Introducción a la Teoria de Conexiones

Graciela Silvia Birman[123]

[1]NUCOMPA-Dto. de Matemática
[2]Fac. de Cs. Exactas -UNCPBA
[3]CONICET

Índice General

INTRODUCCION

Entre quienes se inician en el estudio de la Matemática es conocida la expresión:"derivar es una técnica , integrar es un arte ".

No puede negarse que tal afirmación se aproxima a la realidad en tanto y en cuanto sólo conozcamos una manera de derivar,y en consecuencia, de integrar.

El estudio de la Geometría Diferencial incorpora,casi automáticamente,el enunciado:

"Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇", y esta conexión es tan parecida a la derivada direccional de R^n,que la aceptamos sin dificultad ni cuestionamiento alguno.

Dar una conexión a una variedad es dar una manera de derivar en ella.

A lo largo de estas notas intentaremos ver que significan los conceptos involucrados en esa afirmación.

El material aquí presentado es el resultado de diversos cursosdictados sobre este tema en los cuales se han citado textos como [1], [2],[4], y han sido recopilados con la intención de dar al lector una síntesis del camino introductorio al estudio de la Teoría de Conexiones.

En lo que sigue supondremos que el lector tiene conocimientos básicos de Teoría de Grupos, Topología y Geometría Diferencial.

No obstante, daremos algunas definiciones básicas con la intención de ser consistentes y unificar notación.

Capítulo 1

Variedades diferenciales

1.1 Variedades en R^n

Una superficie $S \subset R^3$ se llama regular si para cada punto $p \in S$, existe un entorno V de ese punto en R^3 y una aplicación f , definida en un abierto U,tal que satisface :

$$f : U \subset R^2 \to V \cap S \subset R^3$$

a) f es diferenciable
b) f es homeomorfismo
c) para cada $q \in U$, df_q es uno a uno (condición de regularidad).
A la función f se la llama parametrización y a $V \cap S$, entorno coordenado.

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Las funciones x, y, z son diferenciables en u, v.

Las curvas $f(u, v_0)$, $f(u_0, v)$, con u_0, v_0 constantes,se llaman curvas coordenadas. Por la condición de regularidad se tiene que por cada punto p de la superficie pasa un único plano tangente T_pS (notado también S_p), cuya base asociada a la parametrización f es $\{f_u, f_v\}$.

Dado v vector tangente a S en p, $\exists\ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$.

Estas breves líneas sobre superficies regulares tiene como objetivo ser introductorias al concepto de variedad diferenciable

Sea M un conjunto.

Definición 1.1.1 *Un n-par coordenado sobre M en un par (U, ϕ), formado por un subconjunto U de M y una aplicación ϕ uno a uno de U sobre un conjunto abierto de R^n.*

Un n-par coordenado (U, ϕ) está C^r-relacionado con otro par (V, θ) si las aplicaciones $\phi \circ \theta^{-1}$ y $\theta \circ \phi^{-1}$ son C^r en todo lugar donde estén definidas.

Definición 1.1.2 *Un C^r n-subatlas sobre M es una colección de n-pares coordenados (U_h, ϕ_h), cada uno de los cuales está C^r relacionados con otro miembro de la colección y $\bigcup\limits_h U_h = M$.*

Una tal colección maximal Λ se llama un C^r-atlas. Sean M y M' dos variedades diferenciables de clase C^r y dimensiones n y m respectivamente.

Definición 1.1.3 *Una aplicación $\phi : M \to M'$ se dice de clase C^r si para todos los pares coordenados (U_α, ϕ_α) de M y los (U'_β, ϕ'_β) de M' tales que $\phi(U_\alpha) \subset U'_\beta$ se cumple que*

$$\phi'_\beta \circ \phi \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \to \phi'_\beta(\phi(U_\alpha))$$

son de clase C^r.

1.2 Espacio tangente

Sean p y v un punto y un vector en R^n , respectivamente.Y sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to R^n$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ ..., x_n(t))$$

Sea f una función definida en un entorno de p. Restringiendo f a la curva α, escribimos la derivada direccional respecto del vector $v \in R^n$ como

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0) &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} \right)(0) = \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{df}{dx_i} = \left[\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right](f) \end{aligned}$$

La derivada direccional según un vector $v \in R^n$ es un operador sobre funciones diferenciables que depende exclusivamente de v.

Sea M variedad diferenciable.

Definición 1.2.1 *Una aplicación direnciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es llamada una curva (diferenciable) en M.*

Sea $D(p) = \{\text{funciones diferenciables en } p \in M\}$ El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0) : D \to R$ dada por

$$\alpha'(0) f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0)$$

con $f \in D$.

Un vector tangente en p es un vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$.

Si dim$M = n$ y $g : U \subset R^n \to M$ parametrización con $p = g(0)$.

$$\begin{aligned} g(q) &= (x_1, x_2, ..., x_n), q \in U \\ f \circ g(p) &= f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \alpha(t) &= (x_1(t), ..., x_n(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector $\alpha'(0)$ en términos de la parametrización g se expresa

$$X_p = \alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

Definición 1.2.2 *Se llama vector tangente a M en p a toda aplicación $X : D \to R$ tal que:*

a) es lineal, es decir, $\forall a, b \in R, \forall f, g \in D$

$$X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$$

b) es una derivación, es decir, $\forall f, g \in D$

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

Definición 1.2.3 *Si $X, Y \in T_pM, \lambda \in R$, definimos:*

$$\begin{aligned} (X+Y)\, f &= Xf + Yf \\ (\lambda X)\, f &= \lambda\, (Xf) \end{aligned}$$

Por lo tanto, T_pM forma un espacio vectorial que se llama espacio vectorial tangente a M en p.

La dimensión de T_pM es la misma que la de M.

Todo lo que antecede es válido para variedades diferenciales de dimensión finita, como puede verse en [5].

Si $x_1, ..., x_n$ es un sistema coordenado alrededor de un punto $m \in M$ y dim $M = n$.

Supongamos que $x_i\,(m) = 0\ \forall i = 1, ..., n$. Entonces para cada $f \in D\,(m)$, existen n funciones $f_i \in D\,(m)$ con $f_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_m$ y

$$f = f\,(m) + \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

Teorema 1.2.4 *Sea M una variedad diferenciable n-dimensional y sea $x_1, ..., x_n$ un sistema coordenado de un entorno de $m \in M$. Entonces, si $X \in T_M$*

$$X = \sum_{i=1}^{n} (X x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_m$$

Teorema 1.2.5 *y los vectores tangentes a las funciones coordenadas forman una base de T_M, el cual tiene dimensión n.*

Observación : Si M es de clase C^r, con r finito, la definición no sirve.

La dificultad proviene de que se deben tomar funciones C^r, es decir, D^r y no bastan las condiciones de linealidad y derivación para asegurar que el espacio vectorial de los vectores tangentes es de dimensión n.

1.3 Espacio tangente dual

M_p' espacio dual de M (espacio tangente a M en p) está formado por covectores.

En otras palabras, cada covector es una aplicación lineal de M_p en R.

Si $\{X_1, ..., X_n\}$ es una base de M_p, con $X_i : D(p) \to R, \forall i = 1, ..., n$, queremos construir la base dual de $\{X_i\}_{i=1}^n$ que notaremos $\{\Phi^1, ..., \Phi^n\}$:

$$\Phi^j(X_k) = \delta_k^j = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$$

si $\Phi \in M_p'$, entonces $\Phi = \sum_{i=1}^n u_i \Phi^i$, y por linealidad

$$\begin{aligned} \Phi(X_h) &= \sum_{i=1}^n u_i \Phi^i(X_h) = \sum_{i=1}^n u_i \delta_h^i = u_h \\ \Phi &= \sum_{i=1}^n \Phi^i(X_i)\Phi^i \end{aligned}$$

1.4 Diferencial de una función

Definición 1.4.1 *Sea $f \in D(p)$, el vector $(df)_p$ definido en p por la relación*

$$(df)_p X = X_p f$$

Definición 1.4.2 *Se llama diferencial de f en p.*

Si (x_i) es un sistema de coordenadas locales alrededor de p

$$(dx_i)_p X = X_p(x_i) = \Phi^i(X)$$

entonces culquier covector Φ puede escribirse como

$$\Phi = \sum_{i=1}^n u_i (dx_i)_p$$

o sea, $\left\{(dx_i)_p\right\}$ forman una base de M_p^*.

Sean M, N variedades diferenciables, $m \in M$ y $\Psi : M \to N$.

La diferencial de Ψ en m es una aplicación lineal

$$d\Psi : M_m \to N_{\Psi(m)}$$

dada por: si $v \in M_m$ entonces $d\Psi(v)$ es un vector tangente en $\Psi(m)$ tal que sobre las funciones opera de la siguiente manera:

sea g una función diferenciable en un entorno de $\Psi(m)$, definimos

$$d\Psi(v)(g) = v(g \circ \Psi)$$

La aplicación dual $\delta\Psi : N^*_{\Psi(m)} \to M^*_m$ se define por

$$\delta\Psi(w)(v) = w(d\Psi(v))$$

para $w \in N^*_{\Psi(m)}$ y $v \in M_m$.

Si $(d\Psi)_m$ es suryectiva (inyectiva) entonces $(\delta\Psi)_{\Psi(m)}$ es inyectiva (suryectiva).

