UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "B"

TRABAJOS DE ENSEÑANZA

Nº 2/2012

Problemas de la Enseñanza de los Decimales

Guy Brousseau

Traducción realizada con autorización del autor por Dilma Fregona con la colaboración de Rafael Soto

Editores: **Lorenzo M. Iparraguirre – Laura Buteler**

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA
REPÚBLICA ARGENTINA

PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA DE LOS DECIMALES

Guy Brousseau

Traducción realizada con autorización del autor por Dilma Fregona con la colaboración de Rafael Soto.

NOTA PRELIMINAR

Este documento fue publicado en versión papel por la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (Fa.M.A.F.) en colaboración con el Centro de Estudios Avanzados de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Se incluyó en la Serie "B" de Trabajos de Matemática con el Nº 26/94, y constaba de dos artículos y un anexo:

Brousseau G., (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 1 (1), 11-59, Editiones La Pensée Sauvage;

Brousseau G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2 (1), 37-127, Editiones La Pensée Sauvage;

El Anexo, con algunas de las planificaciones diarias a las cuales se hace referencia en los dos artículos anteriores.

Los dos artículos y todas las planificaciones diarias de la secuencia, fue publicado en 1987 bajo el título "Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire", difundido por el l I.R.E.M. de Bordeaux, Francia.

La versión digital actual formará parte de la Serie "B" de Enseñanza de la Fa.M.A.F. y la iniciamos con el primero de los artículos. Esta versión corresponde a la publicación revisada y aumentada por el autor, tal como fue difundida en *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990*, (1998), La Pensée Sauvage.

La revisión y actualización de la traducción fue posible durante la estancia en el Centro de Recursos en Didáctica de la Matemática (CRDM) Guy Brousseau, del Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones de Castellón (IMAC), de la Universitat Jaume I (UJI) de Castellón de la Plana, España. Dicha estancia, por un período de tres meses, ha sido financiada por el Plan 2011 de Promoción de la Investigación (cod: INV-2011-2012) de la UJI y con el apoyo de la Fa.M.A.F. a través de una resolución de traslado en comisión a la ciudad de Castellón (HCD 315/2011).

PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA DE LOS DECIMALES

1. INTRODUCCIÓN

Comparar, medir, reproducir longitudes, masas o volúmenes son actividades consideradas completamente fundamentales, y en consecuencia, deben ser aprendidas en los primeros años de escolaridad, inmediatamente después de clasificar, ordenar, contar o reproducir colecciones finitas. Estas actividades ponen en funcionamiento entes matemáticos, los *racionales* o los *racionales decimales*. Es posible reorganizar estos aprendizajes en torno a un proyecto teórico -tomando en cuenta la estructura matemática que los define y rige su empleo- en el cual las adquisiciones de los alumnos son identificadas por los conocimientos que intervienen, ordenadas y justificadas por el lugar que estos últimos ocupan actualmente en el cuerpo de los conocimientos científicos.

Ahora bien, se puede emprender tal proyecto porque existen prácticas sociales correspondientes cuyo origen se pierde en la noche de los tiempos; porque si bien los resultados parecen claros, las acciones garantizadas, los métodos evidentes, las propiedades útiles, esas actividades son en realidad a menudo, si reflexionamos bien sobre ellas, de una gran complejidad, así como los conceptos llamados elementales que están allí involucrados. Las relaciones entre esas teorías y esas prácticas son muy misteriosas cuando se las quiere traducir en *comportamientos* de los sujetos que llevan a cabo esas actividades, en *modificaciones* de quienes las aprenden o en *decisiones* de quienes las enseñan.

Es por ello que el objeto de este estudio parecerá, a algunos, excesivamente presuntuoso.

Se trata, en efecto, de estudiar las condiciones en las cuales pueden aparecer esos comportamientos o esas apropiaciones, así como las relaciones que mantienen las concepciones matemáticas -cuyos indicios son esos comportamientos- con ciertos caracteres de las *situaciones* que las acompañan.

El número de variables que se puede esperar justificaría todos los pesimismos, porque tal proyecto no puede economizar una *realización experimental* de esas relaciones según una metodología eventualmente específica, aunque no más específica que la de un compromiso teórico inicial.

Además, la finalidad de esas observaciones es, por supuesto, permitir una organización y un control de esas situaciones para la *enseñanza*, lo que nos conduce a intentar ubicar *el campo de las elecciones posibles* más que a limitarnos a la observación y a la comparación de las prácticas actuales de la enseñanza de los racionales y de los decimales.

Nuestro texto se alimenta de un conjunto de actividades y de investigaciones en el campo así recortado y que han nacido en 1974 en el seno del IREM de Bordeaux[1]. No constituye un informe de investigaciones ni a fortiori una única investigación.

Además nos ha parecido necesario introducir al lector en los debates de la didáctica por una vía diferente de la presentación académica habitual de los trabajos científicos.

Hemos comenzado por el análisis del currículum típico de los años 60 y 70 y del efecto epistemológico de la reforma de los 70 en las concepciones de los alumnos y de los maestros sobre los decimales. Hemos querido hacer este primer estudio en el lenguaje y en el espíritu de las épocas consideradas, con la intención de organizar para el lector un acceso familiar tanto al objeto observado como a los fenómenos y a los debates, es decir a la situación actual de los problemas abordados por la didáctica de la matemática.

A este análisis seguirá el examen de los resultados y el de las alternativas abiertas a este método, por diversas teorías del aprendizaje, de la enseñanza o del desarrollo.

Este ejemplo introductorio permitirá también dar testimonio de fenómenos, algunos de los cuales serán estudiados experimentalmente en la continuación del texto.

---

[1] El conjunto de personas involucradas en este trabajo comprende: los estudiantes y los enseñantes del Tercer Ciclo de Didáctica de la Matemática, los maestros de la escuela para la observación J. Michelet y profesores de las escuelas normales de la región.

En un momento donde un cierto número de países se dispone a adoptar el sistema métrico, me pareció bastante oportuno examinar con cierto detalle a qué enseñanza se ha llegado en el país que fue el primero en adoptar su uso.

Esta presentación no carece de riesgos, en particular el de la confusión con el discurso pedagógico clásico que se usa en los intercambios profesionales, o con los artículos polémicos fundados solamente en opiniones. No faltará quien me reproche que vuelva a ese discurso en el momento mismo en que manifestamos nuestro deseo de establecer la didáctica como campo científico.

Pero no hay que confundirse con este modo de presentación: tal análisis solo ha sido posible por la existencia del trabajo experimental evocado anteriormente y que será presentado en la segunda parte de este estudio[2]. A un lector advertido, no le escaparán algunos términos o algunas ideas anacrónicas.

Es necesario que quede claro que, por ejemplo, nuestro análisis un poco rápido de la posición de Dienes, si bien se apoya sobre observaciones bastante largas, se funda sobre todo en la existencia de otra teoría de los procesos de génesis de los conceptos matemáticos. Esta interiorización activa y dialéctica sustituye a la interiorización inmediata de Dienes para explicar el carácter interactivo de los conocimientos que, nuestra parte experimental, tendrá como finalidad hacer funcionar y observar.

"En las ciencias más que en otros dominios uno es llevado a confundir el conocimiento tal como se lo transmite y el conocimiento tal como se lo crea". Esta opinión de Bachelard (1938) vuelve indispensable el análisis histórico y epistemológico de la noción de racional y de decimal. Este análisis nos dará ejemplos del funcionamiento de los conceptos en diversas situaciones y nos permitirá dar cuenta de sus características y estudiar aquéllas que daban significación a las nociones. Identificaremos principalmente la naturaleza de los obstáculos que se oponen a la evolución de los conocimientos.

Convendrá entonces intentar reconocer los obstáculos que son constitutivos del concepto y el tipo de situaciones que están asociadas a ellos[3].

[...]

2. LA ENSEÑANZA DE LOS DECIMALES EN FRANCIA EN LOS AÑOS 60

A comienzos de los años 60, los "números decimales" así como las "fracciones comunes" muy simples, figuran en el programa de los cuartos y quintos años de la escuela primaria (CM1: 9-10 años y CM2: 10-11).

2.1. Descripción de un currículum

Lo que sigue es el resumen de un método expuesto en una obra muy conocida desde 1936 y que presenta muchas prácticas estables y comunes entre los maestros de la época. (*"Arithmétique nouvelle au cours moyen"*, de R. Jolly-Fernand, Paris: Editions Fernand Nathan).

2.1.1. La lección de introducción[4]

La obra evoca mediciones de longitud con un metro plegable. El enseñante las hará realizar -a menos que haga leer el texto o comentar las imágenes solamente. No se encuentra ningún comentario sobre las dificultades prácticas de esta actividad ni sobre las particularidades del conteo de unidades con ayuda de una graduación.

Se enumeran los "submúltiplos" del metro -que son en realidad los "múltiplos" de la unidad más pequeña que se ha presentado: el milímetro.

---

[2] Véase "Problemas de didáctica de los decimales".

[3] Ibídem.

[4] P. 12, sexta lección: duración 1 hora.

Se hace escribir el resultado de esta operación bajo la forma de un "número decimal". En esta oportunidad, la palabra "entero" aparece por primera vez en el curso escolar para distinguir un "número" sin parte decimal, por oposición a "número decimal" que comprende una parte entera, una parte decimal y la indicación de una unidad -así los números enteros no son decimales.

