



## PROGRAMA DE ASIGNATURA

<b>ASIGNATURA:</b> Funciones Analíticas	<b>AÑO:</b> 2011
<b>CARÁCTER:</b> Obligatoria	
<b>CARRERA:</b> Licenciatura en Matemática	
<b>RÉGIMEN:</b> cuatrimestral	<b>CARGA HORARIA:</b> 120 hs.
<b>UBICACIÓN en la CARRERA:</b> Tercer año - Segundo cuatrimestre	

### FUNDAMENTACIÓN Y OBJETIVOS

El objetivo del curso es introducir a los alumnos en el análisis de funciones de una variable compleja, a valores complejos, enunciando y demostrando los resultados más importantes de la teoría y aplicando estos a la resolución de problemas, ya sean de cálculo o de carácter teórico.

### CONTENIDO

1- El cuerpo  $C$  de los números complejos. Conjugación y módulo de un complejo, propiedades. Representación polar. Fórmula de De Moivre. Raíces de un complejo. El grupo de raíces  $n$ -ésimas de la unidad.

Topología del plano complejo. El plano extendido, representación esférica.

Sucesiones y series de números y funciones complejas. Convergencia absoluta y convergencia uniforme. Criterio de Weierstrass. Series de potencias, radio de convergencia. Producto de series absolutamente convergentes.

2- Funciones complejas diferenciales; suma, producto y cociente. Regla de la cadena. Funciones analíticas, ejemplos. Relación entre diferenciabilidad en  $C$  y en  $R^2$ .

Las series de potencias como ejemplos de funciones analíticas. Estudio de las funciones  $e^z$ ,  $\sin z$  y  $\cos z$ . Ramas del logaritmo y de  $z^b$ .

Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Funciones armónicas. Existencia de armónica conjugada en un disco.

3- Integración compleja. Integral de línea de una función a lo largo de una curva  $C^1$  a trozos, propiedades. Representación de las funciones analíticas por series de potencias. Corolarios: las funciones analíticas son infinitamente diferenciables; estimación de Cauchy; Teorema de Cauchy en un disco.

Funciones enteras. Teorema de Liouville. Teorema fundamental del álgebra. Teorema "chico" de Picard (enunciado)



4- Ceros de una función analítica, multiplicidad. Los ceros son aislados. Teorema del módulo máximo.

Índice de una curva cerrada respecto de un punto. Fórmula integral de Cauchy. Teorema de Cauchy. Teorema de Morera.

El anillo de funciones analíticas en una región es un espacio métrico completo.

Curvas homotópicas. Teorema de la independencia del camino. Otras versiones del teorema de Cauchy. Regiones simplemente conexas, equivalencias.

Conteo de ceros de una función analítica. Teorema de la aplicación abierta. Teorema de Goursat (enunciado).

5- Singularidades aisladas: evitables, polos y singularidades esenciales. Caracterización de los diferentes tipos de singularidades aisladas.

Funciones meromorfas. Teorema de Mittag-Leffler (enunciado). Teorema de Casorati-Weierstrass.

Desarrollo de Laurent. Teorema "grande" de Picard (enunciado).

Residuos. Teorema de los residuos. Cálculo de integrales mediante residuos, distintos casos. Principio del argumento. Teorema de Rouché, aplicaciones. Otra versión del teorema del módulo máximo.

Lema de Schwarz. Principio de reflexión de Schwarz.

6- Transformaciones conformes y su relación con las funciones analíticas. Transformaciones de Möbius, propiedades. Descomposición de una transformación de Möbius en producto de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones. Razón cruzada. El grupo de las transformaciones de Möbius preserva el conjunto de rectas y circunferencias.

Caracterización de las biyecciones conformes del disco unitario y del plano complejo.

Teorema de la aplicación de Riemann. Corolario: toda región simplemente conexa distinta del plano es conformemente equivalente al disco unitario.

## BIBLIOGRAFÍA

- Conway, John. *Functions of complex variable*. Ed. Springer-Verlag.
- Ahlfors, Lars. *Análisis de variable compleja*. Ed. Aguilar
- Cartan, Henry. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Ed. Reiji



### **METODOLOGÍA DE TRABAJO**

El dictado de esta materia se divide en 4 horas semanales de clases teóricas y 4 horas semanales de clases prácticas. En las primeras el docente encargado de la materia expone los conceptos a desarrollar y demuestra los resultados más destacados, mientras que en las prácticas los alumnos deben resolver ejercicios que se plantean, con la ayuda y guía de un docente.

### **EVALUACIÓN**

Para evaluar el desempeño de los alumnos se toman dos exámenes parciales, durante el dictado de la asignatura, y luego un examen final para su aprobación. En los parciales se pide resolver ejercicios del tipo de los que se plantearon en los prácticos, mientras que en el final hay una parte práctica, de características similares a los parciales, y una parte teórica. En esta última los alumnos deben demostrar algunos resultados expuestos en las clases teóricas.

### **CONDICIONES PARA OBTENER LA REGULARIDAD Y PROMOCIÓN**

Para regularizar se requiere aprobar los dos parciales con la posibilidad de un examen recuperatorio en caso de desaprobado uno de ellos.  
La promoción de la materia se logra aprobando el examen final, en sus dos partes.