1.5 Fibrado tangente y cotangente

Sea M una variedad diferenciable con $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ su atlas. Sean

$$\begin{aligned} T(M) &= \bigcup_{p\in M} T_p = \bigcup_{p\in M} M_p \text{ fibrado tangente} \\ T^*(M) &= \bigcup_{p\in M} T_p^* = \bigcup_{p\in M} M_p^* \text{ fibrado cotangente} \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \pi &: T(M) \to M \ / \ \pi(v) = m \text{ si } v \in T_m \\ \pi^* &: T^*(M) \to M \ / \ \pi^*(\tau) = m \text{ si } \tau \in M_m^* \end{aligned}$$

Sea (U, φ) una carta local, con $x_1, ..., x_n$ funciones coordenadas.

Definimos $\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to R^{2n}$ por

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(v) &= (x_1(\pi(v)), ..., x_n(\pi(v)), dx_1(v), ..., dx_n(v)) \\ \widetilde{\varphi}^*(\tau) &= (x_1(\pi^*(\tau)), ..., x_n(\pi^*(\tau)), \tau(\frac{\partial}{\partial x_1}), ..., \tau(\frac{\partial}{\partial x_n})) \end{aligned}$$

$\forall v \in \pi^{-1}(U), \tau \in \pi^{*-1}(U)$.

$\widetilde{\varphi} : TU \rightarrow X(U) \times R^n \subseteq R^{2n}$ es biyectiva:

$\widetilde{\varphi}(z) = \widetilde{\varphi}(z')$ si y sólo si $x_i(\pi(z)) = x_i(\pi(z'))$ y $dx_i(z) = dx_i(z')$ si y sólo si $z, z' \in M_{\pi(z)}$

Análogamente $\widetilde{\varphi}^*$.

Ahora, $\{\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}\}$ y $\{\pi^{*-1}(U), \widetilde{\varphi}^*\}$ son atlas de $T(M)$ y de $T^*(M)$ respectivamente.

Sea X un campo vectorial, entonces X es una aplicación de F en F, donde F es el álgebra de funciones diferenciables sobre M a valores en R.

Si $p \in M$

$$\begin{aligned} X(f.g) &= (Xf).g + f.(Xg) \\ X_p(f.g) &= X_pf.g(p) + f(p).X_p(g) \end{aligned}$$

Se dice que X es diferenciable en p si $\forall f \in F, Xf$ es diferenciable respecto de p.

Definición 1.5.1 *M^nse dice completamente paralelizable si existen n campos*

vectoriales diferenciables $X_1, ..., X_n$ tales que en cada punto

de la variedad $\{X_1(p), ..., X_n(p)\}$ son linealmente independientes.

Definición 1.5.2 *Sean $V, V' \subset M$ abiertos; $\Phi : V \rightarrow V'$ diferenciable se dice regular (o regular en cada punto de V) si su diferencial $d\Phi$, o Φ', es uno a uno.*

Sea M una variedad diferenciable.

Definición 1.5.3 *$M' \subset M$ se dice una subvariedad de M si posee una estructura diferenciable y si $i : M' \rightarrow M$ es diferenciable y regular.*

1) dim $M' \leq$ dim M

2) La topologia de M' no necesariamente es la topologia inducida por M.

Si M'es abierto de M, M' puede tomar la estructura diferenciable naturalmente de la de M, por lo tanto M' es una subvariedad abierta de M.

3) Si Φ es un difeomorfismo (transformación diferenciable) sobre una variedad M, Φ induce un automorfismo Φ^* del álgebra de las funciones diferenciables sobre la variedad.

Es decir, si $f \in F, \Phi^*(f) \in F$, este automorfismo está definido por: $\Phi^*(f)(p) = f(\Phi^{-1}(p))$.

$$(d\phi X)(\phi^* f) = \phi^*(Xf)$$

Más generalmente, si $\phi : V \to V'$ es una aplicación diferenciable X, X' campos vectoriales diferenciables a V y V' respectivamente, tal que $\phi' X_p = X'_{\phi(p)}$ con $p \in V$, entonces X y X' están ϕ relacionadas.

Definición 1.5.4 *Dada M variedad diferenciable con espacio tangente T_pM. Se llama distribución $\triangle$ de dimensión r de M a una aplicación de M en T_pM que aplica a cada $p \in M$, $\triangle_p \subset T_pM$ subespacio de dimensión $r \leq n$.*

Definición 1.5.5 *$\triangle$ se dice diferenciable si para cada punto $p \in M$, tiene un entorno U de p y r campos vectoriales diferenciables $X_1, ..., X_r$ sobre U tales que para cada $q \in U$, $\left\{(X_1)_q, ..., (X_r)_q\right\}$ forman base de $\triangle_q$.*

Recíprocamente, un campo vectorial diferenciable definido sobre un abierto U se dice perteneciente a la distribución $\triangle$. Entre los campos X, Y , existe la operación $[X, Y]$ (corchete o derivada de Lie) definido, para todo $f \in F$ por

$$[X, Y] f = X(Yf) - Y(Xf)$$

Si $X, Y \in \triangle$ entonces $[X, Y] \in \triangle$, entonces se dice que $\triangle$ es involutiva.

Proposición 1.5.6 *$\triangle$ es involutiva si y sólo si $[X_i, X_j] \in \triangle$ para cada $q \in U$.*

Definición 1.5.7 *Una subvariedad conexa M' se dice variedad integral de una distribución $\triangle$ si $\triangle_p \equiv T_pM'$ para cada $p \in M'$.*

Definición 1.5.8 *Se dice variedad integral maximal de $\triangle$ si cualquier variedad integral que contenga a M' coincide con M'.*

Teorema 1.5.9 *(Frobenius) Sea $\triangle$ una distribución involutiva diferenciable de una cierta variedad M,entonces por cada punto $p \in M$ pasa una variedad integral maximal $\triangle$,que llamaremos $M(p)$. Además,cualquier variedad integral conteniendo a p es una subvariedad abierta de $M(p)$.*

Demostración : Recomendamos la versión de [4].

Definición 1.5.10 *Llamaremos $\Xi(M)$ a la totalidad de campos vectoriales diferenciables sobre M*

Propiedades:
1) Ξ tiene estructura de R-espacio vectorial.
2) Ξ es F-módulo: si $f \in F, X \in \Xi$ entonces
$(fX)(g) = f(Xg)$,
es decir $(fX)_p(g) = f(p)X_p g$.
3) Ξ tiene estructura de un álgebra (de Lie) (sobre R) :
es decir, además de 1)

$$[,] \text{ satisface } \begin{cases} \text{es anticonmutativo: } [X,Y] = -[Y,X] \\ \text{es bilineal} \\ \text{identidad de Jacobi} \end{cases}$$

$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$
Las estructuras algebraicas se vinculan entre sí por la fórmula

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg_{-})Y - g(Yf)X$$

para $X, Y \in \Xi, f, g \in F$.
El [,] =0 se interpreta como igualdad de las derivadas sucesivas.
Sea $\phi : V \to V$ difeomorfismo (o transformación diferenciable).

$$\phi' : \Xi(V) \to \Xi(V)$$

su relación con las estructura algebraica es la siguiente:
1) ϕ' (ó $d\phi$) es una transformación lineal del espacio vectorial Ξ.
2) Para cada $f \in F$, $X \in \Xi, \phi'(fX) = (\phi^* f)(\phi' X)$.
3) ϕ' es un automorfismo del álgebra de Lie $\Xi(V)$

$$[\phi' X, \phi' Y] = \phi'[X,Y]$$

Existen transformaciones diferenciables (difeomorfismos) especiales que dan campos vectoriales diferenciables especiales.

1.6 Grupo monoparamétrico

Definición 1.6.1 *Sea $t \in R$. Un grupo monoparamétrico de difeomorfismo de V está formado por transformaciones diferenciables de V que satisfacen:*
1) para cada t, ϕ_t es un difeomorfismo.
2) $(t,p) \in R \times V \mapsto \Phi_t(p)$ es una aplicación diferenciable (en t y en p).Fijado t, $\Phi_t(p)$ son las órbitas de ϕ_t.
3) Si $t, s \in R, \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$.

Ejemplo 1.6.2 $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$ *subgrupo monoparamétrico de* $Gl\,(3, R)$.

Queda como ejercicio , su verificación.

Dado un grupo monoparamétrico de difeomorfismos de V, ϕ_t, podemos definir un campo vectorial de X, de la siguiente manera: para cada $f \in F$ (si $\phi_0(p) = p$)

$$(Xf)\,(p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{f(\phi_t(p)) - f(p)\}$$

Observación: El límite siempre existe por que $\phi_t(p)$ es diferenciable en t y en p.

Verificar que es campo vectorial diferenciable.

Notación: $X_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{\phi_t(p) - p\}$

Definición 1.6.3 *Se dice que* $f \in F$ *es invariante por* ϕ_t *si* $Xf = 0$ *, o sea* $f \in F$ *es invariante si y sólo si es constante en la órbita de* ϕ_t

Recíprocamente, dado $X \in \Xi$, no necesariamente existe ϕ_t de V que induce el campo X.

Pero , si existe localmente para cada punto $p \in V, \phi_t$ se llama grupo local monoparamétrico de difeomorfismos.

Es decir, para cada punto p existen $U = U(p)$ y $\varepsilon > 0$ (el mismo $\forall p$) y ϕ_t, (transformación diferencial local) para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, que satisface:

1) Para cada $t, |t| < \varepsilon, \phi_t$ es difeomorfismo de U en $\phi_t\,(U)$.

2) $(t, p) \longmapsto \phi_t(p)$ es aplicación diferenciable.