El análisis de esta escritura -ubicada en una tabla- no es más que un ejercicio familiar de numeración con un cambio de nombre en los encabezados de las columnas.

Sin embargo, ese cambio de vocabulario conduce a una novedad porque la justificación del nombre de esas sub-unidades se hace en referencia a la unidad principal. Así, al "agrupamiento de a diez" de los estudios sobre numeración, se lo sustituye por una "división por diez" de la construcción de las graduaciones del metro. No se puede saber si esta "división" se efectúa geométricamente, ni cómo: es suficiente sin duda que el resultado coincida con la división en los naturales. En esta parte no hay ningún interrogante, ningún problema, ninguna acción por parte del alumno que no parte ni divide nada.

La obra da algunos ejemplos de uso de la palabra "unidad" -que designa aquí *el objeto* material iterado- pero indica solamente por el título: "cambio de unidad" que es necesario explicar a los niños cómo se hacen las conversiones de unidades.

De hecho, el verdadero contenido de la lección está indicado por los ejercicios escritos: re copiar la tabla de numeración y escribir allí los números, expresar las longitudes dadas en metros y en sus submúltiplos y ¡"dibujar una recta" de longitud dada!

2.1.2. El sistema métrico. Los problemas

A esta lección siguen otras 7 -donde se aprende siempre únicamente en relación a las longitudes y a través de problemas prácticos, a hacer la suma, la resta y la multiplicación por un entero de los números decimales- y una lección de revisión que presenta la tabla de los múltiplos y de los submúltiplos del metro, llamada "numeración de longitudes".

Para cada una de las otras magnitudes, salvo para los ángulos: capacidades (2 lecciones), pesos (5 lecciones), monedas (3 lecciones), las lecciones de introducción están calcadas del mismo modelo.

11 lecciones estarán dedicadas al estudio de otras magnitudes: superficies, volúmenes, densidades, velocidades y a los correspondientes "sistema de medida".

A todas estas lecciones siguen aplicaciones donde se trata, a menudo, de calcular precios, longitudes, superficies, volúmenes, etc. y donde los decimales son utilizados cotidianamente.

2.1.3. Las operaciones en los decimales

El manual propone aprender la multiplicación de un número decimal por 10, 100, 1000, después por un natural, después de un número entero por un decimal y finalmente el de dos números decimales.

Es necesario notar que en el producto de un decimal por un entero, el cambio de unidad permite probar la validez de la regla. En cambio, en el producto de un número entero por un decimal, este último pierde la indicación de la unidad que no puede más ser cambiada. La regla se da sin prueba. La verificación -establecida en un caso particular, con la ayuda de una fracción: $\frac{1}{2}$ reemplaza a 0,5- está tomada de una práctica corriente porque ninguna teoría ha sido hecha aún en relación a este tema.

El estudio de la división -definida como una operación concreta: se divide una torta- sigue un plan que manifiesta aquí también la preocupación de pegar las representaciones mentales que permitan comprenderla y la ejecución de tareas progresivamente más complejas. El orden de las lecciones -división de un natural, después de un decimal (medidas) por 10, 100, 1000, división entre naturales y cociente decimal, división con dividendo y luego divisor decimales, finalmente división de decimales- sugiere explicar cada etapa del algoritmo por los precedentes pero esas explicaciones no figuran.

La justificación de la división por un decimal, que pierde de nuevo la indicación de la unidad y su carácter de "medida"[5], se apoya en la propiedad establecida para los naturales de la invariancia del cociente en la multiplicación del dividendo y del divisor por un mismo número, y extendida sin comentarios a los decimales. Una lección especial está dedicada a la división de un dividendo por un divisor más grande que él.

2.1.4. Las fracciones decimales

Son introducidas exactamente antes de las fracciones comunes, como una escritura nueva del decimal ya estudiado. Las 5 lecciones que se le dedican, consisten en reformular las reglas de cálculo de los decimales en términos de operaciones sobre las fracciones.

Está claro en este caso que lo que se enseña es la teoría de las escrituras y no de los entes matemáticos. Así 3/10 es una fracción decimal pero 1/2, 2/5, 3/5, etc. ¡son "fracciones comunes"!

2.1.5. Las justificaciones y las pruebas

Contrariamente a otras obras de la misma época[6] que se contentan con enunciar y hacer aplicar las reglas, este manual intenta justificarlas sea por una verdadera prueba, sea por un ejemplo, o una verificación. Aún en el caso donde la prueba no es posible, la presentación del texto sugiere que el alumno puede y debe comprender. "El cociente" de 2 números cualesquiera es siempre un decimal, ya sea "exacto" o "aproximado".

No se estudian racionales no decimales. El alumno debe detener la división cuando obtuvo una precisión razonable en el contexto. Esta convención ni siquiera es enunciada, es practicada de hecho.

2.2. Análisis de las elecciones características de ese currículum y de sus consecuencias

2.2.1. Concepción dominante del decimal escolar en 1960

Este método puede ser considerado como el típico de esa época, al menos por las características siguientes:

a) el decimal es siempre la expresión de una "medida" (en el sentido no matemático);

b) esas medidas se efectúan en el sistema métrico;

c) el decimal está definido en tanto que número natural munido de la indicación de una unidad y de una coma que ubica la cifra de esta unidad;

d) los algoritmos de cálculo se presentan como si fueran los mismos que para los naturales, completados solamente con un procedimiento relativo a la coma.

2.2.2. Consecuencias sobre el producto en los decimales

Pueden percibirse las consecuencias de estas elecciones:

a) No existe el decimal operador
La escritura 3,25 no tiene ningún sentido si el tipo de medida efectuado no está acompañado por la unidad indicada. El uso de los decimales estará entonces limitado a los casos cubiertos por la antigua denominación de "número concreto".

b) El producto no tiene sentido

---

[5] La palabra "medida" será empleada en todo este párrafo, no con un sentido matemático sino en el sentido corriente que le daba la obra estudiada.
[6] Por ejemplo Bodart-Bréjaud, en Editions Fernand Nathan, Paris.

Será entonces casi imposible para un alumno dar directamente un sentido a la operación que consiste en multiplicar algo por un decimal:

"3,25 m x 4" puede remitirse a una adición, como en los naturales; pero no "4 m x 3,25" si 3,25 no se obtiene por una evaporación de la unidad. No son artificios como los señalados los que pueden disminuir el obstáculo. Equivalencias del tipo:

"4 m x 3,25 = 3,25 m x 4" son inconcebibles;

así como:

7,25 m x 4,38 = 7,25 x (4 + 0,3 + 0,08)

= 7, 25 x 4 + 7,25 x 0,3 + 7,25 x 0,08.

El producto ya no puede ser interpretado con la ayuda de la representación en los naturales, que le ha servido de definición. Para continuar dando al producto de dos decimales una representación "concreta", es decir conforme a la concepción descripta más arriba (*Concepción dominante del decimal escolar en 1960)*, es necesario restringir el uso, ya sea en los casos de "medidas-producto", por ejemplo la superficie de un rectángulo, o en el de los isomorfismos de medidas, por ejemplo el precio de una cantidad no discreta, el peso de un volumen dado de un cuerpo homogéneo, etc.

c) Medidas-producto y dimensiones

En efecto, en el caso de las medidas-producto, por ejemplo la superficie del rectángulo, se escribe: 2,5 x 3,25 = 8,125 solamente si se ha elegido convenientemente la unidad de superficie (el rectángulo que tiene por longitud la unidad elegida para el primer número y por ancho la elegida para el segundo número).

No existe un medio para justificar a priori esta fórmula antes que esta otra: 2,5 x 3,25 = 812,5 o aquélla formada con cualquier otro valor.

d) Proporciones

El caso de los isomorfismos de medidas es más favorable. Una de las medidas actúa sobre la otra como un conjunto de operadores multiplicativos que se conservan como una medida. De todos modos exige que se construya una nueva interpretación del producto de dos números que en lo posible englobe a la antigua, la utilizada por Al Kwarismi en el siglo IX para unificar la noción de número: a x b es el número que es a "b" como "a" es a "1".

Las tímidas tentativas que se pueden observar para desligar al decimal de su función de resultado de una medida son totalmente formales:

- sustitución por nombres más generales (unidades, décimos, centésimos),... de los específicos del sistema métrico y que prolongan las denominaciones en los naturales (decenas, centenas, etc.);
- rechazo del nombre de la unidad antes o después del número: 3,25m o m: 3,25 en lugar de 3m,25 (desde 1945).

La supresión, pura y simple, de la mención de la unidad, a partir de cierta lección y sin advertencia -la evaporación- tal como se la utilizará sistemáticamente después de la reforma de 1970, es francamente abusiva pero solo se produce furtivamente. La presión de los matemáticos para hacer aislar los entes -de los cuales ellos teorizan su estructura- no era muy fuerte en esa época.

2.2.3. Las dos representaciones de los decimales

Se puede constatar que las razones y las proporciones (al interior de una misma magnitud -números abstractos) si no son enteras, son expresadas en fracciones (comunes o decimales) o en porcentajes pero no en decimales. Se podría suponer que esta especialización del vocabulario no es más que una marca de la historia, pero es probable que le corresponda representaciones distintas: por un lado, los decimales que representan medidas munidos de una adición y del producto por un natural, por otra parte las fracciones, aunque aparentemente también definidas a partir de la medida (la torta que se corta y de la cual se toman algunas partes) se emplean como razones.

