UNC Universidad Nacional de Córdoba — 1613 - 2013 400 AÑOS — FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía y Física

PROGRAMA DE ASIGNATURA

ASIGNATURA: Topología I	**AÑO**: 2012
CARÁCTER: Obligatoria	
CARRERA/s: Licenciatura en Matemática	
RÉGIMEN: cuatrimestral	**CARGA HORARIA:** 120 hs.
UBICACIÓN en la CARRERA: Tercer año – Primer cuatrimestre	

FUNDAMENTACIÓN Y OBJETIVOS

La topología es básica dentro de la matemática avanzada ya que tiene vinculación con casi todas las áreas de la matemática. Asimismo es la más moderna entre las básicas. Su contenido fundamental es el estudio de la “deformación continua” de los cuerpos geométricos y de la generalización de “transformaciones continuas”. Para generalizar este concepto es preciso definir de manera intrínseca en qué contexto específico se trabajará con este concepto. Es decir, qué características tendrán los “espacios topológicos” para poder establecer el concepto de función continua entre ellos sin necesidad de mirarlos insertos en otro espacio ambiente.

La definición formal intrínseca de espacio topológico debe permitir establecer el sentido de cercanía. La definición formal actual más usada por sus implicancias no es la más natural y el alcance que tiene hace que la intuición formada en los ejemplos básicos de R^n y de curvas y superficies en el espacio no sea suficiente para abarcar la riqueza de ejemplos que brinda la topología y que escapan a los objetos originales de su estudio. Es por ello que resulta necesario un trabajo profundo con ejemplos que permitan construir una nueva intuición ampliando el tipo de objetos que involucra y desarrollar la imaginación espacial. Asimismo, es importante destacar que existen diferentes maneras equivalentes de presentar una topología, o los conceptos vinculados a ella.

En el interés de analizar los espacios topológicos y cuándo dos de ellos resultan equivalentes, resulta importante comprender conceptos clásicos preservados a través de funciones continuas como compacidad, conexidad, propiedades de separabilidad, entre otros. Es decir, el estudio de invariantes en la categoría de espacios topológicos.

Como en toda categoría matemática es importante conocer distintas formas de construir otros objetos de la misma categoría a partir de objetos ya dados. En ese sentido los conceptos de topología producto y topología cociente son fundamentales para construir nuevos espacios topológicos.

En el estudio de funciones continuas en R^n, las sucesiones juegan un papel importante que permite definir ese concepto desde otro enfoque. En ese sentido, el concepto de sucesión no es suficiente para extender los resultados clásicos que las involucran al contexto de espacios topológicos generales. Es por ello que resulta necesario generalizar la noción de sucesión plasmados en la definición de red y extender los resultados conocidos en este nuevo contexto de espacios topológicos.

Los objetivos a lograr en este curso es que los estudiantes desarrollen capacidad o adquieran destreza en:

- Reconocer el concepto de espacio topológico y de topología en su más amplio sentido y distinguir las distintas formas equivalentes de definirlos.
- Construir una nueva intuición del significado de continuidad de funciones a través del manejo de diversos ejemplos.
- Utilizar el significado de compacidad y conexidad y de otros invariantes topológicos dentro de este nuevo contexto de espacios topológicos.
- Construir nuevos espacios topológicos a partir de otros dados (topología producto, topología cociente, etc.).
- Manejar el concepto de convergencia y la generalización del concepto de sucesión al contexto general de espacios topológicos, como así también reconocer ciertas propiedades topológicas en términos de los mismos.
- Utilizar los distintos tipos de propiedades de separación y resultados relevantes que las involucren.
- Visualizar otros invariantes topológicos como el grupo fundamental de un espacio topológico.
- Relacionar conceptos topológicos con otras áreas de la matemática y aplicaciones a otras ciencias.

CONTENIDO

Unidad I: Espacios topológicos

Conceptos elementales. Espacios métricos, espacios topológicos. Conjuntos cerrados. Interior, clausura y frontera de un subconjunto. Base y sub-base de una topología, propiedades. Primer y segundo axioma de numerabilidad, espacios separables. Relaciones en un espacio métrico.

Unidad II: **Continuidad**
Funciones continuas, definiciones equivalentes. Funciones abiertas y funciones cerradas. Homeomorfismos. Propiedades topológicas.