3) $|t| < \varepsilon, |s| < \varepsilon$ y $|s + t| < \varepsilon$ y si $\phi_t(q) \in U, q \in U$

entonces $\phi_{s+t}.q = \phi_t \circ \phi_s q, \forall q \in U.$ e induce X en el siguiente sentido:

$$X_q = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{\phi_t(q) - q\}$$

Se prueba la existencia y unicidad de ϕ_t a partir de la existencia y unicidad de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciables

Se dice que el campo X *genera* el grupo monoparamétrico local de difeomorfismos ϕ_t en entorno de p

Si en particular , X es inducido por un grupo monoparámetrico de difeomorfismos de V , entonces decimos que X genera un grupo *global* monoparamétrico de difeomorfismos.

A veces se dice que X es completo.

Por lo tanto, X es completo si los ϕ_t generados por X son tales que: $\phi_t(p)$ está definido $\forall p \in V$ y para $|t| \leq \varepsilon$, (ε es el mismo $\forall p$).

Proposición 1.6.4 *Sea $X \in \Xi(V), X$ es completo si V es compacto.*

En lo que sigue estudiaremos las propiedades de X por las transformaciones locales generadas por X , y viceversa. Para abreviar diremos que X genera ϕ_t ,o ϕ_t induce X sin explicitar dominios de existencia.

Lema 1.6.5 *Sea ϕ un difeomorfismo. Si X es un campo (sobre la variedad) que genera ϕ_t entonces $\phi' X$ genera $\phi \circ \phi_t \circ \phi^{-1}$.*

Demostración:

Por definición,

$(\phi' X) f = (X f(\phi)) \phi^{-1} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \{ f \circ \phi(\phi_t) - f \circ \phi \} \circ \phi^{-1} =$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ f \circ \phi(\phi_t) \phi^{-1} - f \circ \phi \circ \phi^{-1} \right\} =$

$= \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ f \circ \left[\phi \circ \phi_t \circ \phi^{-1} \right] - f \right\}$

si y solo si $\phi' X$ es el generado por el grupo monoparamétrico $\phi \circ \phi_t \circ \phi^{-1}$.

Definición 1.6.6 *Decimos que $X \in \Xi$ es invariante por ϕ si $\phi' X = X$.*

Entonces $\phi \circ \phi_t \circ \phi^{-1} = \phi_t$ si y sólo si ϕ_t conmuta con ϕ. Así, X es invariante por ϕ si y solo si ϕ conmuta con cada ϕ_t.

Lema 1.6.7 *Si $f(t)$ es diferenciable en un entorno de cero en R tal que $f(0) = 0$, entonces existe una función diferenciable $g(t)$ definida en el mismo intervalo tal que $f(t) = t.g(t)$ y*

$g(0) = f'(0), (f' = \frac{df}{dt})$.

Demostración: Basta verificar que $g(t) = \int\limits_0^1 f'(t.s)\, ds$.

Generalizando este resultado:

Lema 1.6.8 *Si $f(t,p)$ es diferenciable sobre $U \times V$, donde U es un entorno de 0 $\in R$ y V es una variedad diferenciable (o entorno de p) tal que $f(0,p) = 0$ para cada $p \in V \subset M$, entonces existe*

una función diferenciable $g(t,p)$ sobre $U \times V$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{c} f(t,p) = t.g(t,p) \\ g(0,p) = (\frac{\partial f}{\partial t})(0,p) \end{array} \right. \quad \forall p \in V$$

Usando este resultado probamos

Lema 1.6.9 *Sea $X \in \Xi(V)$ que genera ϕ_t. Para cada función $f \in F$, existe una función diferenciable $g_t p() = g(t,p)$ sobre $U \times V$ tal que $f \circ g_t = f + t.g_t$ y $g_0 = Xf$ sobre V.*

Demostración: Tomamos $f(t,p) = f(\phi_t(p)) - f(p)$.

Por el Lema anterior, existe una función diferenciable $g(t,p)$ tal que $f(t,p) = t.g(t,p)$ y $(\frac{\partial f}{\partial t})(0,p) = g(0,p)$.Entonces $f.\phi_t - f = tg_t$ y $g_0(p) = g(0,p) = (\frac{\partial f}{\partial t})(0,p)$

Ahora, $(\frac{\partial f}{\partial t})(0,p) = \left\{ \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[f \circ \phi_t - f \right] \right\} (0,p) = g_0(p) = (Xf)(p)$.

En lo que sigue daremos una interpretación al $[X,Y]$.

Proposición 1.6.10 *Sean ϕ_t, ψ_t grupos locales monoparamétricos de difeomorfismos generados por X e Y respectivamente. Entonces:*

$$[X,Y] \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[Y - \phi'_t Y \right]$$

Demostración: Sea $f \in F$; existe una familia de funciones diferenciables g_t sobre V satisfacen:

$$\begin{aligned} f \circ \phi_t &= f + t.g_t \\ g_0 &= Xf \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$(\phi'_t \circ Y)_p f = Y(f \circ \phi_t)\,\phi_t^{-1}(p) = (Yf)\,\phi_t^{-1}(p) + t.Y(g_t)\phi_t^{-1}(p)$

Y , $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ Y - \phi'_t Y \right\}(p)(f) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ Yf - (\phi'_t Y) f \right\}(p) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ Y(f)(p) - (Yf)(\phi_t^{-1}(p)) - t.$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ Y(f)(p) - Y(f)(\phi_t^{-1}(p)) \right\} - \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ t.Y(g_t)\phi_t^{-1}(p) \right\} = X_p(Y(f)) -$ $Y_p g_0 = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$

Proposición 1.6.11 *Sean ϕ_t, ψ_t como en el teorema, entonces $[X,Y] = 0$ si y sólo si ϕ_t conmuta con ψ_t.*

Demostración: Si ϕ_t, y ψ_t conmutan,entonces Y es invariante por cada ϕ_t.

Entonces $\phi_t^{;} Y = Y$,entonces $[X,Y] = 0$

Reciprocamente, Si $[X,Y] = 0$ entonces $Y = \phi_t^{;} Y$, o sea Y es invariante por ϕ_t.

1.7 Formas diferenciables

Sea M^n variedad diferenciable de dimensión n, definimos una forma diferenciable o 1-forma sobre M

$$w : \Xi \rightarrow F \ / \ X \mapsto w\left(X\right)$$

tal que $\forall f, g \in F$

$$w(fX + gY) = fw\left(X\right) + gw\left(Y\right).$$

Dadas dos 1-formas w_1, w_2 se define

$$\begin{array}{rcl} \left(w_1 + w_2\right)\left(X\right) & = & w_1\left(X\right) + w_2\left(X\right) \\ \left(f.w_i\right)\left(X\right) & = & f.w_i\left(X\right) \end{array}$$

Con estas definiciones, las 1-formas tienen estructura de F-módulo.

Proposición 1.7.1 *Si w es una 1-forma y $X \in \Xi$ que se anula en U abierto de M, entonces $w\left(X\right)$ se anula en el mismo entorno .*

Demostración: Si $p \in U$, $f = \begin{cases} 0 \text{ si } p \in U \\ 1 \text{ si } p \notin U \end{cases}$

$$fX \quad = \quad \begin{cases} 0 \text{ si } p \in U \\ X_p \text{ si } p \notin U \end{cases} \quad fX = X$$

$w\left(X\right) = w\left(fX\right) = f.w\left(X\right) = 0$ se anula en p.

Sea U un entorno coordenado, $u^1, ..., u^n$ funciones coordenadas, entonces $du^1, ..., du^n$ son n 1-formas definidas por

$$du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \delta^i_j\left(\star\right)$$

Toda 1-forma w sobre U puede ser expresada como:

$$w = \sum_{i=1}^{n} w^i du^i = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i dw^i$$

donde las φ^i son funciones diferenciables en U, $\varphi^i = w(\frac{\partial}{\partial u^i})$ y $w(X)_p = \sum \varphi^i(p) du^i (X)_p$, con $(\star)$

Esta expresión es única, depende sólo de X_p.

Entonces el valor en p de $w(X)$ depende de X_p, y junto con $(\star)$, podemos decir que las 1-formas son elementos del dual de T_p.Dicho de otro modo $du^1, ..., du^n$ son base del $T_p^* M$.

Si $f \in F$ son llamadas 0-formas, y df como una 1-forma w tal que

$$w(X) = df(X) = Xf$$

$\forall X \in \Xi$.

Una r-forma w sobre M es una aplicación diferenciable sobre $\Xi \times ... \times \Xi \rightarrow F$ tal que $(X_1, ..., X_r) \mapsto w(X_1, ..., X_r)$

1) $w(X_1, ..., X_r)$ es alternado (o sea, si s es una permutación de $(1, ..., r)$, entonces $w(X_{s(1)}, ..., X_{s(r)}) = sg(s).w(X_1, ..., X_r)$ para las 1-formas

$$w_1 \wedge w_2 = -w_2 \wedge w_1$$

2) $w(X_1, ..., X_r)$ es r-multilineal.

Llamaremos D^r a la totalidad de las r-formas diferenciables sobre la variedad.

Entonces

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\in D^r, \forall w_1, w_2 \in D^r \\ f.w &\in D^r \text{ si } f \in D^0 \\ D^r &\equiv 0 \text{ si } r > n. \end{aligned}$$

$D = \bigoplus_{r=0}^{n} D^r$ (suma directa porque $\bigcap D^r = \{0\}$)

1.8 Producto exterior

Sea $w_1 \wedge w_2 \in D^{r+s}$ definido por $w_1 \wedge w_2 (X_1, ..., X_{r+s}) = w_1(X_1, ..., X_r).w_2(X_{r+1}, ..., X_{r+s})$, donde $w_1 \in D^r, w_2 \in D^s, r + s \leq n$.