El buen funcionamiento de los razonamientos dependerá entonces de la facilidad con la cual los alumnos puedan pasar, en una situación de resolución de problemas, *de una a otra de estas representaciones.* La capacidad de sustituir una de las formulaciones por otra en el curso de una interrogación, no es más que un indicio de cómo el alumno podría efectuar esos cambios de puntos de vista. Más adelante, haremos la historia de esas relaciones.

2.2.4. El orden de los decimales

Pero en realidad, esos decimales escolares siguen siendo enteros naturales. En todas las medidas existe un submúltiplo indivisible, un átomo más allá del cual todos los valores por debajo de ese umbral, se confunden. Aún si la definición deja entrever que todas las unidades pueden ser divididas en diez, esas divisiones no son jamás impunemente seguidas -en la enseñanza elemental- más allá de lo útil o de lo razonable, incluso a través de la ficción cómoda del cálculo de la división. Esta tendencia se expresará claramente en los comentarios de los programas de 1970 donde el decimal se introduce como medida del cardinal de conjuntos finitos: "tomando mil como unidad, la población de una ciudad de 10850 habitantes se expresa por el número decimal 10,850".

En esas condiciones, los decimales permanecen munidos de un orden discreto, el de los naturales: con esta definición, muchos alumnos tendrán dificultades para imaginar un número comprendido entre 10,849 y 10,850. Por otra parte, este tipo de cuestiones no se plantea nunca en esa época y solo puede resolverse por un aprendizaje del algoritmo o "imaginando" una nueva subunidad. ¿Pero de qué modo?

Las comparaciones y las sumas de decimales a menudo serán correctas solamente si estos últimos están escritos con el mismo número n de cifras después de la coma, es decir si son presentados en el mismo $\mathbf{D}_n$ (conjunto de decimales tales que $10^n\mathbf{D}_n \in \mathrm{N}$) y entonces se interpretan como naturales[7].

Los encajes de estos $\mathbf{D}_n$ ($\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}_2 .... \subset . \mathbf{D}_n$) ofrecerán dificultades sobre todo cuando la situación se complique con $\mathbf{D}_0$, el conjunto de los naturales, porque hemos visto que si los decimales son en el fondo naturales, ¡los enteros fueron declarados ser no decimales!

2.2.5. La aproximación

La distinción entre parte entera y parte decimal se deriva de la práctica de la medida y de la estimación, sobre todo en los cálculos donde la operación sobre las partes enteras da el orden de magnitud. Esta distinción es muy útil porque 0,31; 3,1; 31... tienden a identificarse (basta con elegir su unidad).

Pero entonces, el decimal así cortado en dos, tendrá tendencia a seguir ciertas reglas para la parte entera y otras para la parte decimal[8]. Por ejemplo 3,9 será inferior a 3,12 (ya que 9 < 12)[9] y también, mentalmente, 2,3 x 2,3 dará 4,9.

Los decimales serán identificados con las partes decimales y entonces serán inferiores a 1. Los alumnos dudan en encontrar un decimal con una sola cifra después de la coma y que sea superior a 0,9...

Esta idea de que la medida conduce a dar un número, "aproximado" pero "que cuenta" y un pequeño resto despreciable se afianzará fuertemente, sobre todo cuando la división da series visiblemente infinitas que es necesario ocultar sin más porque no tienen un estado posible.

---

[7] Este modelo ha sido estudiado con precisión por M. L. Izorche: *"Les réels en classe de seconde"*. Memoria de D.E.A. Bordeaux I. 1977.

[8] *NdE:* véase, en relación a estas cuestiones, Léonard y Sackur-Grisvard (1981, 1991). Sackur-Grisvard y Léonard (1983).

[9] 37 % de los alumnos de CM2 según una encuesta del I.N.R.P. (1979). *NdE*: Brousseau menciona una encuesta dirigida por Jacques Colomb.

Y cuando más tarde, un estudiante considere en un problema una serie $\sum a_n$ de términos positivos, cuyo término general tiende a cero y piense que converge, ¿es porque se remonta a la implicación de un teorema conocido, o más bien porque subsiste en alguna parte la idea que ($\forall\varepsilon\ \exists\ n : p>n \Rightarrow a_p < \varepsilon$) esto quiere decir que ($\exists n : p>n \Rightarrow a_p = 0$) en referencia a la representación de los decimales que aprendió desde su infancia?

2.3. Influencia de las ideas pedagógicas sobre esta concepción

2.3.1. Apreciación de los resultados

En esta época, esas dificultades no aparecen o son consideradas menores. La enseñanza de la aritmética no presenta dificultades para el maestro y no demasiadas para la mayoría de los niños. Y si hay en matemática una enseñanza que no se presta a discusión alguna y no presenta ninguna dificultad, es la de los decimales. Por otra parte, está tan profundamente asociada al uso del sistema métrico y a las medidas evocadas en los problemas escolares, que entonces no se ve cómo se podría enseñar de otro modo o no tener éxito al enseñarlos.

Es necesario explicar esta opinión para comprender realmente las condiciones de la enseñanza de los decimales en esta época.

2.3.2. Métodos clásicos

Ante todo, ninguna de las teorías pedagógicas de la época pretende ni puede proporcionar variantes que darían una alternativa a la concepción dominante del decimal escolar de 1960. Se supone que los contenidos están constituidos y organizados según las reglas de su disciplina, y la pedagogía no es más que el arte de comunicarlos. Se supone que la pedagogía no tiene incidencia o efecto sobre ellos.

Consideremos en primer lugar los más antiguos:

- Los métodos dogmáticos conducen a hacer primero las reglas, y luego a hacerlas aplicar.
- Los métodos mayéuticos proceden por preguntas y respuestas y simulan un redescubrimiento de la regla.
- Los métodos activos insisten en la importancia del tiempo dedicado a la actividad del alumno y sobre todo a la actividad manual en relación al tiempo de escucha o de aprendizaje formal, pero esas actividades son, o bien manipulaciones que ilustran un discurso introductorio o bien ejercicios. Prisioneros de la ideología de la mano que modela el espíritu, no encuentran más que accidentalmente situaciones-problemas eficaces.
- La corriente empirista sensualista influencia los manuales a no ser que sea a la inversa, y éstos se cubren de ilustraciones coloreadas.

Todos estos métodos respetan los principios siguientes:

a) no se introduce ningún conocimiento que no pueda ser admitido inmediatamente, o bien definido o explicado con la ayuda de adquisiciones anteriores;

b) cada definición o explicación debe ser formulable y justificable -si no es formulada- en el lenguaje de la ciencia enseñada- o al menos en su expresión cultural más conocida;

c) cada "enseñanza" da lugar a un aprendizaje identificable y controlable, y, en el límite, solo es enseñado lo que puede ser aprendido;

d) las adquisiciones iniciadas se prolongan y se justifican por el uso -importancia y frecuencia- que se hace en las lecciones anteriores.

2.3.3. Optimización

Esos principios conducen naturalmente a una concepción de la optimización de la enseñanza que implica principalmente:

a) cada lección debe apuntar al máximo de adquisición (el rendimiento) compatible con las capacidades de aprendizaje de los alumnos;

b) el aprendizaje de un concepto debe entonces hacerse bajo una forma que utilice lo mejor posible los conocimientos anteriores y que los modifique lo menos posible;

c) debe exigir el mínimo de tiempo y debe rentabilizarse por un uso posterior bastante frecuente en aplicaciones de interés práctico.

La lección de introducción que hemos relatado minuciosamente no parece satisfacer la condición (a) pero es porque en el fondo, la mayor parte de los hechos están enunciados allí solo para justificar el empleo cotidiano posterior y no para ser aprendidos inmediatamente.

2.3.4. Otros métodos

Otros métodos que tienen por objeto la búsqueda de una mejor motivación en los alumnos, conducen a una reorganización más o menos profunda del aprendizaje. Sin embargo, salvo accidentalmente, esas motivaciones están principalmente centradas sobre el medio (escuela moderna de Freinet), o sobre los centros de interés para el niño (Decroly) o aún puramente arbitrarias, son de orden exógeno en relación con el conocimiento y no le son pertinentes.

El orden de las adquisiciones parece susceptible de ser totalmente conmocionado en relación a los que hemos expuesto y que los otros métodos medianamente respetan.

Pero en realidad, la ruptura del orden de las adquisiciones y la elección de situaciones familiares y estimulantes casi no afectan las adquisiciones mismas ni su significación.

En efecto, cuando se plantea un problema nuevo al alumno:

- o bien el contexto le permite la construcción de una solución sin que tenga que utilizar la referencia a una adquisición anterior;
- o bien, después del fracaso y de la consulta a los adultos, parece ser que existe una técnica de resolución.

En el primer caso, la enseñanza debe instaurar, sin motivación, un proceso de identificación de la cuestión que ha sido planteada, de lo que ha sido descubierto y de lo que debe organizarse a destiempo en un saber a re aplicar y en consecuencia a aprender. En el segundo, la técnica debe ser aprendida y hay que preocuparse por reconocer las condiciones en las cuales se podrá reutilizar.

En los dos casos, los conocimientos, los saberes, los usos y las justificaciones son los de la concepción dominante.

Por otra parte, pasado el momento del descubrimiento que concentra la atención de los utilizadores de estos métodos (quizás porque implica más directamente al maestro), el aprendizaje continúa por un esfuerzo solitario y empírico del alumno que debe responder a fichas "auto-correctivas", en una concepción próxima a la enseñanza programada (fichero E.C.L.)[10].

