FUNCIONES Y TRIGONOMETRÍA

1. Determine el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 2x + 7$

   b) $g(x) = 2x + 7, \quad 0 \leq x \leq 6$

   c) $f(x) = \dfrac{2}{3x - 5}$

   d) $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x^2 + x + 1}$

   e) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

   f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   g) $f(x) = \sqrt{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

   h) $g(x) = \sqrt{|x|}$

   i) $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

   j) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

   k) $h(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

   l) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

2. Dadas las siguientes funciones f y g, dar los dominios de f y g, calcular la composición $(f \circ g)(x)$ y evaluarla en el punto indicado a:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x + 5}$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$ $\quad a = \dfrac{1}{4}$

   b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x + 5}$ $\quad a = \dfrac{1}{4}$

   c) $f(x) = 1 - \sqrt{2x}$ $\quad g(x) = x + 1$ $\quad a = -1$

   d) $f(x) = 2x^2 - x$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad a = \dfrac{2}{3}$

   e) $f(x) = 3x - 2$ $\quad g(x) = 3x - 2$ $\quad a = 0$

   f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 1}$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad a = -\dfrac{4}{3}$

3. La siguiente es la gráfica de una función f. Trace los ejes coordenados, y a partir de la gráfica de f determinar:

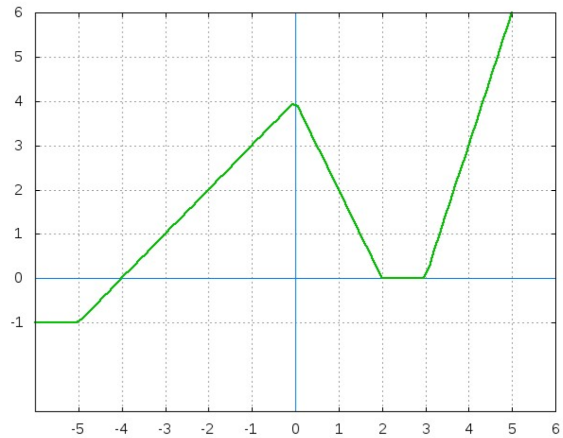
   a) El dominio de f.

   b) La imagen de f.

   c) $f(3)$

   d) Los valores de x para los cuales $f(x) \leq 3$.

   e) Los valores de x para los cuales $f(x) > 3$.



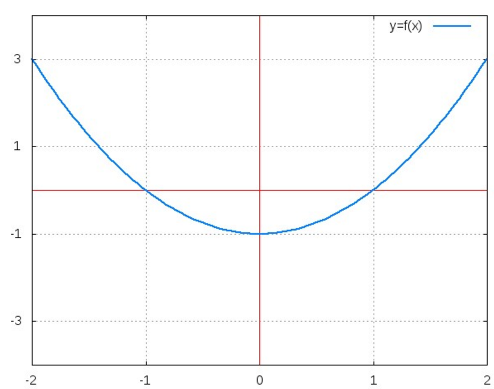
4. A partir del gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, esboce el gráfico de las siguientes funciones:

   a) $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ *b)* $h(x) = \dfrac{2}{x-1}$ *c)* $z(x) = \dfrac{x+1}{x}$

   Definición: Se dice que una función f es **par** si $f(x) = f(-x)$, para todo x en el dominio; y se dice que f es **impar** si $f(x) = -f(-x)$ para todo x en su dominio.

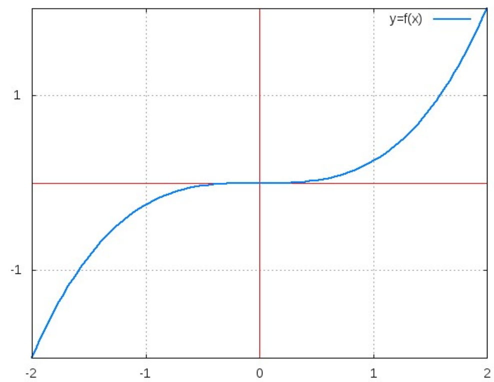
5. La siguiente figura muestra el gráfico de la función $f(x) = x^2 - 1$. Compruebe a partir de la definición que f es una función par, y esboce un gráfico de las funciones determinadas por:

   a) $y = f(-x)$ *b)* $y = -f(x)$ *c)* $y = -f(-x)$



6. La siguiente figura muestra el gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{4}$. Compruebe a partir de la definición que f es una función impar, y esboce un gráfico de las funciones determinadas por:

   a) $y = f(-x)$ *b)* $y = -f(x)$ *c)* $y = -f(-x)$

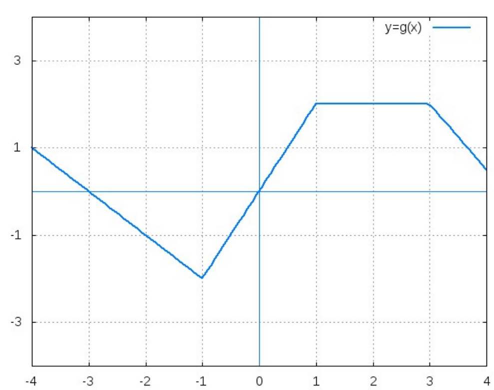


7. (*)Indique si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos. En caso de ser par o impar, esboce el gráfico de la función.

   a) $f(x) = x^2 + x$
   b) $g(x) = x^3 - x$
   c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$
   d) $l(x) = -2x$
   e) $z(x) = -2x + 1$
   f) $j(x) = (x-1)^2$
   g) $t(x) = \dfrac{1}{x}$
   h) $p(x) = 1 + 2x + x^2$

8. (*) A partir del gráfico de la función f, esboce un gráfico de las funciones determinadas por:

   a) $y = f(-x)$
   b) $y = -f(x)$
   c) $y = f(x+1)$
   d) $y = f(x) + 1$
   e) $y = 2f(x)$
   f) $y = f(2x)$



9. Realice el gráfico de las siguientes funciones lineales:

   a) $f(x) = 3x + 1$
   b) $g(x) = -2x + 5$
   c) $h(x) = -x$

10. Grafique el conjunto de puntos que satisfacen las siguientes ecuaciones. Indique en qué casos este gráfico es una recta, en qué casos se corresponde al gráfico de una función lineal, y en qué casos no es el gráfico de una función.

    a) $y - 1 = 3x$
    b) $y = 3$
    c) $x = 2$
    d) $x + 1 = 2y$
    *e**) $y = |x| + 1$
    *f**) $|y| = |x|$

11. Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (-5, 0)$ y $Q = (0, 2)$. Determine la pendiente y la ordenada al origen.

12. El gráfico de la función lineal $f(x) = ax + b$ pasa por los puntos $(1, -3)$ y $(3, 1)$. Determine los coeficientes a y b.

13. Las rectas determinadas por las ecuaciones $y = ax + 16$ e $y = -7x + b$ se intersecan en el punto $(-3, 17)$.

    a) Calcule los coeficientes a y b para cada una de estas rectas.
    b) Grafique ambas rectas.

14. Considere la recta L dada por la ecuación $y = 3x + \frac{2}{3}$:

    a) Escriba la ecuación de la recta perpendicular a L y que pasa por el punto $P = (4, -1)$.
    b) Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q = (0, 2)$ y es paralela a la recta L.

15. *a*) Escriba la ecuación de la función lineal f tal que $f(1) = 0$ y $f(-1) = 2$.
    b) Determine para qué valor de x se cumple $f(x) = 4$.
    c) Indique si la recta determinada por $y = f(x)$ es perpendicular a la recta $y = \dfrac{1}{2}x$.
    d) Esboce un gráfico de cada una de las rectas.

16. Dada la recta con ecuación $y = \dfrac{3}{4}(1 - x)$:

    a) Escriba la ecuación de la recta paralela que pasa por el punto $(1, -1)$.
    b) Dé la ecuación de la recta perpendicular que pasa por $(1, -1)$.
    c) Grafique el conjunto $\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq \frac{3}{4}(1 - x)\}$.

17. Para cada una de las siguientes funciones determine

    a) Las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados.
    b) La ecuación de la recta que es eje de simetría de la parábola.
    c) Las coordenadas del vértice de la parábola.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

b) $g(x) = -2x^2 + x + 3$

c) $h(x) = 2x^2 + 2 + 4x$

d) $F(x) = -(x-1)\,(x+2)$

e) $G(x) = -x^2 - 1$

f) $H(x) = (x-2)^2 + 3$

18. El gráfico de la función cuadrática $f(x) = -3x^2 + b\,x + 2$ corta al eje x en $-\dfrac{1}{3}$ y 2.

    a) Dé las coordenadas del vértice del gráfico de f.

    b) Calcule el valor de b.

    c) Dibuje el gráfico de f.

19. Para la función cuadrática $f(x) = 5x^2 + 3x$.

    a) Dé las coordenadas (x_v, y_v) del vértice de la parábola y las coordenadas (x, y) de los puntos de intersección de la parábola con el eje x y con el eje y.

    b) Indique si el punto $(-1, 2)$ pertenece o no al gráfico de la parábola.

    c) Con la información obtenida en a), realice un gráfico a escala de la función cuadrática.

20. La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ determina una parábola que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(4, 2)$, y su vértice tiene coordenadas $(x_v, 0)$.

    a) Calcule la coordenada x_v del vértice de la parábola.

    b) Calcule los coeficientes a, b y c.

    c) Indique si f tiene dos raíces distintas, una o ninguna.

    d) Con la información obtenida, esboce el gráfico de la parábola.

21. El gráfico de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + 2x$ tiene vértice en $(1, 1)$.

    a) Dé los puntos de intersección del gráfico con los ejes coordenados.

    b) Calcule el valor de a.

    c) Trace el gráfico de f.

22. (*) Grafique las siguientes funciones definidas por partes:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 3 \\ x+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

e) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f) $h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

h) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

23. (*) Considere la siguiente función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < 4 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } 4 \leq x \leq 7 \\ x^2 & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

a) Evalúe $f(-10), f(4), f\left(\frac{9}{2}\right), f\left(\frac{31}{5}\right), f(7)$ y $f(10)$.

b) Determine el dominio de f y realice su gráfico.

24. (*) Para cada uno de los siguientes ítems, esboce el gráfico de las funciones indicadas y determine los puntos de intersección entre los gráficos de estas funciones. Sombree en el gráfico la región del plano encerrada por estos gráficos, y descríbala por comprensión.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 6, \quad g(x) = x + 10$

b) $f(x) = (x-2)(x+1), \quad g(x) = -x(x-3)$

c) $f(x) = 2x+1, \quad g(x) = -x+3 \quad$ y $\quad h(x) = 1$

d) $f(x) = 2x, \quad g(x) = x \quad$ y $\quad h(x) = -x+6$

25. Determine las coordenadas de cada uno de los siguientes puntos de la circunferencia unidad:

    a) $P(3\pi)$ *b*) $P\left(\frac{11}{2}\,\pi\right)$ *c*) $P\left(-\frac{7}{4}\,\pi\right)$ *d*) $P\left(\frac{5}{4}\,\pi\right)$

26. Determine los valores de $\operatorname{sen}(t)$, $\cos(t)$ y $\tan(t)$ para el punto circular $P(t) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

27. Sabiendo que el punto $P(t)$ de la circunferencia trigonométrica está en el cuarto cuadrante y que $\operatorname{sen} t = -\dfrac{\sqrt{8}}{3}$, calcule las restantes 5 funciones trigonométricas: $\cos(t)$, $\tan(t)$, $\operatorname{cosec}(t)$, $\sec(t)$ y $\operatorname{cotg}(t)$.

28. Si $\operatorname{sen}(t) = \frac{2}{5}$, calcule las restantes 5 funciones trigonométricas para cada uno de los siguientes casos:

    a) $\cos(t) > 0$, *b*) $\cos(t) < 0$.

29. Sabiendo que $\operatorname{sen}(t) = -\frac{1}{3}$ y $\cos(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$:

    a) Indique en qué cuadrante se encuentra $P(t)$.

    b) Calcule $\operatorname{sen}(-t)$ y $\cos(\pi - t)$.

30. Obtenga todos los valores de t en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfacen la ecuación dada:

    a) $\operatorname{sen}(t) = -\frac{1}{2}$

    b) $\cos(t) = 1$

    c) $\cos(t) = -1$

    d) $\operatorname{cotg}(t) = \sqrt{3}$

    e) $\operatorname{sen}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

    f) $\tan(t) = -\sqrt{3}$

    g) $\cos(t)\operatorname{sen}(t) = 0$

    h) $\cos(5t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

    i) $1 - \operatorname{sen}^2(t) = \frac{1}{4}$

    j) $\operatorname{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

31. Calcule:

    a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

    b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

    c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

    d) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)$

32. Dibuje los gráficos de las siguientes funciones en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$:

    a) $\operatorname{sen}(t)$

    b) $\cos(t)$

    c) $\operatorname{sen}(t + \pi)$

    d) $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

    e) $\operatorname{sen}(2t)$

    f) $3\cos(t)$

    g) $\cos(\frac{t}{2})$

    h) $-\operatorname{sen}(t)$

    i) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)$