Unidad III: Conexión y compacidad
Espacios conexos, componentes conexas. Espacios conexos por curvas. Relación entre ambos conceptos de conexión. Espacios compactos, relación con familias de cerrados con la propiedad de intersección finita. Funciones continuas, conexión y compacidad. Espacios localmente conexos, localmente conexos por curvas y sus componentes conexas.

Unidad IV: Topología producto
Topología inicial para una familia de funciones, propiedades. Topología producto. Producto finito y arbitrario de espacios topológicos, base y sub-base de la topología producto. Topología de la convergencia puntual. Producto de espacios Hausdorff. Producto de espacios conexos. Lema de Alexander. Teorema de Tijonov (producto de compactos). Subconjuntos compactos del espacio euclídeo n-dimensional. Espacio de funciones.

Unidad V: Topología cociente
Topología final para una familia de funciones, propiedades. Topología cociente, la aplicación canónica y sus propiedades: caracterización de los abiertos y cerrados en la topología cociente en términos de saturados. Espacios cocientes Hausdorff. Ejemplos de espacios cocientes: el toro n-dimensional en sus diferentes versiones, el proyectivo real y complejo de dimensión n, cocientes de la esfera de dimensión n, superficies expresadas como cocientes del cuadrado unidad.

Unidad VI: Convergencia
Sucesiones y convergencia en espacios topológicos. Convergencia en espacios Hausdorff. Caracterización de topologías N_1. Funciones continuas y convergencia. Convergencia de sucesiones en el producto de espacios topológicos.Redes y convergencia. Subredes y puntos de aglomeración. Caracterización de la topología por convergencia de redes. Funciones continuas y convergencia de redes. Convergencia de redes en el producto. Compactos y redes. Caracterización de los espacios compactos y N_2 por convergencia de sucesiones. Caracterización de los subconjuntos compactos de un espacio métrico por convergencia de sucesiones. Propiedades topológicas de espacios métricos. Número de Lebesgue de un cubrimiento abierto asociado a subespacios compactos de espacios métricos.

Unidad VII: Propiedades de separación, otros invariantes topológicos
Espacios regulares, completamente regulares. Espacios normales. Compacidad y propiedades de separación. Relaciones entre los conceptos precedentes. Lema de Urysohn (enunciado). Teorema de extensión de Tietze. Compactificación de Alexandroff. Espacios localmente compactos, caracterización. Espacios métricos

completos. Teorema de Baire (versión topológica y versión para espacios métricos).

Unidad VIII: Grupo Fundamental
Lazos. Operación entre lazos. Deformación continua y curvas homotópicas. Grupo de clases de homotopía de lazos que parten de un punto fijo. Grupo fundamental de un espacio topológico. Espacios simplemente conexos. Grupo fundamental de S^1 (idea intuitiva). Grupo fundamental de un espacio producto (enunciado). Ejemplos.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- Topología, Isabel G. Dotti y María J. Druetta. Trabajos de Matemática, FaMAF. Serie C, Nro. 2, 1992.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- Topología General, John Kelley. Eudeba Manuales, Editorial Universitaria de Bs. As. Basic Topology, M. A. Armstrong. Springer (1983).

METODOLOGÍA DE TRABAJO

Clases teóricas con participación de los estudiantes en la discusión de los contenidos expuestos.
Clases prácticas con resolución de ejercicios y problemas donde consulten y expongan los razonamientos elaborados por ellos mismos al docente.
Espacios de exposición por parte de los alumnos de los problemas o resultados planteados en clases teóricas o prácticas para ponerlos en discusión con los docentes y sus compañeros.

EVALUACIÓN

FORMAS DE EVALUACIÓN

- Dos evaluaciones parciales y un recuperatorio. Las evaluaciones parciales son escritas, sobre problemas teórico-prácticos.

- El examen final consta de una evaluación escrita sobre problemas teórico-prácticos (de las características de los trabajos prácticos), y una evaluación consistente en una exposición oral, sobre temas desarrollados en las clases teóricas.

CONDICIONES PARA OBTENER LA REGULARIDAD

- ASISTENCIA

Participar del 70% de la totalidad de horas previstas de clases, tanto teóricas como prácticas.

- EXÁMENES PARCIALES

Aprobar 2 exámenes parciales, con calificación mayor o igual a 4. Se puede recuperar alguno de los parciales en caso de no haber sido aprobado uno de ellos. Pueden presentarse al recuperatorio incluso aunque hayan aprobado los dos parciales.

- EXPOSICIÓN EN CLASE

Realizar por lo menos 2 exposiciones de problemas o resultados planteados en las clases teóricas o prácticas.