El problema principal de la didáctica consistirá en encontrar situaciones realmente específicas para las diferentes concepciones de los decimales y en organizar a la vez esas situaciones y esas concepciones para hacer posible una génesis artificial de los saber-hacer, de los saber-decir y de los saberes.

2.4. El aprendizaje de los "mecanismos" y del "sentido"

2.4.1. La separación de esos aprendizajes y su causa

[10] *NdE: Fichier ECL du cours moyen,* Editions de l'Ecole Moderne, concebido según los principios de la pedagogía Freinet.

El corto análisis que precede pone en evidencia la concepción que prevalece en esta época del aprendizaje de los saber-hacer, y principalmente de los algoritmos en la construcción del conocimiento, concepción que juega un papel en la creación y el funcionamiento de las representaciones de los decimales.

Este aprendizaje está concebido en dos partes que se pueden visualizar separadamente:

- el aprendizaje del algoritmo que los maestros llaman "mecanismo" de la operación, y
- el del "sentido" de ese mecanismo, es decir el conocimiento de las ocasiones de "aplicación":
  - el primero da cuenta de técnicas de aprendizaje clásico, y en el límite, del condicionamiento;
  - el otro solo puede aprenderse a través de la repetición de los ejemplos y de las aplicaciones en problemas, gracias a misteriosas transferencias que "el alumno efectúa, si y solo si tiene suficiente inteligencia".

Ciertas obras intentan orientar la enseñanza del sentido a la de un mecanismo a través de hábiles clasificaciones de situaciones (para la división, por ejemplo: búsqueda del número de partes, búsqueda del valor de una parte), o a través de la identificación de secuencias especiales (la regla de tres), inclusive a través de la búsqueda de índices lingüísticos de la operación a efectuar ("falta", "queda", "se quita"... para reconocer la sustracción).

Estas tentativas conducen a rechazar ciertos problemas, ciertas formulaciones, y en consecuencia contribuyen a modelar la concepción dominante.

Esta separación entre lo que puede ser enseñado formalmente para ser aplicado "mecánicamente" y lo que no puede enseñarse así -entre la forma y el "sentido"- juega un papel fundamental en la enseñanza. A primera vista se ve que es el resultado extremo de la negociación didáctica estudiada por M. Verret (1975) a través de la cual el saber enseñado se constituye en una transposición didáctica del saber practicado.

En efecto, esta negociación didáctica lleva a distinguir, en lo que ha sido naturalmente vivido por el alumno como una respuesta normal a situaciones intencionales, lo que es objeto de conocimiento de lo que no lo es, lo que era un "problema" de lo que era una duda estúpida, lo que era una adaptación banal de lo que era un aprendizaje, lo que debe ser aprendido de lo que puede ser olvidado. Abordaremos más adelante el estudio teórico de este importante fenómeno pero podemos observar de inmediato el funcionamiento en este caso preciso[11].

2.4.2. Los algoritmos

Un algoritmo es una serie finita de instrucciones ejecutables que permiten obtener, sobre una clase dada de problemas, un resultado definido. En el momento de su empleo es un procedimiento de decisión, pero el hecho importante reside en que el algoritmo puede ser determinado previamente, la ejecución de la n-ésima instrucción no depende de ninguna circunstancia no prevista en la (n-1)-ésima, de ningún nuevo aporte de información, de ninguna decisión nueva, de ninguna interpretación, y entonces de ningún sentido que se le deba atribuir. Es por esto que la ejecución de un algoritmo puede alcanzar una gran fiabilidad y una gran velocidad de ejecución.

La determinación de un algoritmo permite jerarquizar las tareas complejas en las cuales aparece y permite razonar sobre ellas. Un gran número de actividades y de equilibrios pueden ser descriptos como algoritmos y parecen pues dar cuenta de una ejecución mecánica o un "automatismo" según una expresión errónea pero bastante común entre los maestros.

La enseñanza de los algoritmos

Muy útiles y expandidos en las ciencias y las técnicas (tanto más cuanto más complejos), son

---

[11] NdE: se refiere a las nociones de “contrato didáctico” y “medio”, desarrolladas en Brousseau (1988a) y Brousseau (1990).

atractivos para el profesor porque:

- pueden ser aprendidos ya sea directamente en la forma en que serán utilizados, o por una complejización natural (inserción de sub-algoritmos);
- pueden ser enseñados sin recurrir al sentido, que por otra parte tienen la misión de rechazar, en consecuencia pueden ser enseñados por métodos formales: aplicación repetida, recitado, ...
- su adquisición puede ser controlada;
- la no adquisición permite decisiones didácticas simples, en un contrato claro, donde la responsabilidad del alumno puede ser comprometida a priori;
- su utilidad puede ser probada ya que su ejecución es identificable en sus aplicaciones;
- aseguran después el aprendizaje, en la realización de las tareas, en las fases de buena fiabilidad, de gran rapidez y confianza.

Juegan además un gran papel en la justificación de los modelos de aprendizaje por condicionamiento a los cuales los maestros se refieren implícita o explícitamente.

En realidad, el uso de un algoritmo es, en relación a la actividad mental, como la parte visible de un iceberg. En numerosos casos que sirven de referencia metafórica a las teorías pedagógicas que los preconizan, los algoritmos se adquieren por un proceso completamente diferente al de los aprendizajes formales: son el resultado de una adaptación de los sujetos, progresiva o por saltos, pero donde el sentido y las características de las situaciones juegan un papel muy importante. En cierto modo, aprender separadamente los algoritmos de cálculo y sus condiciones de empleo es una actividad comparable a la que consistiría en aprender citas y la ocasión de decirlas. Es concebible en literatura académica, pero no permite aprender una lengua.

Este método conduce a volver inútiles -no funcionales- las explicaciones y la comprensión, en el sentido en que, en caso de error o incertidumbre esas explicaciones no sirven jamás para rectificar el algoritmo. Solamente pueden servir como ayudas nemotécnicas, es decir arbitrarias en relación al contenido. Es así que las motivaciones para ejecutar una tarea pueden volverse no pertinentes, y en consecuencia plegarse a exigencias más pedagógicas.

Se los ve entonces desaparecer en ciertas obras (Bodard, ya citado), o jugar un papel secundario, de modo tal que la explicación se convierte a su vez en un nuevo conocimiento yuxtapuesto a los otros. Y si solo los mejores pueden aprenderla, es una muestra de que no es indispensable. Debe en consecuencia considerarse como otro saber, independiente del saber-hacer..., un lujo superfluo en primera instancia.

Así, las preocupaciones pedagógicas de los años sesenta no tomaban en cuenta el contenido en la concepción de las situaciones de enseñanza e incluso tendían a rechazarlo en tanto que saber organizado para retener solamente el conocimiento de los hechos y algoritmos[12].

Como conclusión de este estudio se puede admitir que el método que hemos presentado es bien típico de los utilizados en los años 60. Haremos aquí la economía de toda verificación tanto histórica, a través del análisis de manuales, como experimental, a través del análisis de los resultados de los alumnos de las clases que hayan conservado (y son muchas) esos métodos: de hecho esos métodos, obtenidos por efecto de "variables pedagógicas" no son naturalmente exclusivos -cada obra, cada maestro los conjuga según fórmulas que cambian de una lección a otra.

Solo la uniformidad de los resultados y su poca dispersión pueden dar testimonio de la exactitud de nuestra declaración inicial: las variables pedagógicas anteriormente evocadas tienen poco efecto sobre la concepción que tienen los alumnos de un concepto como el de los decimales. Haremos esas observaciones después de haber examinado la reforma de los años 70.

---

12 Esta tendencia ha sido además constatada experimentalmente por E. Filloy en una investigación sobre la enseñanza de la numeración donde mostró que los maestros no preveían los resultados de sus alumnos y solo los hacían progresar en los objetivos de bajo nivel taxonómico. *NdE:* véase por ejemplo Filloy et al (1979).

3. LA ENSEÑANZA DE LOS DECIMALES EN LOS AÑOS 70

Las reformas de los años 70, en Francia particularmente, se inscriben en una especie de reacción contra el estado de cosas que acabamos de describir, pero para expresarse o justificarse, deben apoyarse sobre ciertas concepciones anteriores. La enseñanza de los decimales no está en el centro de la lucha a la que se lanzan los innovadores y a veces sus adversarios, pero es tanto o más interesante examinar sobre los decimales la marca de las ideas nuevas -de las cuales no haremos aquí el inventario.

3.1. Descripción de un currículum

Examinemos los ejercicios propuestos en el "Journal de mathématiques" de N. Picard[13], algunos de los cuales son comentados en "Agir pour abstraire" de la misma autora[14].

3.1.1. Lección de introducción

El alumno mide superficies limitadas por las líneas de una red contando los polígonos. La unidad de superficie es el nombre dado a ese polígono ("La unidad de área es un triangulito" med. 3)[15]. Se le hace entonces reemplazar ese conteo por un recubrimiento de las figuras con "piezas" de un sistema inspirado en los multibases de Dienes: A cubre un polígono, B cubre 2; C $\rightarrow 2^2$; D $\rightarrow 2^3$; E $\rightarrow 2^4$; F $\rightarrow 2^5$; G $\rightarrow 2^6$. Después de cambiar para tener el mínimo de piezas de cada clase, el resultado se transcribe en una tabla donde la superficie -un natural- está escrita en base dos. El alumno es invitado entonces a dibujar una superficie M de área 11011 "cuando A es la unidad", después a medir esta área tomando E "como unidad". La unidad se convirtió en una de las piezas y por el juego de los cambios, en la clase de equivalencia de las figuras de la misma área y del mismo tipo (estos términos y estas observaciones no figuran en el texto). Para indicar que en esta operación material cambió la unidad, el alumno debe poner en la tabla una marca sobre el nombre de la pieza elegida y una coma después del número de piezas.

Después de los cambios, se obtiene la misma tabla que en el enunciado -con el agregado de la coma y la marca. Los cambios de unidad se hacen en el interior de un mismo sistema. Por ejemplo, no se reemplaza una red de cuadrados por otra de hexágonos.

3.1.2. Otras bases. Descomposición

El mismo tipo de trabajo está hecho en base 3 y después en base 10. Los ejercicios recuerdan que para multiplicar un número por la base, es suficiente correr las cifras un rango hacia la izquierda.

En un diálogo muy mayéutico aparece, en el informe de la actividad del maestro que acompaña esos ejercicios (Agir pour abstraire, p. 215), que los niños han sido conducidos a transcribir la siguiente tabla:

G	F	E	D	C	B
1	1	0	0	1	1

en la igualdad: S = 2f + 1f + f/8 + f/16

Los comentarios de N. Picard sobre la situación son insuficientes para conocer la significación exacta de este comportamiento. f/8 y f/16 han sido "encontrados espontáneamente". Pero es la primera vez

---

[13] (1972), CM1, fascículo II y CM2.

[14] La Señora N. Picard contribuyó a difundir en Francia las propuestas de Z. Dienes de quien tomó numerosas ideas. Encargada de investigaciones en el INRDP, representó para los maestros, del 66 al 70, las tendencias de las reformas deseadas.

15 “Med. i” es la referencia al registro de las fichas utilizadas por el autor.

que aparece una escritura así descompuesta. El maestro da un ejemplo diciendo: "Escribamos en matemática lo que él dijo". Inmediatamente las "f" pueden desaparecer:

S = 2 + 1 + 1/8 + 1/16.

El autor señala sin embargo que la escritura con coma es comprendida solo cuando los niños ubican el número en una tabla. Los ejercicios se hacen en diferentes bases pero los alumnos no efectúan cambios de base: no reescriben un área dada en base dos, en base tres.

3.1.3. Las operaciones

Las operaciones de adición y multiplicación por un natural en los números con coma (base 2) se estudian en el mismo tipo de situaciones (medida de áreas con la ayuda de piezas), y luego, después de los cambios, cuentan directamente en la base de numeración.

3.1.4. El orden

El estudio del orden en los números con coma utiliza una representación distinta: se trata de "numerar" los libros de una biblioteca. Los libros son designados por letras A, B, C,... pero por razones que no son evocadas, la bibliotecaria asigna, a cada nuevo libro, un lugar determinado entre otros dos ya ubicados. Por ejemplo F entre B y C: "Se trata de encontrar un código para F", sabiendo que dicho código:

1) debe indicar la posición con respecto a los libros ya ubicados,

2) no cambia cuando se ubican nuevos libros, guardando la propiedad 1).

Esta "numeración" seguramente no permite contar los libros ubicados.

En realidad, el problema no está planteado, la solución está dada inmediatamente, ("He aquí una manera") no bajo la forma de un método práctico que engendraría solamente algunos códigos, (los que corresponden a introducciones al azar) sino bajo la de un algoritmo generador de la graduación entera, es decir de todos los códigos que tienen una cifra después de la coma, después dos cifras, ... conforme al modelo evocado anteriormente en la sección 2.2.4.

3.1.5. Los operadores. Los problemas

Inmediatamente después, viene la preparación clásica para el producto de dos decimales sin indicación de la unidad. El autor introduce una numeración del rango de las cifras con ayuda de los enteros (**Z**) ...3, 2, 1, 0, 1^-, 2^-,... La multiplicación por 10, 100, 1000 consiste en desplazar las cifras en la tabla uno, dos, tres, rangos hacia la izquierda. La operación está justificada por el cambio de piezas -el modelo permanece necesario- de un rango por la de un rango inmediatamente superior.

La división (¿De qué? ¿De los números, de los números-medida,... de las unidades!?) consiste en el algoritmo inverso:

123,35 = 12335 : 100

Entonces, el producto de dos decimales -del cual no se sabe en qué oportunidad se puede emplear- es interpretado en términos "de operadores":

123,35 x 4,3 = [$\underline{12335}$: 100] x [43 : 10] [16]
= [$\underline{12335}$] ((:100) . (x43) . (:10))...etc
= [$\underline{12335}$] ((x43) . (:100) . (:10))

Traducimos aquí por números entre corchetes los números que expresan medidas y entre paréntesis los que están asociados a "operadores", representados en el texto por flechas. (El punto representa la "composición" de esas flechas y hemos distinguido aquí tres "productos": la operación interna x, la operación externa [] () y la composición de aplicaciones que se confunden en el texto). Esta

[16] Para [|12335| (: 100)] x [|43| (: 10)].

interpretación de [43] "número concreto" en el operador (x 43) fue preparada en los naturales por numerosos ejercicios en lo que el autor llama "las máquinas". No se propone ninguna situación problema donde la multiplicación de dos decimales podría tomar sentido.

La división se expone según el antiguo esquema: se hace la observación que vale para la división euclidiana y en los naturales:

$a : b = ka : kb = \frac{a}{\ } : \frac{b}{\ }$ (si h divide a y b)

La propiedad se extiende a los decimales.

Salvo esas lecciones de introducción y de estudio a las cuales son consagradas 32 fichas sobre 131 en CM1 y 58 sobre 149 en CM2, no se hace ninguna otra alusión a los decimales (ni aplicaciones ni uso) a excepción del estudio sobre encuadramiento de un área (Med. 44 a 51).

3.1.6. Aproximación

En un primer ejercicio los alumnos pueden constatar que el encuadramiento del área de una superficie conexa, pero no compuesta de una yuxtaposición de átomos, depende de la posición de la cuadrícula utilizada para el conteo que sustituye ahora a las piezas. ¿Pero existe el área en ese caso?

Luego calculan el área de la superficie limitada por las líneas de la cuadrícula, primero con una unidad, luego con otra seis veces más pequeña. La subdivisión de la unidad está sugerida pero las dos cuadrículas se presentan al mismo tiempo y la situación no difiere formalmente de las precedentes (conteo con agrupamientos).

En los ejercicios siguientes (Med. 50 y 51), el encuadramiento del área (?) de una superficie con la ayuda de cuadrículas más finas supone perseguir la precisión.

Esta representación exige algunos comentarios.

3.2. Análisis de ese currículum

3.2.1. Las áreas

La introducción es acorde a las concepciones anteriores, pero el recurso a las superficies es hábil porque vuelve más claras las diferencias entre los diversos objetos de una misma clase, a la cual la medida atribuye el mismo valor. Sin embargo el uso del material y la regla de los cambios encubren un ejercicio inútil de numeración que refuerza el aspecto de conteo impuesto por la restricción a ciertas figuras, un sacrificio a la ideología de la manipulación.

3.2.2. La coma

La coma y la marca no aportan ninguna información cuando el número está escrito en la tabla, situación permanente en la primera parte del trabajo. La escritura "matemática" descompuesta en la forma de un polinomio, hubiera podido verdaderamente servir de base a un estudio correcto del decimal. Pero ese episodio parece bastante fortuito y sin futuro, el autor parece estar interesado solamente en la transcripción.

3.2.3 El orden

El estudio del orden de los decimales es realmente una innovación que respondía, ya lo hemos visto, a una insuficiencia de los métodos anteriores. ¿Pero, cómo los razonamientos efectuados o las propiedades enunciadas a propósito de la enumeración involucran a los decimales-medidas ya introducidos? O si son "números" nuevos, ¿cómo concebir la suma, por ejemplo?

3.2.4. Identificación y evaporación

Estos entes solo tienen en común con los otros la manera en que se los escribe. Sus representaciones son distintas, aisladas y cohabitan sin relación -salvo la relación formal. Para razonar sobre el orden de los "números con coma" - medida, hay que recordar el algoritmo del ordenamiento de los libros. Ninguna actividad permite englobar las dos representaciones precedentes en una nueva (se hubiese podido, por ejemplo, definir una distancia entre los sistemas de referencia y luego una medida de esos "segmentos").

Sin embargo, es a partir de esas lecciones que el decimal pierde toda referencia a una unidad dada. La coma conserva no obstante un sentido cuando se trata de comparar o sumar números decimales: indica la cifra de la unidad utilizada para cada uno, que se supone es la *misma*, aún si se ignora cuál es (esta explicación ni se pide ni se da a los alumnos).

Cuando los números propuestos no tienen nada que ver entre ellos, y no hay ninguna razón para suponer que es la misma unidad la que ha sido utilizada, la desaparición sin advertencia de la indicación de la unidad, hace que en el momento en que la coma podría llevar efectiva y útilmente la información convenida, lleva otra, que no se sabe cuál es.

Ahora bien, la identificación entre el decimal-medida y el decimal operador no fue construida. Por el contrario, la insistencia sobre su diferencia de status, reforzada por el uso de los diagramas, no la facilita. Además, solamente se hace de un modo totalmente formal. Cada concepción hereda propiedades y reglas establecidas en el otro sistema por la magia de la identidad de la escritura. Es por eso que era necesario utilizar el decimal -ni medida, ni operador- como puente formal: toda representación en un ejemplo concreto, no solamente no aportaría ninguna prueba de la legitimidad de la herencia, sino que aún obstaculizaría su funcionamiento (en broma hemos llamado a ese proceso "la evaporación de la unidad").

Esta identificación es uno de los problemas fundamentales de la creación del sentido de los decimales. Ha sido totalmente descuidada en los estudios sobre la enseñanza. La estudiaremos en el caso de los racionales donde se parece mucho más a la identificación de un espacio vectorial con su dual.

3.2.5. Producto

Para la noción de producto, tampoco hay nada nuevo, pero aparece claramente que la comprensión -sin hablar de la significación- del cálculo del producto reposa sobre la capacidad para identificar un número "concreto" [43 : 100] con un operador (x43).(:100).

3.2.6. Conclusión

El decimal se introduce siempre para representar una medida realizada con una unidad bastante pequeña y expresada con la ayuda de un múltiplo.

Ese decimal es siempre un natural "concreto". En cambio, el sistema métrico ha sido rechazado como significado principal del decimal. Su estudio ocupa un lugar excesivamente modesto (un ejercicio de presentación para cada magnitud: longitudes, superficies, volúmenes, masas). Los algoritmos de cálculo son presentados de forma clásica aún si la justificación del cálculo juega un papel mucho más importante y se apoya en un formalismo bastante pesado (no matemático pero que es objeto de un aprendizaje prolongado: las máquinas).

Así, los caracteres señalados como típicos de los métodos de los años 60 son, en su mayoría, conservados en esas obras presentadas como muy innovadoras.

3.3. Estudio de un currículum típico de los años 70

El manual más conocido después de la reforma de los años 70 fue probablemente el de la Sra. Touyarot (*Itinéraire mathématique*, Paris, Editions Fernand Nathan, 1976).

3.3.1. Las elecciones

Las elecciones sobre las cuestiones que nos interesan, son las mismas: introducción como medida de cardinales finitos con cambios de unidades; luego "evaporación" de la indicación de la unidad, lo que permite en la comparación de dos naturales y en la de dos decimales tener dos algoritmos diferentes -dados sin justificación- para ordenar en el mismo orden números que son siempre considerados como naturales.

3.3.2 Propiedades de las operaciones

Mientras que las propiedades de las operaciones en los naturales están basadas explícitamente en el examen de una representación (las operaciones conjuntistas, pero los términos "unión" e "intersección" no se pronuncian), las de las operaciones en decimales se toman simplemente de las precedentes, certificando que con esta representación, no hay más problemas, ni debate, ni siquiera novedad. El decimal no existe más como ente matemático sino solamente como transcripción de un ente ya conocido.

3.3.3. Producto

Para el producto de dos decimales, el alumno es invitado a constatar que "un paquete de azúcar contiene 168 cubitos de azúcar, en consecuencia 1,68 centenas de cubitos; 28 paquetes de azúcar contienen 1,68 x 28 centenas de cubitos". Además, esos "2,8 decenas de paquetes de azúcar contienen 16,8 x 2,8 centenas de cubitos de azúcar porque una decena de paquetes de azúcar contiene 16,8 centenas de cubitos. Entonces: (evaporación) 16,8 x 2,8 = 1,68 x 28

3.3.4. Operadores

Mucho más tarde, el decimal que opera en los naturales y luego en los decimales está definido como una aplicación: (x 2,5), lo que permite presentar los datos de problemas relativos a la regla de tres.

3.3.5. Las fracciones

Están definidas a continuación, como operador reducido de una cadena de operadores presentada sin referencia a una situación-problema cualquiera. Las fracciones "se utilizarán" más adelante.

La obra vuelve entonces sobre la noción de decimal para mostrar que una fracción (operador) puede a veces, por descomposición y recomposición, ser "igual" a un operador decimal. Curiosamente en esta obra, donde sin embargo figuran muy pocos ejercicios en bases no decimales, la expresión "número con coma" sustituye muy frecuentemente a la palabra "decimal" y sin razón aparente.

Por ejemplo para "establecer" que $\frac{21}{28} = \frac{75}{100}$ se procede por una penosa demostración, ilustrada con un nuevo tipo de diagrama en el cual las convenciones no han sido estudiadas:

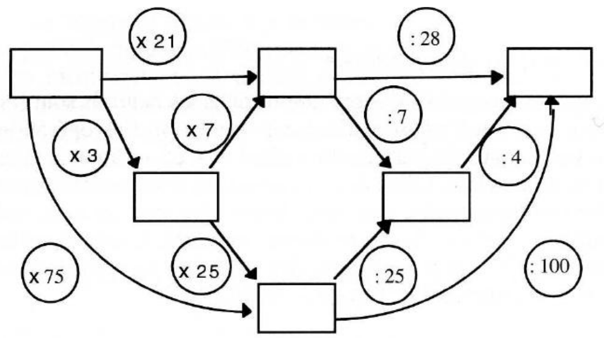

FIGURA 1

Pero no se sabe de dónde sale que $\frac{75}{100}$ = 0,75 [17], ni por qué para obtener el mismo "resultado" es suficiente con dividir 21 por 28 escribiendo a la derecha del dividendo tantos ceros como sea necesario para obtener finalmente resto nulo. (En esta ocasión, el discurso se adorna con incógnitas: x, y, z por primera vez en el curso). Se encuentra solamente un ejercicio de aproximación para explicar y tomar en cuenta el caso donde la división "no se termina" ($\frac{10}{11}$).

3.3.6. Conclusión

Esta obra ecléctica conserva la trama antigua y la ilustra con todos los aportes nuevos de la época. Los problemas son numerosos y muy variados. El enseñante no sabe cuáles elegir y no ve bien cómo la solución de uno facilitará al alumno la resolución de otro. Esto quiere decir que no reconoce allí los contenidos del aprendizaje a los cuales está habituado. El vocabulario es también el resultado de una negociación de circunstancias: algunos términos nuevos, ligados a objetos antiguos. Pero basta que un obstáculo se presente como en la demostración del párrafo precedente y el lenguaje matemático reaparece con todo el arsenal de las innovaciones didácticas de esa época. Es testimonio claro de una negociación difícil de la cual vamos a examinar las condiciones.

3.4. Las ideas pedagógicas de la reforma

3.4.1. La reforma concierne a los contenidos

Contrariamente a los movimientos pedagógicos anteriores, la reforma de los años 70 apuntaba principalmente a modificar el contenido, la formulación, la organización y el orden de introducción de los conocimientos matemáticos enseñados. Si bien estaba acompañada a menudo de posicionamientos pedagógicos, ninguno le era específico. Habiendo constatado que salvo algunos complementos y cambios de vocabulario, la concepción de la enseñanza de los decimales no había cambiado fundamentalmente, se estaría tentado a inferir que las dificultades de los alumnos deberían ser las mismas.

Ahora bien, vamos a ver que la modificación de los contenidos condujo a la modificación de la concepción del aprendizaje, a la reorganización de las actividades de los alumnos y a la de la enseñanza de la matemática.

Esta reforma pretendió ante todo ser la reforma de los contenidos:

- los conocimientos matemáticos habían sido reorganizados y unificados,

---

[17] (x $\frac{75}{100}$) = (x75) . (:100) = 75 : 100, volvemos a tener el mismo obstáculo.

- en consecuencia, el vocabulario había cambiado, había nuevas exigencias en cuanto al rigor, el campo de aplicación de las matemáticas se había ampliado en parte gracias a la fecundidad de esta reorganización;

- la unificación debía permitir una mayor eficacia de la enseñanza, permitiendo aprender a aprender más que aprender para resolver.

Es por ello que fue solicitada, promovida y animada por los matemáticos. Pero la concepción misma de esta unificación llevaba en ella hipótesis sobre el funcionamiento de la matemática en tanto que "teoría de las estructuras"[18]. Estas, separables del contenido "pueden ser concebidas independientemente de la naturaleza de los conjuntos de base"[19].

Así, ya que las matemáticas son un medio de fabricar el conocimiento, aprender matemática es, aprender a aprender. Para muchos, las nuevas matemáticas están entonces organizadas como un *lenguaje* formal cuya *semántica* es la teoría de las estructuras en la cual se puede exhibir la síntesis y que se aplica en diferentes dominios sufriendo adaptaciones que dan cuenta de la *pragmática* (concepción estructuralista). Esta concepción permitía esperar aprendizajes aislados contrariamente a lo que permitían pensar los trabajos de Piaget.

3.4.2. La enseñanza de las estructuras

Si se quiere aceptar el desafío de organizar la adquisición por parte de los niños de estas matemáticas, es necesario decir cómo pueden apropiarse de entrada de esas estructuras. En efecto, la economía del proyecto estructuralista consiste en rechazar la inscripción del sentido de las estructuras en una historia del sujeto en interacción con situaciones excesivamente ricas o numerosas donde estas estructuras quedarían enganchadas y tomarían significaciones y limitaciones demasiado particulares. Además, las ideas pedagógicas de la época conducen a rechazar un estudio escolástico del discurso matemático.

Este problema recibió varias tentativas de respuesta. Consideraremos solo la propuesta de Dienes porque la tomamos como la más representativa y la más explícita. Señalaremos sin embargo una manera frecuentemente observada de disimular la cuestión. La propuesta consistía en:

- imaginar, sobre la base de los trabajos de Piaget, que justamente la epistemología genética mostraba la aparición no de conocimientos elementales sino de estructuras enteras y esto, en una génesis que procedía de lo general a lo particular;

- concluir, con una referencia dudosa sobre las ideas de Rogers, que la actividad de los sujetos y su desarrollo natural conducían a las apropiaciones fundamentales visualizadas, siempre que no se obstaculizara con una didáctica normativa intempestiva. Esta posición no suministraba prácticas didácticas "comunicables" pero justificaba muchas experiencias "pedagógicas salvajes"[20] que pretendían rechazar los "métodos tradicionales".

En cambio, Dienes propone explícitamente una solución que ilustra con numerosas lecciones y materiales nuevos[21].

El proceso que Dienes llama "psicodinámico" se desarrolla generalmente en seis etapas:

---

[18] Cf. “Remarques sur les mathématiques et la réalité” de Lichnerowicz 1967. (En: *Logique et connaissance scientifique*, pp. 474-485/spéc. 477. Encyclopédie de la Pléiade, Paris, NRF, 1969.

[19] Notemos además que en ese artículo, el autor insiste, a través de dos ejemplos, sobre la importancia para una ciencia nueva de ubicarse en el dominio propiamente matemático de la deducción total, posición en ruptura con el método inductivo, la abstracción extensiva y la acumulación de hechos experimentales que predominan en las ciencias aún jóvenes. Concluye: “Nuestros modos de conocimiento son matemáticos, a ellos están indisolublemente ligados nuestros poderes” (Lichnerowicz *op. cit*.), lo que a la vez justifica socialmente el proyecto de la reforma y le da su fundamento psicológico y científico.

[20] Según la terminología del INRDP.

[21] Maudet, C.: *Étude et critique du processus psycho-dynamique selon Diénès*, Mémoire de DEA, Université de Bordeaux, 1979.

- etapa lúdica;
- juego estructurado;
- juegos isomorfos y abstracción;
- esquematización y formulación;
- simbolización y formalización;
- axiomatización.

pero se acompaña con fenómenos, como por ejemplo el de la generalización.

3.4.3. El proceso psicodinámico de Dienes

La interpretación que daremos a este proceso no se ajusta exactamente a los escritos del autor, sino que es una tentativa de aproximación a la interpretación que los enseñantes han podido darle en el contexto de las ideas de la época. Corresponde en todo caso, a lo que he podido observar en la mayoría de los ejercicios y de las situaciones de enseñanza que se refieren a ese proceso.

Juego estructurado

Un juego estructurado es un juego en el cual el niño actúa según reglas que le son dadas, ya sea formalmente, o por el contexto. La mayoría de las veces esas reglas son las de la estructura a descubrir.

El caso típico es el de los grupos. El didacta elige una realización en un grupo, por ejemplo el grupo de Klein como grupo de transformación de un cierto conjunto (por ejemplo cuatro posiciones de una muñeca que da volteretas, gira y rueda). El maestro presenta este conjunto, invita al alumno a efectuar las transformaciones, a buscarlas todas, a encontrar la transformación que aplicada a ésta da tal resultado, aquélla por la cual se puede reemplazar a esta otra, etc. Esas actividades están directamente calcadas de las actividades matemáticas y corresponden a soluciones de ecuaciones, a búsquedas de propiedades, etc.

La palabra "juego" es utilizada en el sentido en que se la utilizaba en esa época en pedagogía. Significa que la situación es poco habitual, desprovista de obligaciones de aprendizaje, de exigencias escolares, que allí se pueden tomar libertades, que pone en marcha la imaginación, que se pueden hacer descubrimientos y decirlos. Por más que el alumno esté frente al problema de alcanzar un objetivo en el marco de reglas que le son dadas, la situación didáctica no está organizada generalmente como un juego común, ni de modo que el jugador tenga varias oportunidades de intentar las diversas estrategias que podría poner en competencia. El término "juegos" recubre entonces aquí tanto situaciones auténticamente abiertas como ejercicios muy banales de imitación y de reproducción de tareas. La situación matemática es un *marco* en el cual se insertan actividades y no un medio intelectual que impulsa la elección de una estrategia óptima en una situación problema de utilidad familiar.

En esas condiciones, las motivaciones son aún exógenas y no consideran al contenido como solución a una situación reconocida como interesante.

Juegos isomorfos

En la etapa de los juegos isomorfos, el maestro propone sucesivamente a sus alumnos varios juegos que cumplen la misma estructura. Los alumnos deben reconocer por sí mismos, en esos juegos, las correspondencias de objeto a objeto, de relación a relación, que le han permitido transportar comportamientos, propiedades y métodos de una a otra de esas situaciones problema. A los ojos del didacta, esas transferencias son consideradas como la prueba de que el alumno ha podido establecer entre las ejecuciones, una relación que constituye la aprehensión aún implícita del isomorfismo, módulo la estructura elegida, y de la cual se tomará conciencia en la fase siguiente.

Abstracción

La abstracción consiste entonces en identificar, en tanto que objeto de conocimiento, la "estructura común" a diversos juegos isomorfos. La estructura es aquí el conjunto de las propiedades que, independientemente de las particularidades de cada ejemplo, los rigen a todos. El didacta debe entonces producir un conjunto de realizaciones que presentan una "variabilidad" conveniente para limitar la fineza de la estructura abstracta. La búsqueda de la estructura más fina debe ser erigida en regla permanente, las realizaciones que forman la semántica de la estructura según la definición de Carnap. Pero las razones de esta búsqueda, de la elección de los ejemplos, y del uso de esta estructura no son accesibles al alumno, de modo que pronto hay para él un contrato bastante claro: le falta reconocer lo que el profesor ha ocultado en los juegos, decodificar su intención didáctica según una regla uniforme que consiste en buscar las semejanzas y las diferencias. Es necesario destacar que esta etapa, contrariamente a las precedentes no exige ninguna decisión nueva por parte del enseñante, a menudo esta etapa no conlleva ninguna situación-problema específica: aparece como una respuesta dada, enteramente bajo la responsabilidad del alumno, a las etapas anteriores que son a la vez la condición necesaria y suficiente.

En mi opinión, es la existencia del contrato didáctico lo que asegura el funcionamiento del proceso, y no alguna ley de la génesis del conocimiento. La abstracción no es inevitable. De hecho los comerciantes no han abstraído jamás las estructuras de módulos que rigen sus permanentes intercambios porque no tenían motivación para hacerlo.

Esquematización y formulación

La esquematización y la formulación tienden al proceso de identificación y actualización de la estructura. Dienes no prevé situaciones generales específicas para esta etapa (¿Lo que se concibe bien se enunciaría claramente?) pero la representación por un grafo es a menudo considerada como una expresión simplificada pero natural y directa del pensamiento del niño. Por la práctica de la imitación se aprende, como se aprende un lenguaje, a representar los objetos por puntos y los operadores por flechas.

Simbolización

La simbolización es la transcripción en un nuevo lenguaje de las propiedades representadas en la etapa precedente.

Axiomatización

La axiomatización es la etapa de la reorganización del conocimiento adquirido, de la elección de las propiedades fundamentales, de situar las estructuras unas en relación con otras; siendo por supuesto esta posición, la que asigna el estado actual de los conocimientos matemáticos (que deben entonces identificarse, congelarse, en "matemática moderna" para devenir una referencia didáctica). Esta etapa se desarrolla también según la secuencia precedente: juegos libres, con reglas isomorfas, formalización,...

Así se pone de manifiesto la naturaleza de ese proceso psicodinámico. El conocimiento no está organizado como una respuesta adaptable, adecuada, económica y personal a situaciones problemas, sino que está dado totalmente armado por la cultura que asegura su validez y utilidad futura y solo deja al alumno la posibilidad de adherirse. El conocimiento está solamente un poco oculto según una ficción regular, convencional y simple. Lo que el alumno debe hacer para descubrirlo se supone que es el funcionamiento del conocimiento en todas las situaciones sean o no didácticas. El método de Dienes es un lenguaje de comunicación con los alumnos, un modo de codificación didáctica del conocimiento que se supone no modifica la naturaleza (según lo que afirma Bruner) y es un contrato didáctico con los alumnos para la decodificación de los mensajes. Ciertamente este método de exposición promete ser muy lento y conviene solo para ejemplos muy simples.

Generalización y particularización

Es por esto que este método es retomado por el proceso de generalización y su antagonista, la particularización: una vez conocidos los axiomas de una estructura, es posible abandonar algunos o retener otros y así admitir el debate constitutivo de la ciencia. Dienes da como ejemplo de ese proceso el esquema siguiente:

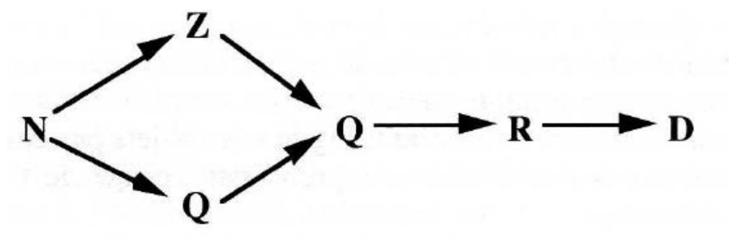

FIGURA 2

3.4.4. Proceso psicodinámico y práctica pedagógica

El contrato del cual hablamos anteriormente se apoya sobre una ficción epistemológica y psicológica muy difundida (en esa época) y retoma prácticas profesionales bien establecidas:

a) Los comportamientos de los alumnos se suponen esencialmente empíricos: sus relaciones repetidas con la "realidad" de las situaciones didácticas hacen surgir las estructuras que están incluidas en esas situaciones como la "gestalt" en la percepción. Ese proceso de abstracción se interpreta perfectamente en la teoría de las huellas de la memoria[22].

b) La aceptación del modelo empirista para dar cuenta del funcionamiento del alumno se apoya en una *posición tradicional* fundamentalmente realista y casi platónica de los enseñantes: la realidad tiene estructuras que el hombre descubre, el profesor es llevado a simular la naturaleza ocultando las estructuras que quiere enseñar, siendo el descubrimiento una lectura del mundo.

c) La técnica de los juegos isomorfos corresponde a la *práctica antigua* de la repetición de los problemas para enseñar la resolución (clasificándolos en tipos que es necesario reconocer). En este punto, el método nuevo puede así oponerse al antiguo y al mismo tiempo sustituirlo sin modificar sensiblemente las prácticas.

d) La posición antigua debía separar el aprendizaje del saber-hacer y éste, del sentido. La nueva posición permite esperar la reducción de los dos aprendizajes a uno solo, porque asegura al profesor que la significación de la estructura que es finalmente aprendida, y los algoritmos ligados a ella, no son más que el conjunto de las realizaciones que describe e, inversamente, la abstracción se produce inevitablemente por el proceso mismo que engendra la memorización. Pero de hecho la "estructura" va a sustituir los saber-hacer y el aprendizaje del sentido queda aún más descuidado. Incluso se asistirá a la desaparición de los problemas.

e) El estructuralismo triunfante de los años 70 asegura por su parte la utilidad y la fecundidad de estas adquisiciones.

f) La didáctica de Dienes satisface al mismo tiempo condiciones que anteriormente parecían contradictorias: para cada estructura la construcción precede al análisis y el maestro pretende proceder de lo concreto a lo abstracto, de la manipulación y de la acción a la reflexión, del juego al estudio y luego a la aplicación. Pero se puede comenzar por enseñar las estructuras más generales y luego las más simples para terminar en las más particulares y las más complejas.

g) La reformulación en lenguaje matemático (isomorfismo, aplicación,...) o lógico de los fenómenos psicológicos o didácticos, concuerda con el proyecto pan-matemático que expresaba anteriormente Lichnerowicz y también acuerda con un uso piagetiano. Dicha reformulación juega un gran rol en la emergencia de una primera "teoría" didáctica cuyo valor, según sus propios esquemas, no tiene necesidad de enraizarse en la experiencia más que por un reconocimiento, in situ, en el trabajo de

[22] *NdE*: Hull (1943)

enseñanza: la teoría es verdadera porque la enseñanza que esa teoría describe, avanza.

h) Un revés de esta concepción ha sido que liberó a los enseñantes de la responsabilidad de asegurar ciertas etapas, "garantizando" los resultados del método por leyes psicológicas. Por ejemplo, los problemas en el sentido clásico han desaparecido en tanto que prácticas y en tanto que objetivos: se trataba casi solamente de aplicaciones que, llegado el caso, debía hacerlas posibles la adquisición de las estructuras.

i) Por otra parte la posición de Dienes no era incompatible con la mayoría de las teorías pedagógicas que hemos evocado anteriormente. Además, Dienes ha tomado posiciones interesantes pero independientes de su teoría didáctica.

3.4.5. Influencia del proceso psicodinámico en la enseñanza de los decimales. Crítica.

Volvamos a la enseñanza de los decimales y retomemos, a la luz de estos datos, nuestro análisis de las modificaciones debidas a la reforma.

En lugar de la referencia al sistema métrico y a las prácticas ligadas a él, se ha preferido presentar diferentes bases, en principio la base 2 donde el número de unidades diferentes es más rápidamente creciente y las manipulaciones más simples. Se facilitan las condiciones de la reproducción de actividades de numeración pero ningún problema nuevo aparece y esas reificaciones no son más que repeticiones.

Además, los verdaderos problemas de la medida: el carácter no discreto, la búsqueda de una unidad y de un medio de comparación y de iteración, el encuadramiento, los errores, todos han sido borrados al principio y reenviados a una entrada posterior y solemne. Las actividades no se refieren más, ni a una utilidad práctica, ni a una justificación teórica explícita o construcción. Se revela al alumno que, después de hecha tal actividad, acaba de descubrir tal propiedad. La estructura, que un observador juzga presente en la situación-problema, se considera introducida en las adquisiciones del alumno por el hecho mismo de su éxito en la prueba, como si el laberinto en el cual se ha ubicado a una rata fuera conocido por ella desde el momento en que pudo salir una o dos veces.

Yo no creo que Dienes haya dicho o pensado así, pero nada en su "teoría" didáctica permite al profesor tomar en cuenta los comportamientos de los alumnos, explicarlos y preverlos cuando están "equivocados" y adaptar las situaciones de enseñanza. Por ejemplo, es la confianza en la providencia o en la premonición de los hombres o en la del enseñante, la que permite a los alumnos admitir que los decimales medida heredan ciertas propiedades de los decimales-orden. No se puede decir nada sobre la significación del éxito o del fracaso del alumno.

3.4.6. Concepciones y situaciones

No es éste el lugar para hacer una crítica sistemática de la obra tan interesante de Dienes pero hay que ver bien el obstáculo principal sobre el cual tropieza: el compromiso del conocimiento en la acción finalizada. Una "estructura matemática" toma su significación en el empleo que se hace de ella, en la función que juega, en la constitución de otras, y sobre todo en los problemas que permite resolver. Es a nivel del concepto que hay que considerarla. La analogía de función en un mismo problema no es evidentemente garantía de que existe un isomorfismo entre las estructuras que la presentan, pero sobretodo, la observación entre dos casos de un isomorfismo no es de ningún modo garantía de un funcionamiento análogo en dos situaciones.

El estructuralismo, instrumento fecundo para la investigación, deviene en la enseñanza, magia engañadora.

En realidad, los trabajos de Dienes, si bien han instalado el contenido en el centro del debate sobre la enseñanza, no conducen al didacta a cuestionar la matemática para buscar allí, más allá de las *estructuras*, los *conceptos* y más allá de los conceptos, eventualmente las *concepciones* que podrían forjarse en un sujeto en *situaciones* históricas o didácticas particulares. El análisis de esas concepciones, que será necesario que el alumno posea o evite, es inseparable del análisis de la familia de situaciones específicas donde esas concepciones adquieren su función y su utilidad. Ambos análisis son inevitables en toda empresa que pretendiera, a la vez, dar una teoría dotada con sus métodos de confrontación (probablemente también específicos) y de técnicas didácticas continuamente controlables por los enseñantes. Los trabajos de Dienes no conducen, estamos dispuestos a decir en consecuencia, a interrogar los *comportamientos* de los alumnos, no solo como respuesta a una solicitud didáctica sino especialmente como fuente de informaciones en cuestiones teóricas de didáctica.

Tal vez es por esto, después de dos largos estudios sobre prácticas de enseñanza, que se tiene la impresión de saber tan pocas cosas sobre los decimales, sobre las diversas condiciones de su génesis y aún de su empleo así como sobre los comportamientos probados o posibles de los alumnos en ese tema.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (1988a) Les different rôles du maître, *Bulletin de l'association mathématique du Québec*, 2/23, 14-24.

Brousseau, G. (1990) Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), 309-336.

Dienes, Z. (1970) *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématiques.* Paris: OCDL,.

Filloy et al (1979) *Experimentación en el área de Matemáticas del Quinto Grado de educación primaria*. México. Publicación de la Sección Matemática Educativa.

I.N.R.P.: Evaluation comparée de quatre types d'organisation à l'école élémentaire (FOUCAMBERT J. mars 1977-février 1979). Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Tome 1: Comportement des élèves, 1979.

Hull L. (1943) *Principles of behaviors*, New York: Appleton Century Crofts.

Izorche M. L.(1977) *Les réels en classe de seconde.* Mémoire de D.E.A. de Didactique des Mathématiques. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

Léonard F., Sackur-Grisvard C. (1981) Sur deux règles implicates utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'APMEP* 327, 47-60.

Léonard F., Sackur-Grisvard C. (1991) Connaissances locales et triple aproche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10 (2/3), 205-240.

Lichnerowicz A. (1969) "Les mathématiques et la réalité", in *Logique et connaissance scientifique*, p. 474-485. Bibliothèque de la Pléïde. Paris: Gallimard.

Maudet C. (1979) *Etude critique du processus psycho-dynamique selon Dienes.* Mémoire de D.E.A.de Didactique des Mathématiques. Bordeaux: Université de Bordeaux.

Piaget J. (1974) Introduction à l'épistémologie génétique, (2 volumes). Paris: PUF.

Piaget J. (1975) *L'équilibration des structures cognitives.* Paris: PUF.

Sackur-Grisvard C., Léonard F. (1983) Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux. *Bulletin de l'APMEP* 340, 450-459.

Verret, M. (1975) *Le temps des études* (2 volumes). Paris: Librairie Honoré Champion.