Si $w \in D^r$, entonces puede ser expresada en términos de las funciones coordenadas

$$w = \sum_{i(1) < .... < i(r)} \varphi_{i(1)...i(r)} du^{i(1)} \wedge ... \wedge du^{i(r)},$$

con $\varphi_{i(1)...i(r)}$ funciones diferenciables en el entorno de U.

Definiremos d, diferencial exterior sobre $D = \bigoplus_{r=0}^{n} D^r$,

Definición 1.8.1 *1) $f \in D^0 \subset F, df$ es el diferencial de f como función*
2) d es lineal y $d\left(D^r\right) = D^{r+s}$
3) si $w_1 \in D^r, w_2 \in D^s$ entonces
$d\left(w_1 \wedge w_2\right) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^r dw_1 \wedge dw_2$

Con estas propiedades, el diferencial exterior queda determinado de manera única.

Proposición 1.8.2 *Sea w una 1-forma sobre M, si $X, Y \in \Xi(M)$, entonces*

$$2\left(dw\right)\left(X, Y\right) = Xw\left(Y\right) - Yw\left(X\right) - w\left(\left[X, Y\right]\right)$$

Proposición 1.8.3 *donde $X.w(Y)$ denota la función obtenida aplicando X a la función $w(Y)$,y análogamente $Y.w(X)$.*

Demostración: Ambos lados de la igualdad pueden ser considerados una 2-forma.

Aplicando linealidad basta probarla para $X = \frac{\partial}{\partial u^i}, Y = \frac{\partial}{\partial u^j}$, en cualquier entorno coordenado U ,donde $u^k, 1 \leq k \leq n$,son las funciones coordenadas.

Si se satisface para w_1, w_2, lo hará para $w_1 + w_2$ y fw_i,
$f \in F(U)$.

Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w = du^k$, y la ecuación se reduce a
$2d\left(du^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u^i}(du^k(\frac{\partial}{\partial u^j})) - \frac{\partial}{\partial u^j}(du^k(\frac{\partial}{\partial u^i})) - du^k[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}]$
que es trivial pues ambos lados son iguales a cero.

Sea ϕ un difeomorfismo sobre M. Entonces ϕ induce un automorfismo ϕ^*sobre $D = \bigoplus_{i=1}^{r} D^i$ tal que "conmuta con d ", $w \to \phi^* w$, en el siguiente sentido

$$\begin{aligned} \phi^* w\left(X_1, ..., X_r\right) &= w\left(\phi' X_1, ..., \phi' X_r\right) = \\ &= w\left(d\phi X_1, ..., d\phi X_r\right) \end{aligned}$$

Definición 1.8.4 *Sea F un R-espacio vectorial con dim $F = s$, definimos una forma F-valuada:*

1) 0-formas F-valuadas (son las funciones diferenciables) a una aplicación diferenciable de la variedad M en F donde arrastramos la estructura diferenciable.

2) Una r-forma F-valuada: dados $X_1, ..., X_r \in \Xi \times ... \times \Xi$, definimos w tal que $w(X_1, ..., X_r)$ cumple las condiciones que definen las condiciones con que definimos las r-formas
R-valuadas.

Más aún, si $\xi_1, ..., \xi_s \in$F son tales que la r-forma F-valuada w puede escribirse

$$w = \sum_{i=1}^{s} w^i \xi_i$$

de manera única, con w^i r-formas R-valuadas y $\{\xi_i\}$ base,
entonces

$$dw = \sum_{i=s}^{s} dw^i \xi_i$$

es una $(r+1)$-forma F-valuada.

Definición 1.8.5 *Sean W un R-espacio vectorial y W^* su dual. Llamaremos tensor de tipo (r, s) sobre W, o r-contravariante, s-covariante, a una aplicación $(r+s)$-multilineal definida de*

$$\underbrace{W^* \times ... \times W^*}_{s} \times \underbrace{W \times ... \times W}_{r} \to R.$$

El conjunto de todos los tensores de tipo (r, s) forman un R-espacio vectorial con la suma usual y el producto por escalares.

Otra notación para un tensor de tipo (r, s) es $T_s^r(\mathrm{W})$, o $T^{(r,s)}$.

Ejemplos 1.8.6 $T^{(0,1)} = T_0 \equiv W \qquad ; T^{(1,0)} = T_1^0 \equiv W^*$

Proposición 1.8.7 $T^{s,0}$ *es isomorfo al espacio vectorial de las transformaciones multilineales de W en W.*

Es decir, $T^{s,0} \cong \{f : \mathrm{W} \times ... \times \mathrm{W} \to R$ multilineales$\}$

Demostración: La aplicación que asigna a cada $T \in L_s^1, \widetilde{T} \in T^{s,1}(\mathrm{W})$ definida por

$$\widetilde{T}\left(v, X_1, ..., X_s\right) = v\left(T\left(X_1, ..., X_s\right)\right)$$

es un isomorfismo.

Es claramente monomorfismo y por cuestiones de dimensión resultan isomorfos. En particular, $T^{(1,1)} = T_1^1 = \mathrm{End}(\mathrm{W})$

Definición 1.8.8 *Sea M una variedad diferencial de dimensión n. Un campo tensorial de tipo (r, s) sobre una variedad es una regla que asigna a cada punto p de la variedad un tensor de tipo (r, s) sobre el espacio vectorial T_p.*

Esta aplicación multilineal es diferenciable en p.

Observaciones:

1) Un campo de tipo $(0, 0)$ sobre M es una función $T : M \to R$

2) Un campo de tipo $(1, 0)$ sobre M es un campo de vectores.

3) Un campo de tipo $(0, 1)$ sobre M es una 1-forma.

4) Sabemos que los campos sobre M son F-módulo.

Un campo tensorial de tipo $(1, r)$ sobre M es una aplicación multilineal de

$\Xi \times ... \times \Xi \to \Xi, (X_1^p, ..., X_r^p) \in T_p \times ... \times T_p$

Proposición 1.8.9 *A todo tensor de tipo $(1, 1)$ se le puede asociar un campo tensorial K tal que $K(X) = X$ si $X \in \Xi$.*

Observación : La métrica riemanniana es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ y satisface:

1) Simetría: $g(X, Y) = g(Y, X), \forall X, Y \in \Xi$

2) Definición positiva: $g(X, X) \geq 0$ $\forall X \in \Xi$, $g(X, X) = 0$ si y sólo si $X = 0$.

Ejemplo 1.8.10 *:En R^2, $dx^2 + dy^2 = dx \bigotimes dx + dy \bigotimes dy(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$*

Observación : Una métrica riemanniana induce un producto interno sobre cada $\mathrm{T}_p(M)$, p$\in M$, Si M es 2^o axioma se asegura la existencia de métrica riemanniana (aplicación del teorema de partición de la unidad).

1) y 2) de la definición dicen que g es una pseudo-métrica Riemanniana en M.

En otras palabras, g asigna un producto interno g_x en cada punto del espacio tangente T_x, con $x \in M$.

Si (U, X^i) es un sistema local de coordenadas entonces las componentes de g están dadas por

$$g_{ij} \;=\; g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$$

o equivalentemente $g = \sum\limits_{i,j} g_{ij} dx^i \bigotimes dx^j$

Proposición 1.8.11 *En cualquier variedad existe una métrica Riemanniana.*

Demostración: Sea M una variedad n-dimensional, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ atlas coordenado en M. Existe una partición de unidad (U_i, f_i) subordinada a U_α. Como cada $U_i \subset U_\alpha, \varphi_i = \varphi_\alpha \; /_{U_i}$.

Entonces definimos un campo tensorial 2-covariante en M por

$$g_i(x)(X,Y) = \begin{cases} f_i(x) \quad \langle d\varphi_i(x) X, d\varphi_i(x) Y \rangle \text{ si } x \in U_i \\ 0 \text{ si } x \notin U_i \end{cases}$$

$\forall X, Y \in T_x(M), \langle , \rangle$ producto interno usual en R^n. Entonces $g = \sum\limits_{i \in I} g_i$ es una métrica Riemanniana.

Ejemplos 1.8.12 *:*

1)$M = R^n, ds^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} dx_i^2$ da al espacio euclideano de dimensión n estructura de variedad Riemanniana.

2)$M = \{(x,y) \in R^2$ tal que $y > 0\}$, $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ (métrica no euclideana de Lobachewski).

Esta variedad es conocida como Semiplano de Poincaré.

Definición 1.8.13 *Sean M, N variedades riemannianas. Un difeomorfismo $f : M \to N$ se dice isometría si $\forall p \in M, \forall X, Y \in M_p$ se verifica*

$$\langle X, Y \rangle_p = \left\langle (df)_p X, (df)_p Y \right\rangle_{f(p)}$$

Si la igualdad sólo se satisface para $p \in U$ en M, es decir, $f : U \to f(U)$, entonces se dice que f es una isometría local.

Capítulo 2

Grupos de Lie

2.1 Grupos de Lie

Definición 2.1.1 *Un grupo de Lie es un grupo G tal que sus elementos son también puntos de una variedad diferenciable que satisface que la aplicación $G \times G \to G$ dada por $(x, y) \mapsto x.y^{-1}$ es diferenciable.*

($G \times G$ se considera como una variedad producto $(x, y) \to xy^{-1}$ es lo que vincula las dos estructuras).

Observaciones:

1- La dimensión del grupo será la dimensión de la variedad diferenciable.

2- Por ser variedad, G es localmente conexo.

Si llamamos G_e a la componente conexa de la identidad, G_e es abierto y resulta un subgrupo topológico conexo de G. Luego, G_e puede generarse por cualquier entorno de la identidad, en particular, G_e es, a lo sumo, suma de una cantidad numerable de conjuntos compactos y satisface el segundo axioma (por ser abierto hereda todo de la variedad).

3- Si G satisface el segundo axioma, entonces G/G_e tiene , a lo sumo , un número finito de elementos.

4- Son diferenciables las aplicaciones $a \to a^{-1}$ y $(a, b) \to a.b$.

1)R^m es un grupo de Lie bajo la adición de vectores.

2)$Gl\,(m, R)$ es un grupo con respecto a la multiplicación de matrices.

3)$S^1 \subset C$ es un grupo de Lie con la multiplicación de números complejos.

Lema 2.1.2 *Si G_1 y G_2 son dos grupos de Lie, entonces $G_1 \times G_2$ con el producto directo tambien lo es.*

Es decir, con $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$ es un grupo de Lie.

2.2 Algebra de Lie

Definición 2.2.1 *Un álgebra de Lie sobre R es un espacio vectorial g con una aplicación bilineal $[,] : g \times g \to g$ tal que $\forall X, Y, Z \in g$:*
1) $[X, Y] = -[Y, X]$
2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

1) Sea M una variedad n-dimensional. Entonces $\Xi(M)$ es un álgebra de Lie con respecto al corchete de Lie de campos vectoriales.

2) El conjunto $Gl(m, R) = R^{m\times m}$ es un espacio vectorial de dimensión m^2.

Si definimos $\forall A, B \in R^{m\times m}$

$$[A, B] = AB - BA$$

entonces $(Gl(m, R), [,])$ es un álgebra de Lie.

Definición 2.2.2 *A partir de la aplicación $(x, y) \to xy^{-1}$, quedan definidas otras dos aplicaciones más: traslaciones a izquierda L_x y traslaciones a derecha R_x:*

$$\begin{aligned} L_x &: G \to G \textit{ tal que } L_x(y) = xy \\ R_x &: G \to G \textit{ tal que } R_x(y) = yx \end{aligned}$$

Proposición 2.2.3 *L_x y R_x son difeomorfismos.*

Demostración: $(L_x)^{-1} = L_{x^{-1}}$ ya que

$$\begin{aligned} ((L_x)^{-1} \circ L_x)(y) &= x^{-1}xy = y \\ (L_x \circ (L_x)^{-1})(y) &= xx^{-1}y = y \end{aligned}$$

además $L_{x^{-1}}(y) = x^{-1}y$ es diferenciable porque x, y pertenecen a un grupo de Lie.

Definición 2.2.4 *Una métrica Riemanniana es invariante a izquierda si L_x es una isometría,es decir, si $\forall x, y \in G, X, Y \in G_y$*

$$\langle X, Y\rangle_y = \left\langle (dL_x)_y X, (dL_x)_y Y \right\rangle_{L_x(y)}$$

Análogamente se define una métrica Riemanniana invariante a derecha.

<u>Observación</u>: Si la métrica es invariante a izquierda y a derecha se dice métrica bi-invariante.

Definición 2.2.5 *Un campo vectorial X en G se dice invariante a izquierda si $\forall x, y \in G$*

$$dL_x(y)X(y) = X(xy)$$

Análogamente X se dice invariante a derecha si

$$dR_x(y)X(y) = X(yx)$$

Proposición 2.2.6 *Los campos invariantes a izquierda (derecha) son diferenciables*

Para introducir en G una métrica invariante a izquierda se toma el producto interno $\langle , \rangle_e$ en G_e, con el elemento neutro de G,y se define $\forall x \in G, \forall X, Y \in G_x$

$$\langle X, Y \rangle_x = \langle (dL_{x^{-1}})_x X, (dL_{x^{-1}})_x Y \rangle_e$$

Como $L_{x^{-1}}$ es un difeomorfismo, nos queda una métrica Riemanniana invariante a izquierda.Es decir que dado un vector tangente X_e, en la identidad e, se puede obtener el campo de vectores

$$X_y = dL_y (X_e)$$

que es invariante a izquierda.

Recíprocamente, todo campo de vectores invariante a izquierda determina el vector X_e del campo correspondiente al elemento neutro.

Es decir, los campos de vectores invariantes a izquierda de pueden representar por los vectores del espacio vectorial tangente en la identidad e, o sea, G_e.

g es espacio vectorial isomorfo al espacio tangente a G en e, $\mathrm{T}_e(G)$.

Dado $a \in T_e(G)$ obtenemos el campo vectorial $X_a = dL_a(A)$, $a \in G, X_a \in g$ y esta correspondencia es isomorfismo de $\mathrm{T}_e(G)$ en g.

Si $X, Y \in G_e$, podemos obtener dos campos de vectores diferenciables sobre G y luego calcular $[X_x, Y_x]$, que para $x = e$ nos dará el vector tangente $[X, Y] \in G_e$.

De este modo se define en G_e un álgebra de Lie de G.

Con el fin de ver como actúa la diferencial de la traslación respecto del corchete de Lie presentamos la siguiente

Proposición 2.2.7 *Si $X, Y \in g$, entonces $[X,Y] \in g$.*

Demostración :
$dL_a([X,Y]) = [dL_aX, dL_aY] = [X,Y]$
Veamos la siguiente propiedad:
Si φ es un difeomorfismo entre variedades M y N, se puede considerar la siguiente igualdad como aplicación entre funciones en un entorno de $p \in M$ a valores reales

$$(d\varphi)X(f \circ \varphi) = X(f \circ \varphi)$$

Teniendo esto presente, se obtiene
$d\varphi\,[X,Y]\,(f) = [X,Y]\,(f \circ \varphi) = XY(f \circ \varphi) - YX(f \circ \varphi) =$
$=Xd\varphi\,(Y)\,(f \circ \varphi) - Yd\varphi\,(X)\,(f \circ \varphi) =$
$= d\varphi\,(X)\,d\varphi\,(Y)\,(f \circ \varphi) - d\varphi\,(Y)\,d\varphi\,(X)\,(f \circ \varphi)$
Recordando que las traslaciones a izquierda son difeomorfismos, tenemos que

$$dL_x\,[X,Y] = [(dL_x)\,X, (dL_x)\,Y]$$

y por lo tanto si X, Y son campos invariantes a izquierda, entonces el corchete también lo es.

Así con las operaciones de suma, producto por escalar y el corchete, el conjunto g de campos vectoriales invariantes a izquierda forma un álgebra la cual es isomorfa a la anterior y nos da otra interpretación del álgebra de Lie del grupo de Lie G.

La dimensión del álgebra de Lie es la dimensión de G_e y por lo tanto, es igual a la dimensión de G.

Sea $A \in g, \phi_t$ grupo local monoparamétrico de transformaciones generadas por el campo A en un entorno de e.

Por estar en g, A es invariante por L_x $\forall x \in G$ entonces ϕ_t conmuta con cada uno de los L_x ,debido a la invariancia .

Así A genera un grupo global monoparamétrico.de transformaciones ϕ_t sobre G, el cual conmuta con cada L_x, y que

$$\phi_t\,(x) = R_{a_t.x}$$

con $x \in G, a_t$ es la órbita de e por ϕ_t.

Además $a_{t+s} = a_t.a_s$.

Como a_t verifica la propiedad de aditividad ,entonces a_t es un grupo monoparamétrico que es en realidad un subgrupo del otro.

Se puede caracterizar a a_t por ser la única curva en G cuyo vector tangente es $a'_t = a_t.a'_0$, con $a_0 = e$.

Proposición 2.2.8 *Una variedad diferenciable M posee una métrica Riemanniana.*

Demostración: Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una partición de la unidad de M subordinada al cubrimiento por entornos coordenados $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$

Hemos visto que este cubrimiento es localmente finito.

Sobre cada entorno V_α podemos definir una métrica Riemanniana $\langle,\rangle^\alpha$ (la inducida por el sistema de coordenadas).

Luego, tomando $X, Y \in M_p$, para $p \in M$, se verifica que

$$\langle X, Y\rangle_p = \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(p)\,\langle X, Y\rangle_p^\alpha$$

es una métrica Riemanniana en M.

Definición 2.2.9 *$G' \subset G$ es un subgrupo de Lie si es subgrupo de G que al mismo tiempo es una subvariedad de la variedad diferenciable.*

Veamos ahora cuánto hereda la subvariedad como subgrupo de Lie.

Definición 2.2.10 *g' subespacio de g es una subálgebra de Lie de g si está formada por todos los campos invariantes a izquierda, al cual pertenece el vector tangente en $e \in G'$.*

Recíprocamente, si g' es cualquier subálgebra de g,asociamos a cada $x \in G$

$$g'_x = \{A_x / A \in g'\}$$

donde g'_x es el espacio vectorial tangente.

La aplicación $x \to g'_x$ para cada x es una distribución diferenciable involutiva. Decimos que la variedad maximal integral de esta distribución que pasa por e (Frobenius) es un subgrupo de Lie conexo llamado subgrupo de Lie generado por g'.

Proposición 2.2.11 *Sean G grupo de Lie y ϕ automorfismo de G, entonces ϕ induce un automorfismo sobre g: si $A \in g$, $\phi' A \in g$. Además, $[\phi' A, \phi' B] = [A, B]$.*

Usando el isomorfismo de álgebras $g \cong T_e$, tenemos que la $(d\phi)_e$ induce un automorfismo en T_e y va a verificar que $\phi(e) = e$.

Definición 2.2.12 *Si ϕ es lo que se llama un automorfismo interno $x \to axa^{-1}$ inducido por $a \in G$, entonces el automorfismo de álgebra inducido por el automorfismo interno es lo que se denomina adjunta (ad (a)).*

Ya que

$$axa^{-1} = L_a R_{a^{-1}} x$$

tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G & \to & Aut(g) \\ a & \longmapsto & ad\,(a) \end{array}$$

(representación adjunta de G en g) verifica $ad(a)(B)$=$R_{a^{-1}}B$, para todo $B \in g$ (perdemos L pues B es invariante a izquierda).

Si $a_t$es subgrupo monoparamétrico de G generado por $A \in g$, entonces $[B, A]$ =$\lim_{t \to 0}$ $(\frac{1}{t})[ad(a_t^{-1})B - B]$, para todo$B \in g$.

Proposición 2.2.13 *Si G' es un subgrupo de Lie del grupo G y G' es invariante en G, entonces la subálgebra correspondiente g'es invariante por $B \to [B, A]$ .Se sigue que g' es un ideal de g por su invariancia.Recíprocamente, si G es conexo, g' un ideal de g , genera un subgrupo de Lie G' conexo invariante en G (lo construímos mediante el teorema de Frobenius).*

Ahora diremos algo sobre formas diferenciales sobre grupos de Lie.

Definición 2.2.14 *Una forma es invariante a izquierda si es invariante por cada $L_a, a \in G$.*

Definición 2.2.15 *Llamamos g^* a un espacio lineal generado por las 1-formas invariantes a izquierda. g^* es el dual de g.*

Proposición 2.2.16 *Sean $A \in g, w \in g^*, w\,(A) =$constante sobre G.*

Si $w \in g^* \Rightarrow dw$ es también invariante a izquierda y satisface la ecuación de Maurer-Cartan

$$dw\,(A, B) = -\frac{1}{2} w\,([A, B])$$

Demostración: Sigue de la proposición 1.8.2.

2.3 Grupos de transformaciones

Definición 2.3.1 *Sean G grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Se dice G grupo de Lie de transformaciones de M (o G actúa sobre M diferenciable) si:*

1) para cada $a \in G$, existe difeomorfismo de M en M tal que $p \mapsto pa$
2) $(a, p) \in G \times M \to pa \in M$, es C^∞.
3)$a, b \in G$, $p\,(ab) = (pa)b$

De 2) también decimos que G actúa sobre M a derecha.
Además, e identidad en G, $R_e = id_e$.

Definición 2.3.2 *Un grupo G es efectivo si el neutro es el único elemento que hace que R_e actúe como la identidad (también se dice que G actúa efectivamente).*

Definición 2.3.3 *Se dice que G actúa sin punto fijo (que no tiene punto fijo) si $pa = p$ para algún $p \in M \Longrightarrow a = e$.*

Supongamos que G es grupo de Lie conexo que actúa diferenciablemente sobre M, g álgebra de Lie de G, entonces se induce naturalmente un homomorfismo $g \to \Xi\,(V)$, con V subvariedad abierta de M.

Sea $A \in g$ (un campo invariante a izquierda en el álgebra) y sea a_t subgrupo monoparamétrico generado por A. Entonces R_{a_t} es también un subgrupo monoparamétrico de transformaciones sobre M, éste induce un campo vectorial A^* sobre M. a_t es el ϕ_t con x fijo. A^* ,campo tangente en un punto, es fijando el punto variando el t, es el campo derivado tangente a esa curva. entonces tenemos una aplicación

$$\sigma : g \to \Xi\,(M)$$

$$A \mapsto \sigma\,(A) = A^*$$

Queda como ejercicio probar que σ es un homomorfismo de álgebras

Proposición 2.3.4 *σ es isomorfismo si G es efectivo sobre M.*

Demostración: Si $\sigma(A) = 0$ entonces el grupo monoparamétrico de transformaciones R_{a_t} es trivial, es decir, que todos son la identidad.
Si G es efectivo, $a_t = e$,entonces A=0

Proposición 2.3.5 *Si G no tiene punto fijo, entonces cada $\sigma\,(A)$, con $A \in G, A \neq 0$,no tiene punto cero (ninguno es cero del álgebra).*

Demostración: Se deja como ejercicio.

Capítulo 3

Haz de Fibrados principales

3.1 Haz de fibrados principales

Sean B una variedad diferenciable y G un grupo de Lie.

Definición 3.1.1 *Una variedad diferenciable P es llamada haz de fibrados principales diferenciable (principal fiber bundles)si :*

1) G actúa diferenciablemente sobre la derecha , sin punto fijo, es decir, $(x, a) \in P \times G \to xa = R_a x \in P$

2) B es espacio cociente de P por la relación de equivalencia inducida por G y la proyección canónica $\pi : P \to B$ es diferenciable.

3) P es localmente trivial, o sea, para cada $u \in B$ hay un entorno U tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo con UxG en el sentido:

$x \in \pi^{-1}(U) \to (\pi(x), \Phi(x)) \in UxG$ es isomorfismo diferenciable tal que $\Phi(xa) = \Phi(x)a$ para cada $a \in G$.

B es llamado base de P, G grupo estructural ,y $P(B, G)$ haz de fibrados principales (h.f.p.).

Podemos considerar la variedad producto BxG como un haz de fibrados principales tomando:G actuando sobre BxG mediante $(u, a)b = (u, ab)$

Así, $P(BxG, G)$ es haz de fibrados principales trivial.

Nuevamente , sea $P(B, G)$ un h.f.p.

Definición 3.1.2 *Para cada $u \in B, \pi^{-1}(u)$ es subvariedad cerrada de P la cual es diferenciablemente isomorfa a G. Se llama fibra sobre u.*

Para cualquier $x \in P$, la fibra a través de x es la fibra sobre $u = \pi(x)$.

Si V es subvariedad abierta de B, $\pi^{-1}(V)$ es subvariedad abierta de P sobre la cual G actúa sin punto fijo y la cual es h.f.p. diferenciable sobre la base$V$.

Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento por abiertos de B, por la condición 3) (localmente trivial) ,$\pi^{-1}(U_\alpha)$ da un isomorfismo $x \to (\pi(x), \Phi_\alpha(x))$ sobre $U_\alpha x G$.

Si $x \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ se tiene

$$\Phi_\beta(xa)(\Phi_\alpha(xa))^{-1} = \Phi_\beta(x)\Phi_\alpha(x)^{-1}$$

entonces la aplicación $x \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Phi_\beta(x)\Phi_\alpha(x)^{-1} \in G$ es constante en cada fibra.

Por lo tanto ,induce una aplicación diferenciable

$$\Psi_{\beta\alpha}(x) = \Phi_\beta(u)\Phi_\alpha(u)^{-1}$$

para $u \in \pi^{-1}(x)$. Depende de $\pi(u)$ y no de u.

La familia de funciones $\Psi_{\beta\alpha}$ para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ se llaman funciones de transición correspondientes al cubrimiento $\{U_\alpha\}$.

Verifican las siguientes propiedades:

1) $\Psi_{\alpha\alpha}(x) = e$ para todo $x \in U_\alpha$

2) $\Psi_{\beta\alpha} = (\Psi_{\alpha\beta})^{-1}$para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta$

3) Para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$,

$$\Psi_{\gamma\alpha}(x) = \Psi_{\gamma\beta}(x)\Psi_{\beta\alpha}(x)$$

Recíprocamente, existe una familia de funciones

$$\Psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

que satisface 1), 2), y 3) , entonces existe un $P(M, G)$ con funciones de transición $\Psi_{\alpha\beta}$.

Definición 3.1.3 *En un haz $P(B, G)$,definimos un campo vectorial fundamental sobre P a la acción de G sobre P.Tenemos el homomorfismo $\sigma : g \to \Xi(P)$, dado por $A \to \sigma(A) = A^*$.*

La totalidad de A^* ,$A \in g$, se denota g^*. Ya que G no tiene punto fijo ,σ es isomorfismo de g en g^* (subálgebra de $\Xi(P)$).Por definición de σ,cada campo vectorial fundamental A^* es inducido por R_{a_t},donde a$_t$ es subgrupo monoparamétrico de G generado por $A \in g$.

Entonces para cada x en P, el vector tangente $(A^*)_x$es tangente a la fibra a través de x.

La fibra es diferenciablemente isomorfa con G, entonces el espacio tangente G_x en x a la fibra es igual a la totalidad de $(A^*)_x$ para $A \in g$. Es decir,

$G_x = \{(A^*)_x, A \in g\}, g \to G_x$ dado por $A \to (A^*)_x$ es isomorfismo de espacios vectoriales

Lema 3.1.4 *.Sea A^* un campo vectorial fundamental correspondiente a $A \in g$.Para cada $a \in G, R_a A^*$ es un campo vectorial fundamental correspondiente a $ad(a^{-1})A$.*

Demostración: Ya que A^* es inducido por R_{a_t}, a_t es subgrupo monoparamétrico de G generado por A , $R_a A^*$es inducido por $R_a.R_{a_t}.R_{a^{-1}} = R_{aa_ta^{-1}}$,donde aa_ta^{-1} es el subgrupo monoparamétrico generado por $ad(a^{-1})A$.

1-$Gl(n,R)$.

Sea F un espacio vectorial real de dimensión n ,y sea $\xi_1, ..., \xi_n$ base de F. El grupo de todos los automorfismos a de F puede ser expresado como el grupo de todas las matrices no singulares $(a_{ij}) = a$ tales que $a(\xi_j) = \sum_k a_{kj}\xi_k$, $j = 1, ..., n$; es llamado grupo lineal general,$Gl(n,R)$,grupo con la ley usual de producto de matrices.

$Gl(n,R)$es un conjunto abierto.Así, es la subvariedad abierta de R^{n^2}.

Con esta estructura es variedad diferenciable y en consecuencia, es Grupo de Lie.

2-*Espacio homogéneo G/H.*

Sea G un grupo de Lie y H subgrupo cerrado de $G.H$ actúa diferenciablemente sobre G a la derecha, es decir :

$$(x, a) \in G \times H \to xa \in G$$

Así, tenemos un haz de fibrados principales , $G(B,H)$ sobre la variedad base G/H con grupo fundamental H.

Ya que las traslaciones a izquierda de G en G conmutan con la acción de H en G ,tenemos que G actúa sobre la variedad base G/H de manera natural G es grupo de Lie de transformaciones sobre G/H ,el cual es transitivo

Las dos afirmaciones anteriores quedan como ejercicios.

3-*Haz de marcos de referencia.*

Sea B una variedad diferenciable. Un marco de referencia (frame) x en $u \in B$ es un conjunto de vectores tangentes linealmente independientes $(X_1, ..., X_n)$ en u. Sea P el conjunto de todos los "frames " x en todos

los puntos de B. Cada a $\in Gl(n,R)$ actúa sobre P a la derecha : si $a = (a_{ij})$ y $x = (X_1, ..., X_n)$ entonces

$xa = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}X_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{nj}X_j)$ el cual es otro "frame "en el mismo punto de x.

Si x es un frame en u, $\pi(x) = u$ define una proyección de P en B.

Si tomamos coordenadas locales $(u^1, ..., u^n)$ en un entorno coordenado U de B, cada "frame "$x \in \pi(U)$ puede ser expresado en la forma $x = (X_1, ..., X_n), X_i = \sum_{k=1}^{n}(X_i^k)\frac{\partial}{\partial u^k}$ donde (X_i^k) es matriz inversible.

Recíprocamente , cada matriz no singular (X_i^k) define un "frame "x expresado como anteriormente.

Tomando $(u^1, ..., u^n)$ y (X_i^k) $i, k = 1, ..., n.$ como coordenadas locales en $\pi^{-1}(U)$,podemos hacer P una variedad diferenciable.

Es fácil verificar que P es entonces un haz de fibrados principales sobre la base B con grupo estructural $G = Gl(n, R)$.

Sea F un espacio vectorial n-dimensional con base fija $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$.

G actúa sobre F mediante : $a\xi_j = \sum_{i=1}^{n}(a_{ij})\xi_j$ para a=(a_{ij}).

Con la fibra F , el haz fibrado P es el llamado TB, fibrado tangente de B.

Capítulo 4

Conexión en el haz de fibrados principales

4.1 Conexión en haz de fibrados principales

Sea P un haz de fibrados principales diferenciables con base B y grupo estructural $G, (P(B,G))$.

En cada punto x deP, P_x es el espacio tangente a P y G_x es subespacio de P_x tangente a la fibra a través de x.

Definición 4.1.1 *Una conexión Γ en P es la elección de un subespacio tangente Q_x en cada punto x de P, el cual satisface las siguientes condiciones:*

1-P_x es la suma directa de Q_x y G_x

2- Para cada $a \in G$,$x \in P, Q_{xa}$ es la imagen de Q_x por R_a.

3-Q$_x$ depende diferenciablemente de x.

Respecto de esta última condición: Dado un campo vectorial X (no necesariamente diferenciable) sobre P (ó un subespacio abierto de P) , tenemos en cada punto la descomposición (condición 1-)

$$X_x = Y_x + Z_x \text{ donde } Y_x \in G_x, Z_x \in Q_x$$

La asociación $x \to Y_x$ da un campo vectorial llamado *componente vertical.*

La asociación $x \to Z_x$ da un campo vectorial llamado *componente horizontal.*

Ahora, la condición 3- significa que si un campo vectorial X es diferenciable, tambien lo es la componente horizontal Z de X (obviamente,tambien la vertical).

Cuando una conexión es dada, llamamos a Q_x subespacio horizontal en x.

La componenete vertical (horizontal) de un campo vectorial X se denota vX (hX).

X es vertical si $vX = X$, (idem horizontal).

Dada una conexión Γ en P , podemos definir una 1-forma $w$sobre P con valores en g de la siguiente manera:

Hemos visto que G_x para $x \in P$ es el conjunto de todos los vectores tangentes de la forma $(A*)_x$ para $A \in g$, donde $A*$ es el campo vectorial fundamental correspondiente a $A \in g$.

Ahora, w_x está definido por ser la aplicación lineal de G_x en g que aplica $(A*)_x \to A$ y el cual aplica $Z \in Q_x$ en 0 de g.

A partir de esta definición sigue que si X es campo vectorial diferenciable sobre P, entonces $w(X) = w(vX)$.

Queda como ejercicio ,probar la diferenciabilidad de w, usando la condición 3-.

4.2 Forma conexión

La forma w es llamada *forma conexión* de la conexión dada.

Satisface:

a-$w(A^*) = A$

b-Para cada $a \in G, R_a$ transforma w en $ad(a^{-1})w$, es decir,

$$(R_a^*.w)(X) = (ad(a^{-1}))(w(X))$$

para cualquier campo vectorial X , y $ad(a^{-1})$ es la representación adjunta de G en g.

La prueba de a- es trivial desde la definición.

La prueba de b-:

Si X es un campo vectorial horizontal , entonces R_aX tambien lo es , por 2-.

Por lo tanto,$w(X)$ y $(R_a^*.w)(X) = w(R_a.X)$ son ambos cero.

Si X es campo vectorial fundamental A* entonces $R_a.X$ es el campo vectorial fundamental correspondiente a $ad(a^{-1})A$ (lema anterior).

Por lo tanto, tenemos

$(R_a^*.w)(X) = w(R_a.X) = ad(a^{-1})A = ad(a^{-1})(w(X))$.

La primera igualdad se satisface por definición de w y por que X es invariante a derecha, la segunda , por definición de $ad(a^{-1})$, y la última igualdad se cumple por ser A^* campo vectorial fundamental de X.

Falta aún probar el caso general, el cual queda como ejercicio.

Recíprocamente, dada una 1-forma diferenciable w sobre P con valores en g satisfaciendo a) y b), podemos definir una conexión Γ cuya forma conexión es w.

Para esto sólo debemos definir Q_x como el conjunto de vectores tangentes en x los cuales son aplicados en 0 de g por w_x.

Queda como ejercicio su verificación.

La proyección canónica $\pi : P \to B$ para $x \in P$ induce una aplicación π, $\pi : P_{x \to} T_u$ de B en $\pi(x) = u$.

Cuando una conexión es dada , vemos inmediatamente que $\pi : Q_x \to T_u$ es isomorfismo.

4.3 Levantamiento (Lifting)

Definición 4.3.1 *El levantamiento (lift) de un campo vectorial X de B es un único campo vectorial X^* sobre P, el cual es horizontal y "cubre X ", o sea, X^* y X están $\pi-$ relacionados, $\pi X^* = X$.*

La existencia y unicidad del levantamiento se obtiene del hecho de que π es isomorfismo lineal de Q_x en T_u.

Para probar la diferenciabilidad del levantamiento X^* para un campo vectorial diferenciable sobre B se procede como sigue:

Tomamos un entorno U de u tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo a $U \times G$. Usando esta descomposición , tomamos cualquier campo vectorial diferenciable Y^* en $\pi^{-1}(U)$ tal que $\pi Y^* = X$.

Entonces la componente horizontal hY^* (diferenciable) coincide con X^* en $\pi^{-1}(U)$.

Lema 4.3.2 *El levantamiento de X^* es invariante por R_a para cada $a \in G$. Recíprocamente, si X^* es campo vectorial horizontal sobre P el cual es invariante por R_a, entonces es el levantamiento de algún campo vectorial X sobre B.*

Demostración: Si X^* es el levantamiento e X,entonces $R_a X^*$ es tambien el levantamiento de X por que es horizontal y $\pi R_a X^* = \pi X^* = X$.

La unicidad implica que $R_a X^* = X^*$, es decir , X^* es invariante por $R_{a.}$

Si X^* es campo vectorial horizontal invariante por R_a,podemos definir un campo vectorial X sobre B por

$$X_u = \pi(X^*)_x$$

Es independiente de la elección de $x \in P$, tal que $\pi(x) = u$.
Veámoslo:
Si tomamos $y = R_a.x$, en lugar de x, entonces

$$\pi(X^*)_y = \pi R_a(X^*)_x = \pi(X^*)_x.$$

se verifica que X^* es el levantamiento de X.

Lema 4.3.3 *Sean X^* e Y^* levantamientos de X e Y respectivamente. Entonces $X^* + Y^*$ es el levantamiento de $X + Y$, y $h[X^*, Y^*]$ es el levantamiento de $[X, Y]$.*

Demostración: La primera afirmación es trivial.
La segunda,considerando la descomposición en suma directa y la unicidad , queda

$$\pi h[X^*, Y^*] = h[X^*, Y^*] = [X, Y]$$

Proposición 4.3.4 *Dada una conexión en P , la distribución $x \to Q_x$ es diferenciable.*

Demostración: Sea $x \in P$ y $\pi(x) = u$ y U un entorno de u,con $u^1, ..., u^n$ coordenadas locales .
Consideremos $\frac{\partial}{\partial u^i} = X_i$ en m U ,y sus levantamientos X_i^* en $\pi^{-1}(U)$.
Es inmediato que $\{X_1^*, ..., X_n^*\}$ forma una base local de la distribución $x \to Q_x$ en $\pi^{-1}(U)$.

4.4 Paralelismo

Dada una conexión Γ en P, definiremos traslación paralela de elementos de la fibra a lo largo de una curva en B.

Recordemos que en una variedad diferenciable, un campo vectorial se dice paralelo a lo largo de una curva en un punto de dicha curva si su derivada covariante a lo largo de la curva en ese punto es nula . Se extiende el concepto de transporte paralelo a lo largo de la curva , si lo es en cada punto de ella.

Intuitivamente,el campo vectorial unitario es ortogonal al campo vectorial tangente a la curva en cada punto, y esa es una manera de visualizar el paralelismo

La traslación paralela , siempre en una variedad diferenciable, consiste en dar un campo vectorial que en algún punto prefijado se comporte como paralelo a un vector dado.

Una curva en P se dice *horizontal* si sus vectores tangentes son todos horizontales.

Dada una curva $\alpha = \alpha(t)$ en B , un levantamiento de α es una curva horizontal $\alpha^* = \alpha^*(t)$ en P tal que

$\pi\alpha^*(t) = \alpha(t), 0 \leq t \leq 1$.

Si tomamos la curva $\alpha(t)$ en B , su tangente α '(t) puede ser extendida a un campo vectorial X definido en cierto abierto U que contenga a la curva.

Tomamos X^* el levantamiento de X definido en $\pi^{-1}(U)$.Entonces cada curva integral de X^* a través de cualquer punto de la fibra sobre u_o es una curva horizontal , la cual proyecta sobre $\alpha(t)$.

Recíprocamente, cada levantamiento de $\alpha(t)$ debe ser una curva integral de X^*.

Este argumento es la clave de la demostración de existencia y unicidad del levantamiento de $\alpha(t)$, el cual pasa a través de cada punto de P sobre $\alpha(t_o)$.

Resumiendo:

Proposición 4.4.1 *Sea $\alpha(t)$ una curva en B y sea x_o cualquier punto en P tal que $\pi(x_o) = u_o$. Entonces existe un y sólo un levantamiento $\alpha^*(t)$ el cual comienza en x_o.*

Lema 4.4.2 *Sea G un grupo de Lie y g su álgebra de Lie ($g = G_e$).Sea Y_t una curva diferenciable por partes para $0 \leq t \leq 1$.Entonces existe en G una curva $\alpha(t)$ tal que $\alpha(0) = e$, $\alpha'_t.\alpha_t^{-1} = Y_t$, $0 \leq t \leq 1$.*

Observemos que Y_t es una curva en g formada por un elemento Y de g, entonces la curva $\alpha(t)$ no es otra cosa que un subgrupo monoparamétrico de G generado por Y.

La ecuación diferencial $\alpha'_t.\alpha_t^{-1} = Y_t$ es una generalización de la ecuación diferencial para un subgrupo monoparamétrico.

Ahora veremos que entenderemos por desplazamiento paralelo a lo largo de una curva $\tau = \tau(t)$,$0 \leq t \leq 1$ en B.

Sea x_o en P con $\pi(x_o) = u$. El único levantamiento de τ con punto inicial x_o se denota $\tau^*(x_o)$.

Su punto final es algún punto x_1 tal que $\pi(x_1) = u_1$.

Definimos desplazamiento paralelo como una aplicación que asigna x_o en x_1.

Usaremos la misma notación para la curva y su desplazamiento. Así, τ es una aplicación de la fibra sobre u_o en la fibra sobre u_1.Ya que $R_a\tau^*(x_o)$

es el levantamiento de τ con punto inicial $x_o a$,tenemos $\tau(xa) = \tau(x)a$, para cada $a \in G$ y x verifica $(x) = u_o$.

Ejercicio:τ es isomorfismo diferenciable de la fibra sobre u_o en la fibra sobre u_1.

Con más detalle , si $\tau(s)$, con $0 \leq s \leq 1$ son curvas homotópicas diferenciables uniendo u_o con $u_1$entonces para cualquier x_o con $\pi(x_o) = u_o$, existe una curva continua $\alpha(s)$,$0 \leq s \leq 1$,en G tal que $\tau(s)x_o = \tau_o(x_o)a_s$ para cada s.

Esto se enuncia: el desplazamiento paralelo depende continuamente sobre curvas homotópicas diferenciables en B.

4.5 Grupo de holonomía

Usaremos el concepto de desplazamiento paralelo asociado a una conexión dada.

Sea $u \in B$ y C_u el conjunto de todas las curvas cerradas diferenciables por partes en u.

Para cada $\tau \in C_u$, el desplazamiento paralelo correspondiente a τ es un automorfismo de la fibra $G_u$sobre u ,es decir, una transformación diferenciable de G_u tal que $\tau(xa) = \tau(x)a$ para cada x en G_u y $a \in G$.

Definición 4.5.1 *El conjunto de todos estos automorfismos correspondientes a $\tau \in C_u$ forman grupo , llamado Grupo de Holonomía $\Phi_u, u \in B$.*

Fijando x en G_u, identificamos Φ_u con un subgrupo del grupo de estructura G; es decir, para cada $\tau \in \Phi_u$ asociamos el único elemento $a \in G$ tal que $\tau(x) = R_a x$.

Si tenemos $\tau'(x) = R_{a'}x, \tau' \in \Phi_u$ nos queda $(\tau\tau')(x) = \tau(R_{a'}x) = r_{a'}\tau(x) = R_{a'}R_a(x) = R_{aa'}x$

o sea, aa' está asociado a $\tau\tau'$, y esto nos da un homomorfismo de Φ_u en G,que será isomorfismo restringiéndo la imagen.

La imagen de Φ_u por este isomorfismo es llamado grupo de holonomía Φ_x con referencia al punto x.

Φ_x puede definirse directamente.

Φ_x es el subgrupo de G consistente de todos los elementos $a \in G$ tales que x y xa pueden ser unidos por una curva horizontal en P.

Si xa es unido a x por una curva horizontal τ^* , entonces la proyección τ de τ^* es una curva cerrada en $u \in B$ cuyo levantamiento es τ^* , esto es , $\tau(x) = xa$, lo que prueba que $a \in \Phi_x$.

Recíprocamente, si $a \in \Phi_x$, existe $\tau \in C_u$ tal que $\tau(x) = xa$.

Esto significa que el levantamiento τ^* de τ a través de x es una curva horizontal de x a xa.

Si existe una curva horizontal que une x con y en P, escribimos $x \sim \dot{y}$. ;esta es una relación de equivalencia.

Sea C_u^o el conjunto de todas las curvas cerradas en u que son homotópicas a 0.

Estas curvas forman un subgrupo Φ_u^o en u del grupo de holonomía Φ_u , que se llama grupo restringido.

Para cualquir punto de referencia x ,se obtiene análogamente el grupo de holonomia restringido Φ_x^o, subgrupo del Φ_x.

Ejemplo 4.5.2 *Disco de Poincaré*

$D = \{(u,v) \in R^2 / \ u^2 + v^2 < 1\}$, el elemento de arco es $ds^2 = \frac{4(du^2+dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2}$ y los símbolos de Christoffel no nulos son :

$\Gamma_{11}^1 = \frac{2u}{1-u^2-v^2}$, $\Gamma_{11}^2 = \frac{-2v}{1-u^2-v^2}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{2v}{1-u^2-v^2}$

$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{2u}{1-u^2-v^2}$, $\Gamma_{11}^2 = \frac{-2v}{1-u^2-v^2}$, $\Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{11}^1$

$\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2$.

Las ecuaciones de las curvas geodésicas en este espacio son:

$u' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{22}^2 u'v' - \Gamma_{11}^1 v'^2 = 0$

$v' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{11}^1 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones , obtenemos que $\alpha(t) = (0, \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1})$ es la parametrización de la curva geodésica que pasa por $(0,0)$ y tiene vector velocidad $(0,1)$.

Mediante esta solución y el grupo de isometrías podemos obtener la expresión paramétrica de las geodésicas que pasan por un punto determinado (x_o, y_o) y tienen vector tangente (a,b) en ese punto.

El grupo de isometrías de D está dado por las transformaciones de Moebius de la forma

$w(z) = \frac{pz+q}{\overline{q}z+\overline{p}}$ donde $p\overline{p} - q\overline{q} = 1$.

En particular , la transformación que permite hallar las geodésicas que pasan por el origen con dirección cualquiera (A,B) es $w_o(x,y) = ((a^2-b^2)x - 2aby, 2abx + (a^2-b^2)y)$ con $2ab = A$ y $a^2 - b^2 = B$.

Si T es un triángulo en D , θ_i con $i : 1,2,3$,ángulos interiores y θ'_i, con $i : 1,2,3$, sus complementarios, por el teorema de Gauss-Bonnet se sabe que $\int\int_t K d\sigma + \sum \theta'_i = 2\pi$, donde $K = -1$.

El área de $T = \pi - \sum \theta_i$; usaremos este resultado para conocer el grupo de holonomia de D.

Sea α una curva cerrada en el origen, dada por un triángulo geodésico T y sea v el vector tangente en el origen que trasladamos paralelamente hasta cada vértice.Obtenemos que el ángulo entre el vector transportado y el -v es $\sum \theta_i$ .sigue que el ángulo entre el vector transportado y v es igual a $\pi - \sum \theta_i = \acute{a}rea(T)$

Entonces para que el transporte paralelo de v sea el mismo v , el área de T debería ser nula, luego $\Phi_0 \neq \{id\}$.

Como las geodésicas en D son las circunferencias ortogonales a S^1,los triángulos geodésicos son generados por la intersección de estas circunferencias . