en el capítulo anterior, pero esta vez generalizando a los elementos del mismo mediante letras. Por ejemplo, la propiedad conmutativa de la suma nos asegura que

$$3+5=5+3, \qquad 6+6=6+6, \qquad 1-3=-3+1, \qquad -2+0=0-2, \text{ etc.}$$

Claro que como no podemos hacer una lista de todas las posibilidades, podemos enunciar la propiedad conmutativa diciendo que

$$a+b=b+a, \quad \text{cualquiera sean los números reales } a \text{ y } b.$$

Notemos que a y b representan números, no necesariamente distintos aunque las letras sean distintas. No son incógnitas, puesto que no nos interesa conocer el valor de a ni de b, simplemente nos sirven para *generalizar* una cierta propiedad numérica que se cumple para los números reales.

Si pensamos que las letras a, b y c representan números reales, entonces las siguientes expresiones algebraicas generalizan distintas propiedades numéricas:

1. La suma es asociativa:

$$(a+b)+c=a+(b+c), \qquad \text{cualquiera sean los números } a,\ b,\ c.$$

2. La multiplicación es asociativa:

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c), \qquad \text{cualquiera sean los números } a,\ b,\ c.$$

3. La suma es conmutativa:

$$a+b=b+a, \qquad \text{cualquiera sean los números } a,\ b.$$

4. La multiplicación se distribuye con respecto a la suma:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \qquad \text{cualquiera sean los números } a,\ b,\ c.$$

5. El 0 (cero) es neutro en la suma:

$$a+0=a, \qquad \text{cualquiera sea el número } a.$$

6. La suma de un número y su opuesto es igual a 0:

$$a+(-a)=0, \qquad \text{cualquiera sea el número } a.$$

7. El 1 es neutro en la multiplicación:

$$a\cdot 1=a, \qquad \text{cualquiera sea el número } a.$$

2.2. Incógnitas y Ecuaciones. Las incógnitas de un problema son aquellos valores que interesan ser conocidos y no están explícitamente dados en el problema.

EJEMPLO 2.1. *Hallar el número cuya raíz cúbica es* 3.

En este problema existe una única incógnita, y tiene la propiedad de que su raíz cúbica es 3. Aún cuando es inmediato darse cuenta que se trata del número 27, este número no está dado en el problema explícitamente y por ello es una incógnita.

Para plantear algebraicamente el problema simbolizamos con una letra a la incógnita, por ejemplo, x. Entonces x tiene la siguiente propiedad:

$$\sqrt[3]{x} = 3, \tag{2.1}$$

y esa será la ecuación que deberemos resolver para hallar x.

EJEMPLO 2.2. *El área de un cuadrado menos el doble de lo que mide el lado es igual a 3. ¿Cuánto mide el lado?*

Este problema aparenta tener dos incógnitas: el área del cuadrado y la longitud del lado. Pero debemos recordar de la geometría que el área de un cuadrado es igual a la longitud del lado elevada al cuadrado. Así, si denotamos con x a la longitud del lado nuestro problema se plantea algebraicamente de la siguiente manera:

$$x^2 - 2 \cdot x = 3. \tag{2.2}$$

Las expresiones que hemos obtenido en los ejemplos anteriores:

$$\sqrt[3]{x} = 3, \qquad \text{y} \qquad x^2 - 2\,x = 3$$

no son identidades que se cumplen para todo valor de x sino que sólo son ciertas para algunos valores de x, o quizás para ninguno. La presencia del signo $=$ no indica que las expresiones a cada lado sean iguales. Por el contrario, se pretende hallar los valores de las incógnitas que hagan cierta dicha identidad, y este tipo de igualdades se denominan ecuaciones.

Una ecuación *es una igualdad que involucra una o más incógnitas. Los valores de las incógnitas que verifican la igualdad son las* soluciones *de la ecuación.*

Así tenemos que 27 es una solución de la ecuación (2.1), mientras que 3 y -1 son soluciones de la ecuación (2.2)[1]. Pero ¡cuidado!, sólo 3 es solución del segundo problema, porque -1 es negativo y no puede ser la medida del lado de un cuadrado. Esto es importante, al resolver

[1]La resolución de ecuaciones de segundo grado es tema de un capítulo posterior.

la expresión algebraica, debemos asegurarnos que estas soluciones tengan sentido en nuestro problema.

3. Ejemplos de Aplicación

A continuación mostraremos varios ejemplos en los cuales se plantea una expresión algebraica a partir de un determinado problema o situación a resolver. Nuevamente, no nos preocuparemos aquí en la resolución de las mismas, solamente atenderemos el planteo del problema.

EJEMPLO 2.3. *Consideremos los siguientes problemas.*

1. *Hallar el número que multiplicado por 2 es 8.*
2. *Hallar el número que multiplicado por 3 es 0.*
3. *Hallar el número que multiplicado por 0 es 3.*
4. *Hallar el número que multiplicado por* $\sqrt{2}$ *es* π.

Todos estos problemas son similares, y sus planteos algebraicos son los siguientes:

$$2 \cdot x = 8, \qquad 3 \cdot x = 0, \qquad 0 \cdot x = 3, \qquad \sqrt{2} \cdot x = \pi.$$

Notemos que los cuatro problemas tienen un planteo algebraico muy parecido, sólo cambian los datos del problema. Si usamos letras para simbolizar estos datos, decimos que las letras denotan *constantes*. En nuestro caso tenemos que resolver una ecuación del tipo

$$n \cdot x = m,$$

en la cual n y m son los datos del problema y x es la incógnita. La solución de esta ecuación general permitirá resolver todos los problemas de la forma

Hallar el número que multiplicado por n *da como resultado* m.

La solución a este problema será diferente según n y m sean iguales a 0 o no. Si m y n son ambos iguales a 0, entonces hay infinitas soluciones. Si $m \neq 0$ y $n = 0$, no hay soluciones, mientras que, si $n \neq 0$ la única solución será $x = \frac{m}{n}$.

EJEMPLO 2.4. *Dar el área de un rectángulo conocida la longitud de un lado y una diagonal.*

Si bien no hay datos numéricos en el problema, lo que se busca es hallar una relación entre el área del rectángulo A y la medida de un lado l y una diagonal d. En principio sabemos que el área A es igual al producto de dos lados no consecutivos del rectángulo, digamos

$$A = L \cdot l.$$

Por el Teorema de Pitágoras sabemos que

$$L^2 + l^2 = d^2,$$

y por lo tanto $L = \sqrt{d^2 - l^2}$. Así, la fórmula

$$A = l \cdot \sqrt{d^2 - l^2}$$

nos permite determinar el área A de un rectángulo en términos de un lado y una diagonal, cualquiera sea el rectángulo.

EJEMPLO 2.5. *El doble de libros que tengo en el escritorio más una docena que conseguí prestado totalizan 24. ¿Cuántos libros tengo en total?*

En este caso la cantidad de libros sobre el escritorio es una incógnita, la representaremos con la letra x. El *doble* de esta cantidad se escribe entonces como $2x$. Esta cantidad "más" 12 totaliza 24, y por lo tanto la siguiente expresión algebraica simboliza el problema a resolver:

$$2x \ + \ 12 \ = \ 24$$

EJEMPLO 2.6. *En la compra de un libro de Física y uno de Álgebra se gastó $400, pero el de Física costó $100 más que el de Álgebra. ¿Cuál fue el precio de cada libro?*

Aquí aparecen dos incógnitas a resolver, el precio de libro de Álgebra y el precio del libro de Física. Convengamos en representar la primera incógnita con la letra a y la segunda con la letra f.

Dado que los dos libros cuestan $400, significa que la *suma* de sus precios es 400. Esto lo simbolizamos:

$$f + a = 400.$$

Asimismo, como el precio del libro de Física es $100 más que el de Álgebra, lo simbolizamos

$$f = a + 100,$$

o también

$$f - a = 100.$$

El planteo del problema exige que ambas ecuaciones sean satisfechas, y por lo tanto algebraicamente debemos plantear un *sistema de ecuaciones*, que aprenderemos a resolver más adelante:

$$\begin{cases} f + a = 400 \\ f - a = 100 \end{cases}$$

EJEMPLO 2.7. *Dos números enteros tienen la propiedad que el triplo de uno más el doble del otro es igual a 25. ¿Cuáles son esos números?*

Si denotamos con m y n esos dos números, tenemos la relación

$$3m + 2n = 25.$$

Notemos que m y n no pueden adoptar cualquier valor arbitrario, sino que el valor de uno de ellos depende del valor de otro. Entonces m y n varían en el conjunto de los enteros y están en una relación de dependencia.

Para cada valor de a se cumple entonces que

$$n = \frac{25 - 3m}{2}$$

Escrito de esta manera también se dice que m es la *variable indeterminada*, y que n está *determinado* por m.

En particular, m sólo puede adoptar valores impares para que n resulte un entero. Algunos valores posibles de m y n son: $m = 1$ y $n = 11$, $m = -3$ y $n = 17$.

4. Despejar una incógnita en una ecuación

Con mucha frecuencia nos encontramos con el problema de tener que obtener el valor de una determinada incógnita, la cual se encuentra combinada con números y/o constantes en una misma ecuación. Por ejemplo, queremos determinar la incógnita x en la ecuación

$$2n + x = \sqrt[5]{x - 7}, \tag{4.1}$$

siendo n una constante del problema.

No siempre es sencillo determinar la incógnita, en particular (4.1) es una fórmula un tanto complicada. De hecho, no existe ninguna receta o procedimiento estándar que permita despejar la incógnita en cualquier ecuación. Los pasos a seguir dependerán de la estructura y de las operaciones algebraicas involucradas. Por ejemplo, las ecuaciones

$$\frac{1}{x+2} = 3 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{x} + 2 = 3$$

involucran los mismos números, letras y operaciones, pero la estructura en la que aparecen son distintas, y por lo tanto el procedimiento para despejar la incógnita será diferente.

En todos los casos, la manera de determinar el valor de la incógnita es realizar distintas operaciones en ambos miembros de la ecuación respetando la *propiedad uniforme de la igualdad*, hasta obtener una ecuación en la que la incógnita aparezca "sola" en uno de los miembros y no aparezca en el otro miembro. En este punto diremos que hemos *despejado* la incógnita.

> Propiedad Uniforme: Si a ambos miembros de una igualdad se les suma o se los multiplica por un mismo número, la igualdad se mantiene.

Al aplicar la propiedad uniforme es frecuente decir que *llevamos* o *pasamos* un término de un miembro al otro. Debemos recordar siempre que la acción de *pasar de miembro* en una ecuación es un resultado de aplicar la propiedad uniforme de la igualdad.

Es frecuente cometer errores como el siguiente. En la ecuación

$$\frac{1}{x+2} = 3 \tag{4.2}$$

x "está sumando", y por lo tanto "pasa restando", resultando la ecuación

$$\frac{1}{2} = 3 - x.$$

Eso no es correcto, ya que si restamos x en el segundo miembro debimos restar x en el primero. Pero:

$$\frac{1}{x+2} - x \neq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto no se trata de tener en cuenta la operación en la que está directamente involucrada la incógnita, sino de la estructura y las prioridades de las operaciones que aparecen en el miembro de la ecuación correspondiente.

Así por ejemplo, en la ecuación (4.2) la operación principal en el miembro izquierdo es la división, por lo tanto es conveniente multiplicar por el divisor en ambos miembros:

$$\frac{1}{x+2} \cdot (x+2) = 3 \cdot (x+2).$$

De este modo resulta la ecuación $1 = 3 \cdot (x+2)$, o bien

$$1 = 3x + 6.$$

Ahora x está afectada a una multiplicación. Sin embargo la operación fundamental es la suma. Restamos en ambos miembros el término 6 y obtenemos

$$-5 = 3x,$$

y dividiendo ambos miembros por 3 llegamos a la solución $x = -5/3$.

Una forma de no equivocarse en el procedimiento de despejar la incógnita es analizar la expresión de afuera hacia dentro, como en "cáscaras de cebollas". Mediante un ejemplo explicaremos el procedimiento.

Por ejemplo, supongamos que buscamos despejar a de la siguiente expresión:

$$y = -25 + 8\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a^3 + b}\right)$$

Aquí α y b representan constantes. Notemos que la letra a despejar, a, se encuentra en el segundo miembro de la ecuación. Miramos entonces a este miembro como un todo, y notamos que es una suma de dos términos:

$$y = \left(-25+8\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a^3+b}\right)\right)$$

Luego restamos a ambos miembros el término que no contiene a la incógnita, y así este término dejará de aparecer en el segundo miembro:

$$y-(-25) = 8\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a^3+b}\right)$$

Ahora en el segundo miembro tenemos una multiplicación entre el número 8 y una expresión fraccionaria que involucra a la incógnita a despejar. Por lo tanto dividimos ambos miembros de la ecuación por 8, o lo que es lo mismo, multiplicamos por su inverso:

$$\frac{y+25}{8} = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a^3+b}\right)$$

Si estas dos expresiones a ambos lados del signo "=" son iguales, entonces también son iguales sus inversos. Entonces:

$$\frac{8}{y+25} = \frac{a^3+b}{\sqrt{\alpha}}$$

Ahora corresponde multiplicar ambos miembros por $\sqrt{\alpha}$, de modo que resulta:

$$\frac{8\sqrt{\alpha}}{y+25} = a^3+b$$

Ya lo que resta por hacer es muy simple. Restamos b en ambos miembros y extraemos la raíz cúbica a ambos miembros. Queda entonces la incógnita despejada de la siguiente manera:

$$a = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{\alpha}}{y+25} - b}.$$

5. Ejercicios

1. Escribir algebraicamente los siguientes enunciados.
   a) El doble de un número.
   b) La mitad de un número.
   c) El opuesto de un número.
   d) El inverso de un número.
   e) La suma de dos números.
   f) La suma de un número y el opuesto de otro.
   g) La suma de un número y su inverso.
   h) El producto de tres números.

i) El producto de los inversos de tres números.
j) El inverso del producto de tres números.
k) La suma de los cuadrados de dos números.
l) El cuadrado de la suma de dos números.
m) La diferencia entre el cubo de un número y su cuadrado.
n) La diferencia entre el triplo de un número y su doble.
ñ) El valor absoluto del cubo de un número.
o) El cubo del valor absoluto de un número.

2. Escribir un enunciado que se traduzca en la expresión algebraica dada:

a) $a - a^2$,
b) $a - b^2$,
c) $x - 2$,
d) $x^2 + 5$,
e) $(x + 5)^2$,
f) $(x + y)^2$.

3. Suponiendo que en todos los casos se trata de números enteros, escribir algebraicamente los siguientes enunciados:
a) La suma de dos números enteros consecutivos.
b) El producto de tres números enteros consecutivos.
c) Un número par.
d) Un múltiplo de 5.
e) La suma de un número par y uno impar.
f) La suma de un número par y el impar siguiente.
g) La suma de dos pares consecutivos.
h) La suma de dos impares consecutivos.
i) El doble de un número impar.

4. Escribir una expresión algebraica que represente a los siguientes enunciados:
a) El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado de uno de ellos, más el cuadrado del otro más el doble producto de ambos.
b) El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su opuesto.
c) La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de los mismos.
d) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
e) El triple de un número más el doble de otro es igual a 17.
f) La razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro es π.

g) El precio de un viaje en remis es de \$2 más \$1,50 por kilómetro recorrido.

5. Despejar y en las siguientes ecuaciones:
   a.) $y = 3x + 2y + 1$
   b.) $xy = 5$
   c.) $x^2 + 2xy = y - 5$

6. Despejar la incógnita que se muestra encerrada entre {} en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\{n\}$ $\qquad I = \dfrac{nE}{R + nr}$

b) $\{K\}$ $\qquad x = \dfrac{Kgt^2}{2u(1 + K)}$

c) $\{x\}$ $\qquad a = \dfrac{2bx}{1 + b(x - 1)}$

d) $\{L\}$ $\qquad T = \dfrac{W(u^2 - 2gL)}{gL}$

e) $\{K\}$ $\qquad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{K^2 + h^2}{gh}}$

f) $\{c\}$ $\qquad 2ax = \sqrt{b^2 - 4ac} - b$

g) $\{S\}$ $\qquad T = \sqrt{\dfrac{R - S}{S}}$

h) $\{R\}$ $\qquad I = E\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

i) $\{P\}$ $\qquad \dfrac{1}{f} = (P - 1)(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{s})$

j) $\{r\}$ $\qquad R = \dfrac{W}{2a}(a - \dfrac{v^2 h}{gr})$

k) $\{s\}$ $\qquad P = \dfrac{f}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4s^2}{f^2}}\right)$

l) $\{M\}$ $\qquad B = \dfrac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 + T})$

m) $\{n\}$ $\qquad \lambda = \lambda_0 \dfrac{n^2}{n^2 + 4}$

Capítulo 3

POLINOMIOS

1. Monomios

Hemos visto en secciones anteriores expresiones como:

$$a + b, \quad x(y + z), \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \ldots$$

y a este tipo de expresiones donde aparecen números y letras combinados con operaciones se las denomina *expresiones algebraicas*.

En expresiones tales como:

$$3x^5, \quad 2b, \quad -6y^3, \qquad x$$

en las cuales aparecen una letra o la potencia de una letra multiplicadas por un número real se llaman *monomios.*

Las expresiones algebraicas formadas por el producto entre un número real y una potencia de una letra x con exponente natural o cero se denominan *monomios en* x.

El número real que multiplica a la potencia de x es el *coeficiente* del monomio y la letra es la *indeterminada*.

Por ejemplo, $3x^5$, $-x^7$ son monomios en x, mientras que $3z^5$, z^7 son monomios en z. Para simplificar la notación en esta sección trabajaremos sólo con monomios en la indeterminada x.

Un número real es un monomio en el cual la indeterminada x tiene exponente 0:

$$3 = 3x^0,$$

en particular, si el coeficiente es 0 el monomio resulta 0:

$$0\,x^2 = 0, \qquad 0\,x^7 = 0.$$

Las potencias de x también son monomios, con coeficiente 1:

$$x^7 = 1\,x^7.$$

Llamaremos *grado* de un monomio al exponente de x, a excepción del monomio 0 al cual no le asignaremos grado.

- $3x^7$ es un monomio de grado 7.
- 8 tiene grado 0.
- 0 no tiene grado.

La multiplicación o producto de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y el grado es la suma de los grados. Por ejemplo,

$$3x^7 \cdot 4x^3 = (3 \cdot 4)x^{7+3} = 12x^{10}.$$

El cociente entre dos monomios es otro monomio siempre que el grado del monomio divisor sea menor o igual al grado del otro monomio. En ese caso, el cociente es un monomio cuyo coeficiente es el cociente entre los coeficientes, y el grado es la diferencia entre los grados. Por ejemplo:

$$\frac{7x^5}{4x^3} = \frac{7}{4}x^{5-3} = \frac{7}{4}x^2, \qquad \frac{12x^5}{3x^5} = \frac{12}{3}x^{5-5} = 4.$$

Si sumamos dos monomios del *mismo* grado cuyos coeficientes no son opuestos, obtenemos otro monomio de ese mismo grado cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes:

$$3x^7 + 5x^7 = (3+5)x^7 = 8x^7,$$

mientras que

$$3x^7 + (-3)x^7 = 0.$$

Del mismo modo, si restamos dos monomios distintos del *mismo* grado obtenemos otro monomio de ese mismo grado cuyo coeficiente es la resta de los coeficientes:

$$4x^4 - 5x^4 = (4-5)x^4 = -x^4.$$

Pero si sumamos o restamos dos monomios de distinto grado, el resultado no es un monomio. Por ejemplo

$$x^2 + 5x$$

no puede ser expresado como un monomio en x. A este tipo de expresiones se las denomina *polinomios*.

2. Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica que resulta de la suma de uno o más monomios de distinto grado.

Las siguientes expresiones son ejemplos de polinomios en la indeterminada x:

$$x^5 - 2x^3 + 8, \qquad 3 + 7x^2, \qquad 5x^6.$$

Para denotar a los polinomios en la indeterminada x usaremos notaciones como $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, etc. Llamaremos *grado* de un polinomio $P(x)$ al mayor de los grados de los monomios que lo componen, y lo denotaremos gr$(P(x))$. Por ejemplo,

- Si $P(x) = 2x^5 - 2x^3 + 8$, entonces gr$(P(x)) = 5$ porque el monomio de mayor grado es $2x^5$.
- Si $Q(x) = 7 - 3x^{15} + 12x^2$, entonces gr$(Q(x)) = 15$ porque el monomio de mayor grado es $-3x^{15}$.

Igual que para los monomios, no le asignaremos grado al polinomio 0.

En un polinomio no nulo, se denomina *coeficiente principal* al coeficiente del término de mayor grado. Por ejemplo, -3 es el coeficiente principal del polinomio $Q(x) = 7 - 3x^{15} + 12x^2$.

Recordemos que la suma o la resta de dos monomios no siempre es un monomio. Lo mismo ocurre con la división, por ejemplo $x^2 : x^3$ no es un monomio. Pero en el conjunto de los polinomios sí es posible definir las operaciones de suma, resta, multiplicación y división en el sentido que el resultado de estas operaciones entre polinomios es también un polinomio.

3. Suma y resta de polinomios

> La suma de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando los monomios del mismo grado.

Por ejemplo, para sumar

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x \qquad \text{y} \qquad Q(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$$

sumamos agrupando los monomios del mismo grado:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (x^4 + 3x^4) + (-2x^3 + x^3) + (0\,x^2 - 3x^2) + (8x + x) + (0 + 2) = \\ &= 4x^4 - x^3 - 3x^2 + 9x + 2 \end{aligned}$$

> La resta de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene restando los monomios del mismo grado.

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son como antes, entonces

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (x^4 - 3x^4) + (-2x^3 - x^3) + (0\,x^2 - (-3x^2)) + (8x - x) + (0 - 2) \\ &= -2x^4 - 3\,x^3 + 3x^2 + 7x - 2. \end{aligned}$$

Notemos que el grado de la suma o de la resta de dos polinomios no puede ser mayor que el máximo grado entre ambos polinomios. Esto es, si un polinomio tiene grado 5 y el otro tiene grado 3, la suma y la resta de ambos no puede ser mayor que 5.

Más aún, si dos polinomios tienen distinto grado, entonces la suma y la diferencia de ambos tiene el grado del polinomio de mayor grado.

Sin embargo, si tenemos dos polinomios del mismo grado, es posible que la suma o que la diferencia sea de menor grado. Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.1. *Dar la suma entre los siguientes polinomios:*

$$P(x) = 3 - 2x + 7x^2 + 9x^3, \qquad Q(x) = 3 - 2x + 7x^2 - 9x^3.$$

Entonces:

$$P(x) + Q(x) = (3 + 3) + (-2x - 2x) + (7x^2 + 7x^2) + (9x^3 - 9x^3) = 6 - 4x + 14x^2.$$

Como los coeficientes principales de sendos polinomios son 9 y -9 respectivamente, esto hace que los monomios correspondientes se cancelen en la suma, y que el polinomio resultante tenga grado menor que 3.

EJEMPLO 3.2. *Calcular la resta entre los siguientes polinomios:*

$$P(x) = 1 - x + 8x^4, \qquad Q(x) = 3 + 2x + 7x^2 + 8x^4.$$

Calculamos,

$$P(x) - Q(x) = (1 - 3) + (-x - 2x) + (0 - 7x^2) + (8x^4 - 8x^4) = -2 - 3x - 7x^2.$$

En este caso, los coeficientes principales son iguales, luego la resta entre ambos polinomios tiene grado menor que 4.

4. Multiplicación de polinomios

> La multiplicación de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando todos los monomios de uno por todos los monomios del otro.

Esto no es una regla arbitraria sino que resulta de aplicar la propiedad de distributividad de la multiplicación respecto de la suma. Por ejemplo, tomemos $P(x) = 2+x^2$ y $Q(x) = 3+x+x^3$. Entonces

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2 + x^2) \cdot (3 + x + x^3) \\ &= 2 \cdot (3 + x + x^3) + x^2 \cdot (3 + x + x^3) \\ &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^3 + x^2 \cdot 3 + x^2 \cdot x + x^2 \cdot x^3 \end{aligned}$$

Resolviendo las multiplicaciones entre monomios y sumando los del mismo grado resulta

$$P(x) \cdot Q(x) = 6 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + x^5.$$

Notemos que el grado de la multiplicación de dos polinomios es siempre la suma de los grados de los dos polinomios, a menos que uno de los dos sea el polinomio nulo.

5. División de polinomios

La operación de división entre polinomios es análoga en cierto modo a la división de números naturales. Esto es, cuando dividimos dos naturales, por ejemplo 26 y 3, decimos que el cociente entre ambos es 8 y el resto es 2. Esto significa que

$$26 = 3 \cdot 8 + 2.$$

El resto tiene la propiedad de ser un número natural o cero y menor que el divisor. Es decir, si escribimos

$$26 = 3 \cdot 7 + 5$$

es correcto, pero no es cierto que 7 sea el cociente y 5 el resto, pues 5 es mayor que 3.

> Dados dos polinomios $P(x)$ y $D(x)$, siempre existen dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ llamados cociente y resto respectivamente, con la propiedad que
> $$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$
> y tal que el polinomio resto $R(x)$ es el polinomio nulo o es un polinomio de grado menor que el grado del polinomio divisor $D(x)$.

6. Algoritmo de división de polinomios

Para calcular el cociente y el resto de la división entre dos polinomios existe un algoritmo muy similar al usado en la división entera. Si el polinomio divisor tiene grado mayor que el dividendo, entonces el cociente es el polinomio 0 y el resto es igual al dividendo. Por ejemplo, si

$$P(x) = x^2 - 3, \qquad \text{y} \qquad D(x) = x^3 + x - 4,$$

entonces

$$Q(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad R(x) = x^2 - 3.$$

$$\underbrace{x^2 - 3}_{P(x)} = \underbrace{(x^3 + x - 4)}_{D(x)} \cdot \underbrace{0}_{Q(x)} + \underbrace{(x^2 - 3)}_{R(x)}.$$

Recordemos que algo similar ocurre con el cociente entre números naturales. Si el dividendo es menor que el divisor, por ejemplo, 3 dividido 8, entonces el cociente es 0 y el resto es 3.

Ahora, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el del divisor $D(x)$, entonces el cociente no será el polinomio nulo. Tomemos como ejemplo

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2, \qquad D(x) = 2x^2 - x + 1.$$

En primer lugar se dividen los monomios de mayor grado de ambos polinomios. En este caso, $2x^4$ y $2x^2$. Como

$$2x^4 = \mathbf{x^2} \cdot 2x^2,$$

escribimos x^2 en el cociente. Multiplicamos $D(x)$ por x^2, y restamos el polinomio resultante a $P(x)$.

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2 & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3} - & 2x^4 - x^3 + x^2 & \quad \mathbf{x^2} \\ \cline{1-2} & 6x^2 - 2x - 2 & \end{array}$$

Como el polinomio $6x^2 - 2x - 2$ es de grado 2 y 2 no es menor que el grado del polinomio $D(x)$, seguimos dividiendo. Ahora los monomios de mayor grado son $6x^2$ y $2x^2$. Como

$$\frac{6x^2}{2x^2} = 3,$$

sumamos 3 al cociente, multiplicamos por 3 al divisor y restamos el polinomio resultante a $6x^2 - 2x - 2$:

$$
\begin{array}{rl}
2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2 & \big|\, \underline{2x^2 - x + 1} \\
- \quad 2x^4 - x^3 + x^2 & \boxed{x^2 + \mathbf{3}} \longleftarrow \text{Cociente} \\
\hline
6x^2 - 2x - 2 & \\
- \quad 6x^2 - 3x + 3 & \\
\hline
\boxed{x - 5} & \longleftarrow \text{Resto}
\end{array}
$$

Ahora $x - 5$ es de grado menor que $D(x)$, y por lo tanto $Q(x) = x^2 + 3$ es el cociente de la división y $R(x) = x - 5$ es el resto. Esto significa que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

es decir

$$\underbrace{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2}_{P(x)} = \underbrace{\left(2x^2 - x + 1\right)}_{D(x)} \underbrace{\left(x^2 + 3\right)}_{Q(x)} + \underbrace{x - 5}_{R(x)}.$$

Si en una división entre polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ el resto de la división es 0 entonces resulta

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x),$$

es decir, $P(x)$ se escribe como producto de dos polinomios. En ese caso decimos que hemos *factorizado* al polinomio $P(x)$. Por ejemplo, si dividimos $P(x) = x^4 - x^2$ por $D(x) = x^2 - 1$, el resto de la división es 0 y concluimos que $P(x)$ se puede factorizar como producto de dos polinomios.

$$x^4 - x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 1).$$

Podemos aún factorizar x^2 y $x^2 - 1$ y escribir entonces a $P(x)$ como

$$x^4 - x^2 = x \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1).$$

Nos referiremos nuevamente a la factorización de polinomios en el Capítulo 6.

7. Evaluación de Polinomios

En un polinomio, la letra x representa una variable o indeterminada. Si a esa variable la reemplazamos por un número real, por ejemplo 5, decimos que hemos *evaluado* el polinomio en 5.

EJEMPLO 3.3. *Evaluar en $a = 5$ y en $a = 3$ al polinomio $P(x) = x^3 - x + 2$.*

$$P(5) = 5^3 - 5 + 2 = 125 - 5 + 2 = 122.$$

$$P(3) = 3^3 - 3 + 2 = 27 - 3 + 2 = 26.$$

Por otro lado, si hacemos las cuentas correspondientes, veremos que al dividir $P(x)$ por $x - 5$ obtenemos como resto 122, y si dividimos $P(x)$ por $x - 3$ el resto es 26, que justamente son los números $P(5)$ y $P(3)$ respectivamente. Esto se debe a que

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - 5) + R(x),$$

luego

$$P(5) = Q(5) \cdot (5 - 5) + R(5) = R(5).$$

Esto nos dice que $P(5) = R(5)$, y como $R(x)$ es un número entonces no depende de x, y por lo tanto $R(x) = R(5) = 122$.

Este último resultado se llama *Teorema del Resto* y se enuncia así:

Teorema del Resto

Sea a un número y $P(x)$ un polinomio. La evaluación de $P(x)$ en a es igual al resto de dividir a $P(x)$ por el polinomio $D(x) = x - a$

Si $P(a) = 0$, o equivalentemente, si el resto de la división del polinomio $P(x)$ por $x - a$ es 0, decimos que a es una *raíz* del polinomio $P(x)$.

Así por ejemplo, si consideramos el polinomio

$$P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2,$$

vemos que $P(1) = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$. Por lo tanto 1 es raíz del polinomio $P(x)$. Significa que podemos escribir

$$P(x) = (x - 1)Q(x).$$

Para hallar $Q(x)$ dividimos $P(x)$ por $x - 1$, y así obtenemos la factorización

$$P(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 + x + 2).$$

Nuevamente, podemos ver ahora que $P(-2) = 0$, ya que -2 anula el polinomio $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$. Significa que podemos escribir

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)S(x),$$

donde $S(x)$ se obtiene de la división de $Q(x)$ por $x+2$. Así llegamos a

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+1).$$

8. Ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes polinomios, indicar el grado y el coeficiente principal.
   a) $-7x^3 + 8x^2 + 20x^5 + x$,
   b) $1 + x^2 - x^6 + 3$,
   c) 8,
   d) $x^3 + 3x$,
   e) $2^3 + 3^3x + 4^3x^2 + 5^3x^3 + 6^3x^4$.

2. Si $P(x)$ es un polinomio de grado 2 y $Q(x)$ un polinomio de grado 3, ¿cuál es el grado de los siguientes polinomios?
   a) $(x^2 + x + 1) + P(x) + Q(x)$
   b) $P(x)Q(x) - x^8$
   c) $P(x) - 3x^3$
   d) $Q(x) + 7x^2P(x)$

3. Sean $A(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $B(x) = x^3 - 2$ y $C(x) = x - 1$. Calcular los polinomios que resultan de las siguientes operaciones.
   a) $A(x)B(x) + xC(x)$
   b) $\big(A(x)\big)^2 - \big(B(x)\big)^2$
   c) $xA(x) - 3C(x) + B(x)x$
   d) $B(x) - 2[C(x) - 1]^2$

4. Calcular el cociente y el resto de la división de $P(x)$ por $D(x)$.
   a) $P(x) = x^4 + x^2 + x + 1, \quad D(x) = x^2 + x + 1.$
   b) $P(x) = 3x^3 + x - 1, \quad D(x) = 2x^2 - 1.$
   c) $P(x) = x^4 - 2, \quad D(x) = x - 1.$

5. Evaluar el polinomio $P(x) = x^3 + 6x^2 - 3x - 4$ en: $x = 0$, $x = -2$, $x = 1$. Luego efectuar la división del polinomio $P(x)$ por un binomio del tipo $(x - a)$ adecuado, comprobando que el resto de la división coincide con el valor numérico calculado antes.

6. Sin hacer la división, decir cuál es el resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $x - a$:
   a) $P(x) = x^5 - x + 1, \quad a = 2.$

b) $P(x) = x^6 - x^2 + 1, \quad a = -2.$

c) $P(x) = x^6 + 5, \quad a = \sqrt{2}.$

7. Factorizar los siguientes polinomios:

   a) $x^3 + 2x^2 - x - 2,$

   b) $x^4 - 1,$

   c) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$. (Una raíz es $x = 4$)

8. Los siguientes polinomios son divisibles por $x - a$. Calcular el valor de b en cada caso:

   a) $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + bx^2 - 7, \qquad a = 1.$

   b) $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + bx - 5, \qquad a = -1.$

   c) $P(x) = bx^4 - 2x^3 + x^2 - x, \qquad a = 2.$

   d) $P(x) = x^6 - bx^5 + 3x^2 - 4x + 1, \qquad a = -1/2.$

9. Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ para el cual el polinomio $M(x) = x^6 + bx^3 - 5x^2 - 7$ tiene resto 3 en la división por $x + 2$.

10. Determinar el valor de b para el cual el polinomio $P(x) = 2x^6 - bx^4 + x^2 + x + 2$ tiene resto 3 en la división por el polinomio $D(x) = x + 1$.

11. Escribir un polinomio de grado 5 que sea divisible por $x^2 - 2$.
12. Escribir uno o más polinomios de grado 6 cuyo resto en la división por x^5 sea $x + 8$.
13. Escribir un polinomio de grado 6 cuyo resto en la división por $x^4 + 3$ sea $(x^2 - 1)$.

Capítulo 4

ECUACIONES LINEALES

1. Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación es una expresión algebraica que involucra letras llamadas incógnitas. Esto significa que la ecuación no es una identidad cierta para todos los valores de la incógnita sino para algunos, o quizás para ninguno. Por ejemplo, si escribimos:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

esto no es propiamente una ecuación pues la identidad se cumple cualquiera sea el valor de a. En cambio, si escribimos

$$(a+1)^2 = 9,$$

esta igualdad se cumple sólo si $a = 2$ o si $a = -4$. Es una ecuación con una incógnita.

Las ecuaciones

$$2x - y = 3, \qquad 3x + y = 2z, \qquad t = 2u,$$

tienen la propiedad de que las incógnitas aparecen todas de grado 1, y no están afectadas por una potencia, radicación, ni multiplicadas unas con otras, ni en un denominador. Este tipo de ecuaciones se llaman ecuaciones lineales.

No son ecuaciones lineales, por ejemplo

$$2\sqrt{x} + 3x = 8, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \qquad 3xu + 2 = z.$$

En esta sección estudiaremos ecuaciones lineales con una y con dos incógnitas.

Las ecuaciones lineales con una incógnita son aquéllas que pueden escribirse de la forma

$$ax + b = c,$$

donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$ y x es la incógnita.

Resolver una ecuación lineal $ax + b = c$ significa encontrar la solución de la ecuación, es decir, el valor de x para el cual la ecuación es cierta. Por ejemplo, 4 no es solución de $3x + 2 = 20$, pues

$$3 \cdot \mathbf{4} + 2 = 14 \neq 20.$$

En cambio 6 sí es solución pues

$$3 \cdot \mathbf{6} + 2 = 20.$$

Dos ecuaciones lineales con una incógnita son equivalentes si tienen la misma solución. Por ejemplo,

$$3x + 2 = 20, \qquad 7x - 4 = 38$$

son ecuaciones equivalentes pues ambas tienen solución $x = 6$.
Las siguientes operaciones transforman una ecuación en otra equivalente:

- Multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero,
- sumar o restar a ambos miembros de la ecuación un número cualquiera.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación

$$2x + 3 = 7,$$

y multiplicamos por 3 ambos miembros, obtenemos

$$6x + 9 = 21,$$

y si le restamos 7 a cada miembro resulta

$$2x - 4 = 0.$$

Notemos que las tres ecuaciones tienen la misma solución $x = 2$, por lo que son equivalentes.

Para resolver una ecuación lineal, lo que debemos hacer es aplicar a ambos miembros de la ecuación distintas operaciones que la transformen en una ecuación equivalente donde de un lado de la igualdad aparezca la incógnita y del otro un número que será la solución buscada. De ese modo habremos *despejado* la incógnita.

EJEMPLO 4.1. *Despejar la incógnita y resolver la ecuación lineal*

$$5x + 4 = 19.$$

Restamos a ambos miembros 4 y obtenemos la ecuación equivalente

$$5x = 15.$$

Ahora dividimos ambas por 5 y obtenemos la solución:

$$x = 3.$$

En efecto,

$$5 \cdot \mathbf{3} + 4 = 19.$$

También podríamos haber dividido primero por 5 y luego haber restado $\frac{4}{5}$ en ambos miembros. La solución es la misma:

$$x + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}, \qquad x = \frac{19 - 4}{5} = \frac{15}{5} = \mathbf{3}.$$

Es importante verificar que el valor obtenido satisface la ecuación porque un error en los cálculos puede conducirnos a una solución incorrecta.

2. Sistemas de ecuaciones lineales

Analicemos ahora las ecuaciones lineales con dos incógnitas. Por ejemplo:

$$2x - y = 3.$$

Encontrar una solución es dar un par de números que satisfagan la ecuación. La diferencia con las ecuaciones lineales con una incógnita es que ahora tendremos infinitas soluciones. Notemos que si despejamos la incógnita y en la ecuación, obtenemos

$$y = 2x - 3.$$

Entonces para cada valor de x que demos, tendremos un valor de y y este par de números será una solución. Por ejemplo los siguientes pares de números son solución de la ecuación $2x - y = 3$:

$$\begin{aligned} x &= 0, \qquad & y &= -3, \\ x &= 1, \qquad & y &= -1, \\ x &= \frac{5}{2}, \qquad & y &= 2. \end{aligned}$$

En efecto, si reemplazamos estos valores en la ecuación $y = 2x - 3$ veremos que se satisface la igualdad:

$$2 \cdot \mathbf{0} - (-\mathbf{3}) = 3, \qquad 2 \cdot \mathbf{1} - (-\mathbf{1}) = 3, \qquad 2 \cdot \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} - \mathbf{2} = 3.$$

Un *sistema de ecuaciones* es un conjunto formado por una o más ecuaciones. Lo que caracteriza al *sistema* es que se busca una o más soluciones que sean soluciones de *todas* las ecuaciones planteadas en el sistema. En esta sección estudiaremos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x - y & = 3 \\ x + 4y & = 8 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x & = 7 \\ x + y & = 6. \end{cases}$$

son dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

No es necesario que las incógnitas aparezcan todas en todas las ecuaciones. Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x & = 3 \\ 4y & = 8 \end{cases}$$

también es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

> *Una solución a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que son solución de* ambas *ecuaciones.*

Por ejemplo,

$$x = 3, \qquad y = 5,$$

es una solución del sistema

$$\begin{cases} x + y &= 8 \\ y - x &= 2 \end{cases} \qquad \text{ya que} \qquad \begin{cases} 3 + 5 &= 8 \\ 5 - 3 &= 2. \end{cases}$$

En cambio $x = 2$, $y = 6$ no es solución porque $2 + 6 = 8$ pero $6 - 2 \neq 3$.

Puede ocurrir que un sistema no tenga solución, por ejemplo

$$\begin{cases} 3x + y &= 3 \\ 3x + y &= 1. \end{cases}$$

ya que es imposible que exista un par de números x e y para los cuales $3x + y$ sea igual a 3 y a 1 simultáneamente.

> *Dos sistemas de ecuaciones se dicen* equivalentes *si tienen las mismas soluciones.*

Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x - 5y &= 16 \\ x + 3y &= -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y &= 13 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

son equivalentes porque ambos tienen la solución (única) $x = 3$, $y = -2$. Notemos que no es necesario que las ecuaciones de uno y otro sistema sean equivalentes.

Por otro lado, los sistemas

$$\begin{cases} 2x - 5y &= 16 \\ x + 3y &= -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 5y &= 5 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

no son equivalentes, puesto que si bien $x = 3$, $y = -2$ es solución en ambos sistemas, el segundo sistema tiene otras soluciones que no lo son del primero. Por ejemplo, $x = 0$, $y = 1$

3. Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se realizan distintas transformaciones que lo hagan más simple y faciliten su resolución. Estas transfomaciones deben conservar las soluciones del sistema, es decir, deben transformar un sistema a otro equivalente. Las siguientes transformaciones son válidas:

- Cambiar una ecuación por otra equivalente.
- Reemplazar una de las ecuaciones por la que se obtiene sumando o restando las dos ecuaciones.

Para determinar la solución de un sistema pueden usarse varios métodos. En esta sección veremos los siguientes: el método de sustitución, el de igualación y el de reducción.

Método de Sustitución: Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones, y se reemplaza la expresión resultante en la segunda ecuación y se despeja la segunda incógnita.

Método de Igualación: Se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones. Se igualan las expresiones resultantes y se despeja la otra incógnita.

Método de Reducción: Se consigue que una de las incógnitas tenga el mismo (u opuesto) coeficiente en las 2 ecuaciones, luego se restan (o suman) para eliminar dicha incógnita y reducir a una sola ecuación lineal.

Resolveremos a continuación un sistema de ecuaciones a modo de ejemplo, usando cada uno de estos métodos:

EJEMPLO 4.2. *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} 3x - y &= 7 \\ 2x + 3y &= 1. \end{cases}$$

Método de sustitución:

Si despejamos y en la primera ecuación, obtenemos $y = 3x - 7$. Ahora reemplazamos esta expresión en la segunda ecuación:

$$2x + 3(3x - 7) = 1, \qquad \text{es decir} \qquad 11x - 21 = 1.$$

La solución de esta ecuación es $x = 2$. Reemplazamos este valor de x en la ecuación $y = 3x-7$ y obtenemos $y = 3 \cdot 2 - 7 = -1$. Luego

$$x = 2, \qquad y = -1$$

es una solución del sistema.

En efecto, si reemplazamos estos valores en el sistema vemos que se verifican ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - (-1) & = 7 \\ 2 \cdot 2 + 3(-1) & = 1. \end{cases}$$

<u>Método de igualación:</u>

Si despejamos y en cada una de las dos ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} y & = 3x - 7 \\ y & = \frac{1-2x}{3} \end{cases}$$

Notemos que hemos obtenido un sistema equivalente ya que reemplazamos cada ecuación por otra equivalente. Ahora notemos que si x e y son soluciones entonces debe ser

$$y = 3x - 7, \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1-2x}{3},$$

es decir

$$3x - 7 = \frac{1-2x}{3}.$$

Esta es una ecuación lineal que sabemos resolver y que tiene solución $x = 2$. Reemplazamos ahora este valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo en la primera, y obtenemos el valor de y:

$$3 \cdot (2) - y = 7,$$

que tiene solución $y = -1$. Por lo tanto el sistema tiene la solución

$$x = -2, \qquad y = -1.$$

<u>Método de reducción:</u>

Si a la primera de las ecuaciones la multiplicamos por 3, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 9x - 3y & = 21 \\ 2x + 3y & = 1. \end{cases}$$

De esta manera, la incógnita y tiene los coeficientes -3 y 3 respectivamente. Así, si sumamos las dos ecuaciones llegamos a la ecuación lineal

$$11x = 22$$

que tiene como solución $x = 2$. Ahora reemplazamos este valor de x en una de las ecuaciones lineales, y obtenemos el valor para la otra incógnita: $y = -1$.

Debemos dejar en claro que no siempre pueden aplicarse cualquiera de estos métodos, como por ejemplo los casos en los que el coeficiente de una de las incógnitas es 0. Afortunadamente, estos casos son aún más fáciles de resolver. Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{cases} 3x = 2 \\ 2y = 3 \end{cases}$$

podemos despejar x en una ecuación pero no en la otra, y lo mismo ocurre con la incógnita y. Tampoco podemos igualar los coeficientes de las incógnitas porque ninguna de ellas aparece en ambas ecuaciones. Sin embargo la solución se obtiene resolviendo separadamente cada una de las dos ecuaciones. En la primera obtenemos $x = 2/3$ e y puede tomar cualquier valor, mientras que en la segunda debe ser $y = 3/2$ y x puede ser cualquiera. Como la solución del sistema debe satisfacer ambas ecuaciones, esta debe ser $x = 2/3$ e $y = 3/2$.

4. Sistemas compatibles e incompatibles

No todos los sistemas de ecuaciones tienen una solución única. Puede ocurrir que un sistema tenga infinitas soluciones, o también que no tenga ninguna. Si el sistema tiene alguna solución se dice que es un sistema *compatible*, de lo contario se dice *incompatible*. En el caso de ser compatible, puede ocurrir que tenga una única solución o que tenga infinitas soluciones. Si sólo tiene una se dice que es un sistema *determinado*, y si tiene más de una, es decir, infinitas, se dice *indeterminado*.

EJEMPLO 4.3. *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x + y & = 3 \\ 2x + 2y & = 6. \end{cases}$$

Si despejamos x en cada una de las ecuaciones obtenemos $x = 3 - y$ en cualquiera de las dos. Es decir que debemos igualar

$$3 - y = 3 - y$$

que es claramente cierto cualquiera sea el valor de y. Si aplicamos el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y restándosela a la segunda obtenemos

$$0 = 0.$$

Hemos llegado a algo cierto, pero no hemos encontrado una solución. Esto en realidad significa que el sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones se obtienen dándole valores a x y obteniendo los correspondientes valores de y. Para nuestro ejemplo, las soluciones serán todos los pares de números cuya suma es 3:

$$x = 1,\, y = 2, \quad x = 2,\, y = 1, \quad x = 4,\, y = -1, \quad x = 3/2,\, y = 3/2, \dots$$

Un sistema de ecuaciones se dice *compatible* si tiene solución e *incompatible* si no la tiene.
Un sistema compatible se dice *determinado* si tiene una única solución e *indeterminado* si tiene infinitas soluciones.

EJEMPLO 4.4. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 2x + y &= 3 \\ 6x + 3y &= 1. \end{cases}$$

Si despejamos la variable y en cada una de las ecuaciones obtenemos $y = 3 - 2x$ e $y = 1/3 - 2x$. Igualando resulta

$$3 - 2x = 1/3 - 2x,$$

es decir

$$3 = \frac{1}{3}$$

Si despejamos y en la primera ecuación obtenemos $y = 3 - 2x$. Reemplazamos esta expresión en la segunda ecuación y resulta $6x + 3(3 - 2x) = 1$, es decir

$$9 = 1$$

Si aplicamos el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 3 y restándosela a la segunda obtenemos

$$0 = 8$$

Estas expresiones inconsistentes o absurdas nos indican que el sistema no tiene solución posible, es un sistema incompatible.

Resumiendo, al resolver un sistema de ecuaciones por medio de uno de los métodos que hemos presentado, pueden ocurrir una de las siguientes situaciones:

1. Llegar a una contradicción, por ejemplo $0 = 9$, $1 = 3$, lo cual significa que el sistema es incompatible, no existen soluciones.
2. Llegar a una igualdad obvia, por ejemplo $0 = 0$, $-5 = -5$, lo cual significa que el sistema es compatible, pero indeterminado, es decir, existen infinitas soluciones. Éstas se obtienen dando valores a una de las incógnitas y calculando el valor de la otra.

3. Llegar a una solución única del sistema; es un sistema compatible y determinado.

5. Ejercicios

1. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales y cuáles no:
   a) $x^2 + x - 5y + 2 = 0,$
   b) $x^2 + y^2 + 2xy = 10$
   c) $x - y + z = 1$
   d) $\sqrt{3x} - 2y = 4$
   e) $\sqrt{3}x - 2y = 4$
   f) $x + 3zy - y = 0.$

2. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

$$a) 2x + 5 = 0, \qquad b) \frac{3x}{7} - 2 = 4, \qquad c) \frac{3x-2}{7} = 4.$$

$$c) \sqrt{2}x + 3 = 1, \qquad d) \pi + \sqrt{3}x = 2\pi, \qquad e) \frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, reemplazando el valor de x en la ecuación:
   a) $x = 3$ es solución de $x^2 - 3 = 6$.
   b) $x = \sqrt{2}$ es solución de $x^2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.
   c) $x = \sqrt{2} + 1$ es solución de $(x - 1)\sqrt{2} = 2$.

4. Cada uno de los siguientes sistemas es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 7, \end{cases}.$$

   Explicar cuál es la transformación que los hace equivalentes.

$$\begin{cases} 2x + 2y &= 10 \\ 6x - 3y &= 21 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + y &= 5 \\ 3x &= 12, \end{cases} \qquad c) \begin{cases} \frac{3}{2}y &= \frac{3}{2} \\ 2x &= 7 + y. \end{cases}$$

5. Decidir cuáles de las siguientes transformaciones conducen a un sistema de ecuaciones equivalente.
   a) Sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de las dos ecuaciones.
   b) Reemplazar cada una de las dos ecuaciones por la suma de las dos.
   c) Reemplazar una de las ecuaciones por la suma de las dos.

d) Reemplazar una de las ecuaciones por la resta entre las dos.
e) Multiplicar los dos miembros por 0.
f) Sumarle $2x+5$ al primer miembro de cada ecuación.

6. Resuelve los siguientes problemas e indica en cuáles de ellos debiste plantear una ecuación lineal o un sistema de ecuaciones lineales:
   a) El área de un cuadrado es $125\,m^2$. ¿Cuál es la medida del lado?
   b) Hallar dos números sabiendo que su suma es 62 y su diferencia es 4.
   c) Determinar el perímetro de un rectángulo cuyo lado mayor es 1 cm más largo que el menor, y el lado menor es la mitad del mayor.
   d) El triple del cuadrado de un número es 75, ¿cuál es dicho número?
   e) En una parcela, la piscina ocupa 25 metros cuadrados, la casa ocupa tanto como la piscina y la mitad del jardín, el jardín ocupa tanto como la piscina y la casa juntas. ¿Cuántos metros cuadrados ocupan la casa, piscina y jardín juntos?

7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y también los del ejercicio 4) que no hayas resuelto. Indica para cada uno de ellos si es compatible o incompatible. Si tiene solución indica si es determinado o indeterminado.

$$a)\ \begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x-3=2y \\ x=4+y \end{cases} \qquad g)\ \begin{cases} -3\,x+2\,y=-6 \\ 3+y=\frac{3}{2}\,x \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 4x+\frac{1}{2}y=13 \\ -\frac{1}{3}x-3y=-7 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ 6y+4x=12 \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} y-3=-x \\ 2x+5y=6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-4y=0 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} 12x=y \\ x=12y \end{cases} \qquad i)\ \begin{cases} 2x+6y=14 \\ x-7=-3y \end{cases}$$

8. En dos vasijas hay la misma cantidad de agua. Si sacáramos 15 litros de una de ellas y los echáramos en la otra, entonces ésta tendría triple número de litros que la primera. ¿Cuántos litros había, al principio, en cada vasija?

9. Un grupo de personas va a un restaurante a cenar. Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa. Si se sientan cuatro personas en cada mesa, queda una mesa vacía. ¿Cuántas personas y cuántas mesas hay?

10. En una granja hay varios conejos y varias jaulas, de forma que si se coloca un conejo en cada jaula, queda un conejo sin jaula y si se colocan dos conejos en cada jaula, queda una jaula vacía. Cuántos conejos y cuántas jaulas hay?

11. La suma de dos números es 123 y uno es el doble del otro. ¿De qué números se trata?

12. Juan dice que en su aula son 37 compañeros, y que hay el doble de varones que mujeres. ¿Es posible?

13. En un bolso hay 40 monedas, todas de 25 y 50 centavos. Si en total hay $16,50, ¿cuántas monedas de cada valor hay?

14. Luego de 15 partidos sin perder, un equipo de fútbol tiene 29 puntos. Si por cada partido ganado se le asignan 3 puntos y por empate 1 punto, ¿cuántos partidos ganó y cuántos empató?

15. En una librería los cuadernos cuestan $1,20 y los lápices cuestan $ 0,80. En la venta de estos dos artículos, el lunes se recaudaron $ 68. El día martes se vendieron la mitad de cuadernos y 15 lápices más que el lunes y se recaudaron $ 56. ¿Cuántos cuadernos y cuántos lápices se vendieron el día lunes?

16. Un grupo de estudiantes tiene varios libros y mochilas, de modo que si colocan seis libros en cada mochila, queda una mochila vacía y si colocan cinco libros en cada mochila, quedan dos libros sin guardar. ¿Cuántos libros y cuántas mochilas hay?

17. Las entradas para una fiesta de estudiantes costaron $8 por persona sola y $15 por pareja. Si a la fiesta asistieron en total 144 personas y se recaudaron $1098 por venta de entradas, ¿cuántas parejas y cuántas personas solas asistieron a la fiesta?

18. Si a un número de dos cifras se le suma 27, se obtiene el mismo número pero con las cifras invertidas. ¿Cuál es ese número?

Capítulo 5

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. Introducción

Hemos estudiado ya el concepto general de polinomio como una suma de monomios en una variable o indeterminada.

Cuando el grado del polinomio, esto es, el mayor exponente de la variable independiente, es igual a 2, hablaremos de un polinomio de segundo grado.

Recordemos que una raíz de un polinomio es un valor para el cual el polinomio se anula. Es así que la búsqueda de raíces de polinomios de segundo grado se reduce a resolver una ecuación, que se llama *ecuación de segundo grado*.

> *Una* ecuación de segundo grado *es una ecuación que se puede escribir de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$,
> *siendo* x *la incógnita, y* a, b *y* c *números reales,* $a \neq 0$.

Damos a continuación algunos ejemplos de resolución de ecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO 5.1. *Resolver la ecuación* $2x^2 - 5 = 0$.

Aquí se trata simplemente de despejar x^2,

$$x^2 = \frac{5}{2}$$

y determinar los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}}, \qquad \text{y} \qquad x = -\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

EJEMPLO 5.2. *Resolver la ecuación* $2x^2 + 4x + 2 = 0$.

Observemos que si extraemos el factor común 2, resulta ser el cuadrado de un binomio:

$$2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)^2,$$

por lo que debemos resolver la ecuación

$$2(x + 1)^2 = 0.$$

Esa ecuación tiene como única solución el valor $x = -1$.

EJEMPLO 5.3. *Resolver la ecuación* $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

En este caso no se trata de extraer una raíz cuadrada como en el Ejemplo 5.1, ni tampoco consiste en el cuadrado de un binomio como en el Ejemplo 5.2. Sin embargo, podemos operar algebraicamente para obtener el cuadrado de un binomio.

Para ello, dividimos ambos miembros por el coeficiente de x^2, en este caso es 2:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Notemos que $\frac{5}{2}x = 2\,\frac{5}{4}x$, así que si en el miembro izquierdo tuviéramos el término $(5/4)^2$, entonces podríamos *armar* el cuadrado del binomio $(x + \frac{5}{4})$:

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2.$$

Pero como este término no aparece explícitamente, entonces lo sumamos y lo restamos en la expresión del miembro izquierdo:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = x^2 + 2\frac{5}{4}x + \boldsymbol{(\frac{5}{4})^2} - \boldsymbol{(\frac{5}{4})^2} - \frac{3}{2},$$

y de esta manera hemos *completado* la expresión de modo que aparezca el cuadrado de un binomio:

$$(x + \frac{5}{4})^2 - (\frac{5}{4})^2 - \frac{3}{2} = 0.$$

Esta ecuación se resuelve de manera mucho más simple. En efecto, queremos hallar los valores de x tales que

$$(x + \frac{5}{4})^2 = \frac{49}{16}$$

y estos valores son

$$x = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = -3.$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación (5.3) son $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

2. El discriminante

Consideremos ahora la forma general de una ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.1}$$

donde a, b y c son números reales arbitrarios y a es distinto de cero. Nuestro objetivo es determinar cuáles son las soluciones de esta ecuación.

Si dividimos ambos miembros por a obtenemos la siguiente expresión de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \tag{2.2}$$

Un artificio matemático muy utilizado, y que será de uso habitual en nuestra iniciación matemática universitaria, es la suma y resta de una misma expresión numérica o algebraica conveniente. Algo similar a lo que efectuamos en el Ejemplo 5.3 al sumar y restar el término $(5/4)^2$.

Así, si sumamos y restamos la expresión $\dfrac{b^2}{4a^2}$ en el miembro izquierdo de la ecuación (2.2), habremos completado el desarrollo del cuadrado de un binomio. Veamos esto.

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{4a^2}} - \frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{4a^2}} + \frac{c}{a} && (2.3)\\
&= x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} && (2.4)\\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} && (2.5)
\end{aligned}$$

Así, la ecuación (2.2) puede escribirse como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \tag{2.6}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de *discriminante*, y se lo simboliza con la letra griega delta mayúscula Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{2.7}$$

Entonces, para hallar las soluciones o *raíces* de la ecuación de segundo grado (2.1) debemos resolver la ecuación

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \tag{2.8}$$

o equivalentemente

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{2.9}$$

Para resolver la ecuación (2.9) tendremos en cuenta tres casos: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ y $\Delta < 0$.

Si $\Delta > 0$, entonces existen dos soluciones reales. En efecto, si x_0 es una solución, entonces x_0 satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{o} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.10}$$

Finalmente, despejando x obtenemos que en este caso las raíces son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a.} \tag{2.11}$$

Estas soluciones suelen resumirse en la fórmula siguiente, conocida también como la *fórmula de Baskhara*:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.12}$$

El símbolo $\pm$ indica que hay dos soluciones, una con el signo $+$ y la otra con el signo $-$.

Si $\Delta = 0$, entonces la única solución es

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

En el caso en que $\Delta < 0$, la ecuación (2.9) tiene soluciones en el campo de los números complejos. No es posible hallar raíces reales ya que el cuadrado de un número real no puede ser negativo. Recordemos que el número imaginario i es tal que $i^2 = -1$. Así, una solución x_0 de la ecuación (2.9) para el caso $\Delta < 0$ satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{o} \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = -i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}. \tag{2.13}$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación son

$$x_1 = \frac{-b + i\,\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - i\,\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \tag{2.14}$$

3. Clasificación de las raíces

Resumimos entonces qué tipo de raíces se obtienen en una ecuación de segundo grado según sea el signo del discriminante.

a.) $b^2 - 4ac = \Delta > 0$

En este caso se obtienen **dos raíces reales y distintas**, dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a.} \tag{3.1}$$

b.) $b^2 - 4ac = \Delta = 0$

Si el discriminante es cero, entonces hay **una única raíz real doble**:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}. \tag{3.2}$$

Se dice que esta raíz es *doble*, o que la ecuación posee dos raíces iguales, pues en este caso la ecuación original (2.1) puede escribirse de la forma

$$a\,(x - x_0)^2 = 0.$$

c.) $b^2 - 4ac = \Delta < 0$

En este caso existen **dos raíces complejas conjugadas y distintas**:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{3.3}$$

EJEMPLO 5.4. *Analicemos las siguientes ecuaciones de segundo grado:*

$$a)\ x^2 - x - 6 = 0, \qquad b)\ 3x^2 - 6x + 3 = 0, \qquad c)\ x^2 + 1 = 0.$$

Los discriminantes respectivos son:

$$a)\ \Delta = 1 + 4 \cdot 6 = 25, \qquad b)\ \Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0, \qquad c)\ \Delta = 0 - 4 = -4.$$

Esto nos dice que la ecuación dada en a) tiene dos raíces reales distintas:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3, \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2,$$

la ecuación dada en b) tiene una única raíz doble:

$$x_0 = \frac{6 - \sqrt{0}}{6} = 1,$$

y la ecuación dada en c) tiene dos raíces complejas *conjugadas*:

$$x_1 = \frac{0 + i\sqrt{4}}{2} = i, \qquad x_2 = \frac{0 - i\sqrt{4}}{2} = -i.$$

4. Propiedades de las Raíces

A partir de las expresiones dadas en (3.1), (3.2) y ((3.3), calcularemos la suma y la multiplicación de las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Consideramos el caso $\Delta \geq 0$.

Si sumamos los valores de x_1 y x_2 obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \end{aligned}$$

lo que conduce a la siguiente relación:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \tag{4.1}$$

Si multiplicamos las raíces, entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= \frac{(-b)(-b)+(-b)(-\sqrt{\Delta})+(-b)\sqrt{\Delta}+\sqrt{\Delta}(-\sqrt{\Delta})}{(2a)^2}\\
&= \frac{b^2+b\sqrt{\Delta}-b\sqrt{\Delta}-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\\
&= \frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

obteniéndose finalmente:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \tag{4.2}$$

Si $\Delta < 0$ se obtienen las mismas relaciones con la suma y multiplicación de las raíces. En efecto:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \left(\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)+\left(\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)\\
&= \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=-\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Análogamente, la multiplicación de las raíces es igual al producto de una de ellas por su conjugado, y por lo tanto es la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria respectivamente:

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)\\
&= \frac{(-b)^2+(4ac-b^2)}{(2a)^2}\\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Una vez conocidas estas relaciones entre las raíces de una ecuación de segundo grado podemos reescribir ésta en una forma más simple, y en muchos casos conveniente.

En efecto, notemos que reescribiendo la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ de la forma

$$a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0,$$

aparecen como coeficientes de x^2 y x las expresiones $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$ y $\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$. Por lo tanto, podemos reemplazar dichos coeficientes por sus expresiones equivalentes:

$$
\begin{aligned}
a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2-(x_1+x_2)\,x+(x_1\cdot x_2)\right)\\
&= a\left(x^2-x\,x_1-x\,x_2+x_1\cdot x_2\right)\\
&= a\left(x(x-\ x_1)-\ x_2(x-x_1)\right)
\end{aligned}
$$

y como $(x-x_1)$ es un factor común, esto resulta:

$$\boxed{a\,(x-\ x_1)(x-\ x_2)=0.} \tag{4.3}$$

EJEMPLO 5.5. *La ecuación* $2x^2-2x-12=0$ *tiene raíces* 3 y -2*, siendo* $a=2$, $b=-2$ *y* $c=-12$*. Podemos verificar las relaciones anteriores:*

$$3+(-2)=-\frac{-2}{2}, \qquad 3\cdot(-2)=\frac{-12}{2}, \qquad 2x^2-2x-12=2\,(x-3)\,(x+2).$$

4.1. Aplicación de la división de polinomios. Si dividimos un polinomio de segundo grado por uno de primer grado, y el resto de la división es el polinomio nulo, estamos a un paso de encontrar ambas raíces.

Por ejemplo, sean $P(x)=-2x^2+4x+30$ y $Q(x)=x+3$. Efectuando la división de $P(x)$ por $Q(x)$ obtenemos como cociente al polinomio $S(x)=-2x+10$ y como resto 0. Esto significa que

$$-2x^2+4x+30=(x+3)\cdot(-2x+10).$$

Luego el polinomio $P(x)$ se anula para aquellos valores de x que anulen a $(x+3)$ o a $(-2x+10)$. Así obtenemos que las dos raíces de la ecuación $-2x^2+4x+30=0$ son $x=-3$ y $x=5$.

Esto puede resultar útil en el caso que conozcamos una de las raíces de la ecuación de segundo grado y queramos averiguar la otra. Por ejemplo, si tenemos la ecuación

$$7x^2+16x=0,$$

podemos notar que $x=0$ es una solución. Esto significa que el polinomio x divide a $7x^2+16x$. En efecto, $7x^2+16x=(7x+16)\cdot x$. Por lo tanto la otra raíz de la ecuación cuadrática es la que anula a $7x+16$, es decir, $x=-\dfrac{16}{7}$.

5. Resolución de ecuaciones de grado 4 con exponentes pares.

Otro conjunto particular de ecuaciones, a las cuales se les puede aplicar la teoría desarrollada en este capítulo, son las ecuaciones polinomiales de grado 4 con exponentes pares. En las mismas, un adecuado cambio de variable permite reducir el cálculo a la resolución de una ecuación de segundo grado. Por ejemplo, sea la siguiente ecuación de cuarto grado:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \tag{5.1}$$

Notemos que esta ecuación puede escribirse de la forma

$$(x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = 0,$$

es decir, es una ecuación de segundo grado con incógnita x^2. Denotemos provisoriamente a x^2 con la letra u. Entonces, la ecuación (5.1) se escribe en términos de u como:

$$u^2 - 5u + 4 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $u_1 = 4$ y $u_2 = 1$, y por lo tanto las soluciones de (5.1) deben satisfacer $x^2 = 4$ o $x^2 = 1$. Los valores posibles de x son entonces $x = 2$, $x = -2$, $x = 1$ y $x = -1$.

6. Ejercicios

1. Cada una de las siguientes expresiones corresponde a una ecuación de segundo grado. Para cada una de ellas,
   a) calcular el discriminante Δ,
   b) determinar si tiene 2 raíces reales distintas, una única raíz doble o dos raíces complejas,
   c) calcular las raíces x_1 y x_2, y escribir cada ecuación de la forma $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

   a) $x^2 - 5x - 5 = 0$
   b) $x^2 + x - 1 = 0$
   c) $4x^2 + 4 = 5x$
   d) $32x^2 - 20x + 3 = 0$
   e) $x^2 - 28x + 192 = 0$
   f) $x^2 + 7x - 9 = 0$
   g) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
   h) $9x^2 - 8x + 1 = 0$
   i) $\left(\frac{5}{2} - 2x\right)^2 + (x - \frac{1}{2})^2 = x^2$
   j) $2x^2 = (x + 2)^2$
   k) $2x^2 + 3x = 7x + 4$
   l) $5 + x(x - 7) = 9$
   m) $6 + 10x - x^2 = 0$
   n) $x(x - 2) = 15$

2. Escribir una ecuación de segundo grado de la forma $2x^2 + bx + c = 0$ sabiendo que la suma de sus raíces es 2 y su producto también. Calcular dichas raíces.

3. Escribir 3 o más ecuaciones de segundo grado cuyas raíces sean de igual valor absoluto pero de distinto signo, (por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$). ¿Qué forma tienen estas ecuaciones?

4. Una ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene una raíz igual a $2 + 3i$. ¿Cuál es la otra raíz?
5. Resolver mentalmente las siguientes ecuaciones, recordando la propiedad de la suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado.

   Por ejemplo, para $x^2 + 8x + 15 = 0$, pensar en dos números cuyo producto es 15 y su suma es -8. Solución: $x_1 = -3$ y $x_2 = -5$)

   Verificar la respuesta.

   a) $3x^2 + 2x = 0$ *b*) $x^2 + 2x - 3 = 0$ *c*) $x^2 + 2x - 15 = 0$

6. Considerar la ecuación de segundo grado $c\,x^2 + 12\,x + c = 0$.
   a) Calcular el valor de c si se sabe que la ecuación tiene dos raíces reales iguales y positivas.
   b) Calcular las raíces de la ecuación para el valor de c obtenido en el inciso anterior.

7. La ecuación de segundo grado $a\,x^2 + 10x + a = 0$ tiene dos raíces iguales.
   a) Indique cuál es el valor de a sabiendo que las raíces son negativas.
   b) Calcule las raíces de la ecuación para el valor de a calculado en el inciso anterior.

8. Considerar la ecuación de segundo grado $18\,x^2 + b\,x + 2 = 0$.
   a) Calcular el valor de b si se sabe que la ecuación tiene dos raíces reales iguales y negativas.
   b) Calcular las raíces de la ecuación para el valor de b obtenido en a).

9. La ecuación de segundo grado $x^2 - 3bx + 9b = 0$ tiene dos raíces iguales.
   a) Indique cuál es el valor de b sabiendo que las raíces son positivas.
   b) Calcule las raíces de la ecuación para el valor de b calculado en el inciso anterior.
10. Resuelve las siguientes ecuaciones completando cuadrados. Verifica la respuesta.

    a) $x^2 + 4x - 4 = 0$ *b*) $x^2 - 8x - 20 = 0$ *c*) $9x^2 + 36x + 20 = 0$

11. La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es -1 y su producto es -6. Si el polinomio es de la forma $x^2 + bx + c$, encuentra el valor de b y c.

12. Si un polinomio $P(x)$ es de la forma $P(x) = 4x^2 - 4x + k$, cuánto vale k si sabemos que P tiene dos raíces iguales?
13. Escribe un polinomio de segundo grado sabiendo que sus raíces son -1 y 3. ¿Es único? ¿Por qué?
14. Para cada una de las ecuaciones siguientes se da el valor de una raíz. Determinar el valor de la constante y el valor de la otra raíz:

    a) $x^2 - Kx + 6 = 0 \qquad x_1 = 3$

    b) $y^2 + 6y + K = 0 \qquad y_1 = 3$

    c) $w^2 + Kw + 4 = 0 \qquad w_1 = -2$

    d) $K\beta^2 - 3\beta + 4 = 0 \qquad \beta_1 = 1$

15. Resolver las siguientes ecuaciones. Verifica que las soluciones obtenidas satisfagan la ecuación.

    a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

    b) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

    c) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

    d) $x^2(x + 4) = 5x$

Capítulo 6

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

1. Expresiones algebraicas fraccionarias

Una expresión algebraica fraccionaria es aquella en la que aparece un cociente entre expresiones algebraicas. Por ejemplo,

$$\frac{x}{2x+3}, \qquad \frac{1-ab+b^2}{a+b}, \qquad \frac{\sqrt{3-z}}{z^3}.$$

En este capítulo estudiaremos ecuaciones en las cuales la incógnita aparece en una expresión algebraica fraccionaria. Usualmente la forma de resolverlas es transformando esta ecuación en una expresión sin fracciones, de modo que se trate de resolver una ecuación lineal, o de segundo grado, o de un grado mayor.

Por otro lado, en muchos casos es conveniente simplificar estas expresiones algebraicas para facilitar la resolución de la ecuación en cuestión.

Analizaremos varios ejemplos con distintos grados de complejidad a la vez que mostraremos la forma de resolver estas ecuaciones, pero previamente nos referiremos a la simplificación de expresiones.

2. Simplificación de expresiones

Si en una expresión algebraica fraccionaria aparece un factor común en el numerador y en el denominador, entonces podemos *simplificarla*. Por ejemplo en la siguiente expresión:

$$\frac{x^2+x}{3x-5x^3} \tag{2.1}$$

x es un factor común en el numerador y en el denominador. Si dividimos numerador y denominador por x, la expresión se *simplifica*:

$$\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(3-5x^2)} = \frac{x+1}{3-5x^2}. \tag{2.2}$$

En otros casos la expresión por la que se divide es un polinomio de grado mayor que 1, y para ello hay que detectar que se trata de un *factor común* del numerador y del denominador. Por ejemplo, en la siguiente expresión dividimos por el factor común x^2+2:

$$\frac{x^3+2x}{x^2+2} = \frac{x(x^2+2)}{x^2+2} = x. \tag{2.3}$$

Simplificar *una expresión fraccionaria es dividir numerador y denominador por un polinomio no nulo.*

Ahora bien, es importante tener en cuenta lo siguiente. Al simplificar una expresión no obtenemos una expresión equivalente. Es decir, si reemplazamos las letras por números no siempre es igual lo que resulta en el miembro izquierdo que en el derecho. Por ejemplo, en (2.2) el primer miembro no está definido en $x = 0$, y el segundo sí. Esto ocurre porque hemos dividido numerador y denominador por el polinomio x, que justamente se anula en $x = 0$. Por lo tanto, la igualdad entre expresiones es válida sólo para los valores de x distintos de 0.

Si simplificamos una expresión dividiendo por un polinomio $P(x)$
obtenemos otra expresión equivalente
excepto
para los valores de x en los que se anula el polinomio.

En la expresión (2.1) simplificamos dividiendo por el polinomio x, ya que éste aparece en cada sumando del numerador y del denominador. En (2.3) fue fácil ver que $x^2 + 2$ es un factor común al numerador y denominador. Pero no siempre es tan evidente darse cuenta cuál es el polinomio por el que habría que dividir para simplificar la expresión.

Para reconocerlo, es útil recordar algunas identidades algebraicas tales como la diferencia de cuadrados, las potencias de un binomio, etc. Repasaremos algunos casos mediante ejemplos.

EJEMPLO 6.1. *Simplificar la expresión*

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}. \tag{2.4}$$

En este caso podemos observar que en el numerador aparece una *diferencia de cuadrados*: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Asimismo, el denominador puede escribirse como $x(x + 2)$, y así la expresión (2.4) se puede simplificar:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x + 2)} = \frac{x - 2}{x},$$

obteniendo una expresión equivalente *excepto* para $x = -2$.

Las sucesivas *potencias de un binomio* están dadas por

$$\begin{aligned}
(x+a)^2 &= x^2+2ax+a^2\\
(x+a)^3 &= x^3+3ax^2+3a^2x+a^3\\
(x+a)^4 &= x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4\\
(x+a)^5 &= x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Como puede verse, hay una cierta simetría en cada uno de los polinomios resultantes. Por lo tanto, si en una expresión algebraica aparece un polinomio de grado n, podemos analizar si se trata o no de una potencia de un binomio.

EJEMPLO 6.2. *Simplificar la expresión*

$$\frac{2x^3-4x^2}{3x^5-30x^4+120x^3-240x^2+240x-96}. \tag{2.5}$$

En el denominador de esta expresión tenemos un polinomio de grado 5, y el numerador es fácilmente factorizable como $2x^2(x-2)$. Podríamos analizar entonces si en el denominador aparece una potencia de $x-2$. En primer lugar, es conveniente sacar como factor común el coeficiente de x^5, es decir 3, de modo que la expresión resulte

$$\frac{2x^2(x-2)}{3(x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32)}.$$

En efecto, si calculamos la potencia quinta de $x-2$ obtenemos la expresión entre paréntesis, y por lo tanto podremos simplificar la expresión (2.5):

$$\frac{2x^2(x-2)}{3(x-2)^5}=\frac{2x^2}{3(x-2)^4}.$$

¡Atención!: Estas dos expresiones son equivalentes *excepto* para $x=2$, y en ese valor *ninguna* de las dos expresiones está definida.

En expresiones tales como $2x+x^3$, $100x^5-300x^3+50$, $5a^2+17ax$ se puede detectar fácilmente un factor común en cada término de la expresión:

$$\begin{aligned}
2x+x^2 &= x(2+x),\\
100x^5-300x^3+50 &= 50(2x^5-60x^3+1),\\
5a^2+17ax+a &= a(5a+17x+1).
\end{aligned}$$

Pero en algunos casos una suma algebraica puede tener *grupos de términos* en los cuales puede extraerse un factor común diferente, y tal que todas las expresiones resultantes sean iguales. Para clarificar ideas, veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.3. *Simplificar la expresión*

$$\frac{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x - 1}{6x^2 + 12x - 18}. \tag{2.6}$$

En el numerador podríamos agrupar los términos de a dos, y sacar factor común x^5, x^3 y 1 en cada grupo:

$$(x^6 - x^5) + (x^4 - x^3) + (x - 1) = x^5(x - 1) + x^3(x - 1) + 1.(x - 1).$$

Podemos ver que resulta una suma de tres términos, y en cada uno aparece el factor $(x - 1)$. Luego la expresión (2.6) puede escribirse como

$$\frac{(x - 1)(x^5 + x^3 + 1)}{6x^2 + 12x - 18}.$$

En el denominador tenemos un polinomio de grado 2, con raíces 1 y -3, y por lo tanto podemos factorizarlo y simplificar la expresión:

$$\frac{(x - 1)(x^5 + x^3 + 1)}{6(x - 1)(x + 3)} = \frac{x^5 + x^3 + 1}{6(x + 3)}.$$

Las dos expresiones son equivalentes *excepto* para $x = 1$.

Estos son sólo algunos ejemplos en los cuales hemos mostrado cómo simplificar una expresión algebraica fraccionaria. Sin embargo el lector debe saber que pueden presentarse muchos otros casos, y que sólo la práctica en la resolución de este tipo de ejercicios ayudará a conocerlos.

En la siguiente sección nos referimos a la resolución de ecuaciones con una incógnita, en las cuales la misma aparece involucrada en una expresión algebraica fraccionaria.

3. Ecuaciones con expresiones fraccionarias

En el caso de la resolución de ecuaciones en las que la incógnita aparece involucrada en una expresión fraccionaria, es conveniente llevar a la misma a una expresión sin fracciones. Para ello aplicamos la propiedad uniforme multiplicando ambos miembros por las expresiones que aparezcan en un denominador o también simplificando las expresiones. Presentamos algunos ejemplos de resolución de este tipo de ecuaciones. El lector debiera prestar especial atención a las consideraciones realizadas en cada ejemplo.

EJEMPLO 6.4. *Hallar el valor de x que satisface la ecuación*

$$\frac{x^2 + x}{x + 1} = 3x - 2 \tag{3.1}$$

Si multiplicáramos ambos miembros de la ecuación por $(x+1)$ resultaría

$$x^2 + x = (3x-2)(x+1). \tag{3.2}$$

Si resolvemos esta ecuación de segundo grado, encontramos las soluciones $x = 1$ y $x = -1$. Pero notemos que $x = -1$ no es solución de (3.1) puesto que resulta una indeterminación en el primer miembro. Es decir, (3.2) y (3.1) no son ecuaciones equivalentes pues no tienen las mismas soluciones. Esto ocurre justamente porque hemos multiplicado por $x + 1$ que es una expresión que se anula en $x = -1$. Por lo tanto el procedimiento es válido excepto para $x = -1$.

Así, la única solución de (3.1) es $x = 1$.

Si multiplicamos ambos miembros de una ecuación por un polinomio, obtenemos una ecuación con las mismas soluciones *a excepción* de los valores de x que anulan ese polinomio

En el Ejemplo 6.4 vemos además que $x = -1$ anula el numerador y el denominador; eso significa que ambos son divisibles[1] por $x + 1$. Entonces también podríamos simplificar la expresión dividiendo por $x + 1$ al numerador y al denominador:

$$\frac{x(x+1)}{x+1} = 3x-2, \tag{3.3}$$

y resolver la ecuación

$$x = 3x - 2. \tag{3.4}$$

La ecuación (3.4) se ha obtenido a partir de una simplificación en (3.1), y por lo tanto es equivalente a esta última. Su única solución es $x = 1$.

EJEMPLO 6.5. *Resolver la ecuación*

$$\frac{1}{2x+3} = 8. \tag{3.5}$$

En este caso no hay posibilidad de simplificación, y el denominador se anula sólo en $x = -3/2$. Puesto que este valor de x no resuelve la ecuación, entonces podemos multiplicar ambos miembros por $2x + 3$, llevando a la ecuación

$$1 = 8\,(2x+3),$$

[1] Repasar el Teorema del Resto.

que es equivalente excepto para $x = -2/3$. Esta es una ecuación lineal y su solución es $x = -23/16$. Efectivamente es una solución de (3.5), ya que

$$\frac{1}{2 \cdot (-23/16) + 3} = 8.$$

Con un razonamiento similar podremos resolver ecuaciones como las siguientes:

$$\frac{x}{3x-1} = 10, \qquad \frac{2x+3}{x-5} = 0, \qquad 2x + 3 = \frac{3}{x}.$$

Estas ecuaciones pueden ser transformadas en ecuaciones lineales o de segundo grado equivalentes multiplicando por la expresión del denominador, y teniendo en cuenta siempre que el valor de x que anula el denominador no es una solución de la ecuación.

3.1. Cancelación de factores. En algunos casos una misma expresión algebraica aparece en ambos miembros de una ecuación. Por ejemplo

$$(x+5)x^2 = \frac{x^3}{x-5}, \qquad \frac{(3x+2)^2}{4x-5} - (3x+2) = \frac{3x+2}{x}.$$

Resulta tentador simplificar los factores comunes a ambos miembros, o lo que usualmente decimos *cancelar*, y resolver la ecuación resultante:

$$x + 5 = \frac{x}{x-5}, \qquad \frac{3x+2}{4x-5} - 1 = \frac{1}{x}.$$

Sin embargo, al cancelar estos factores no llegamos a una ecuación equivalente. Veamos en un ejemplo por qué.

EJEMPLO 6.6. *Resolver la ecuación*

$$\frac{(3x+2)^2}{4x-5} - (3x+2) = \frac{3x+2}{x}. \tag{3.6}$$

Resolver la ecuación (3.6) es hallar aquellos valores de x que hacen cierta la igualdad. Si cancelamos dividiendo por el polinomio $3x + 2$ en ambos miembros, obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{3x+2}{4x-5} - 1\right) = \frac{1}{x}. \tag{3.7}$$

Esta ecuación es equivalente a

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \tag{3.8}$$

cuyas únicas soluciones son

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{2}. \tag{3.9}$$

Sin embargo, estas no son las únicas soluciones de la ecuación (3.6). La otra solución es la que corresponde a $3x + 2 = 0$, ya que en ese caso ambos miembros de la ecuación se anulan. Por lo tanto $x = -2/3$ es también solución de la ecuación (3.6).

EJEMPLO 6.7. *Resolver las siguientes ecuaciones*

$$\frac{x}{x^2 - \frac{x}{2}} = 2x \tag{3.10}$$

$$\frac{x}{3x-5} = 7x. \tag{3.11}$$

En las dos ecuaciones ecuaciones el factor x aparece en ambos miembros, pero esto no significa que $x = 0$ sea solución de ambas ecuaciones.

Notemos que en la ecuación (3.10) aparece el factor x en el denominador y por lo tanto no es posible evaluar la expresión del miembro izquierdo en $x = 0$. Simplificamos entonces dividiendo por el polinomio x

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x - \frac{1}{2})} = 2x, \tag{3.12}$$

y resolvemos

$$\frac{1}{x - \frac{1}{2}} = 2x. \tag{3.13}$$

Así, las soluciones de (3.10) son las soluciones de (3.13). Ésta se resuelve multiplicando ambos miembros por $x - \frac{1}{2}$, teniendo presente que $x = 1/2$ no es una solución.

Las soluciones de la ecuación son

$$x = 1 \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{1}{2}. \tag{3.14}$$

En cambio, en la ecuación (3.11) vemos $x = 0$ anula ambos miembros de la ecuación, no hay indeterminación en ninguno de los dos miembros. Luego $x = 0$ es una solución y las otras soluciones se obtienen dividiendo ambos miembros por x. Se obtiene así la ecuación (3.13) y concluimos que las soluciones de (3.11) son

$$x = \frac{12}{7} \qquad \text{y} \qquad x = 0. \tag{3.15}$$

4. Ecuaciones con potencias y radicales

Consideraremos ahora algunos ejemplos de ecuaciones en las cuales la incógnita está afectada por una potencia o por una radicación. Por ejemplo,

$$3\sqrt{x} - 2 = 10, \qquad x^3 + 30 = 3, \qquad 81\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 + 2 = 18.$$

Estos casos no son mucho más difíciles que resolver que una sencilla ecuación lineal. Mostraremos varios ejemplos y la forma de resolverlos.

EJEMPLO 6.8. *Resolver la ecuación*

$$3\sqrt{x} - 2 = 10$$

Nuestra primera preocupación será hallar el valor de $\sqrt{x}$, y a partir de este valor podremos conocer la incógnita. Consideremos la ecuación

$$3y - 2 = 10.$$

Esta ecuación es similar a la anterior pero hemos denotado con y a $\sqrt{x}$. Por lo tanto hallaremos el valor de y que resuelve el problema y luego despejaremos x en la ecuación $\sqrt{x} = y$. Como y=4 es la solución de $3y - 2 = 10$, debemos hallar los valores de x para los cuales

$$\sqrt{x} = 4,$$

y así llegamos a que $x = 16$ es la solución.

EJEMPLO 6.9. *Hallar las soluciones de la ecuación*

$$x^3 + 30 = 3. \tag{4.1}$$

Este caso es similar al anterior, sólo que aparece un exponente en x. Denotamos con y a x^3 y resolvemos la ecuación

$$y + 30 = 3.$$

Esta ecuación tiene solución $y = -27$. Para hallar la solución de (4.1) despejamos x de la ecuación $x^3 = -27$ y concluimos que $x = -3$ es la solución.

No debemos suponer que este tipo de ecuaciones tiene siempre una solución única como las ecuaciones lineales, puede ocurrir que tenga más de una o que no tenga ninguna.

EJEMPLO 6.10. *Hallar las soluciones de*

$$81\big(\sqrt[3]{x}\big)^4 + 2 = 18.$$

Si resolvemos $81y + 2 = 18$, obtenemos la solución única $y = 16/81$. Pero al despejar la incógnita x en la ecuación

$$\big(\sqrt[3]{x}\big)^4 = \frac{16}{81}$$

notamos que hay dos soluciones posibles según se tome la raíz cuarta positiva o negativa:

$$\sqrt[3]{x} = \frac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{x} = -\frac{2}{3}.$$

Por lo tanto existen dos soluciones reales a nuestra ecuación

$$x = \frac{8}{27} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{-8}{27}.$$

Culminamos esta sección con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 6.11. *Resolver la ecuación*

$$54\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} - 12 = 2\sqrt[3]{x-2}. \tag{4.2}$$

En este caso no es la incógnita x quién está afectada por la radicación sino una expresión en x. Por lo tanto podemos sustituir

$$y = \sqrt[3]{x-2}$$

y resolver la ecuación

$$54\,\frac{1}{y} - 12 = 2\,y.$$

Como $y = 0$ no es solución, entonces multiplicamos ambos miembros por y y nos quedará resolver la ecuación cuadrática

$$54 - 12y = 2y^2, \qquad \text{o bien} \qquad 2y^2 + 12y - 54 = 0.$$

Esta ecuación tiene las soluciones

$$y = 3 \quad \text{e} \qquad y = -9.$$

Para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación (4.2) resolvemos:

$$\sqrt[3]{x-2} = 3 \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{x-2} = -9.$$

Las soluciones son respectivamente:

$$x = 29 \qquad \text{y} \qquad x = -727.$$

Queda como ejercicio verificar que efectivamente estos dos valores son solución de la ecuación (4.2).

5. Ejercicios

1. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2 - x}{2x - 2}$

b) $\dfrac{x^3 + 7x^2 - 2x}{x^5 - 3x^4 + x}$

c) $\dfrac{4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x}{2x^2 + x}$

d) $\dfrac{x^5 + 7x^3 - 3x^2}{(2x + x^2)(x - x^3)}$

e) $\dfrac{x + 2}{x^2 + 4x + 4}$

f) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 2}$

g) $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^2 + 4x - 5}$

h) $\dfrac{(x^2 - 3)(2x + 1)}{(x - \sqrt{3})}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x-3} = 8$

b) $\dfrac{2x-4}{x} = -7$

c) $\dfrac{x^2+2x-8}{4x+7} = 1$

d) $\dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{x-2}{3}$

e) $\dfrac{7x+1}{2x-4} = \dfrac{10x+3}{3x-6}$

f) $\dfrac{2}{x-5} - \dfrac{3}{x-4} = 0$

g) $\dfrac{5}{x+3} = \dfrac{3}{2x} + \dfrac{2}{x-3}$

h) $\dfrac{x+2}{x+1} = 2 + \dfrac{x-2}{x-1}$

i) $\dfrac{4x}{x+2} - \dfrac{10}{3} = \dfrac{2}{x-2}$

j) $\dfrac{x}{6} = \dfrac{4}{x+2}$

k) $\dfrac{(1+x)(2x+3)}{x+5} = \dfrac{(1+x)(x-3)}{x-5}$

l) $\dfrac{x(x+1/2)}{\frac{3}{2}x-2} = \dfrac{(2x+1)x}{(x-1)}$

m) $\dfrac{x^2-1}{3x+2} = 4(x-1)$

n) $\dfrac{(x+1)^2}{3x+2} = \dfrac{4(x+1)}{7x-3}$

ñ) $x = 13\sqrt{x} - 36$

o) $(\sqrt{y}-1)^2 = 5 - \sqrt{y}$

p) $x + \dfrac{6}{x} = 7$

q) $\dfrac{1}{x-5} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{4}$

r) $\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x+4}{x+3} + 2 = 0$

s) $-3x+1 = -\dfrac{1}{3x-1}$

t) $\dfrac{3x^2-1}{2} - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{x}{6} + 5\dfrac{x^2}{4}$

u) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}x^2 - \sqrt{12}x = 0$

v) $\dfrac{x+1}{3x} - 1 = \dfrac{1-x}{2}$

w) $\sqrt[5]{x^3+63} = -1$

x) $\dfrac{x}{3x-1} = 10$

y) $\dfrac{2x+3}{x-5} = 0$

z) $2x+3 = \dfrac{3}{x}.$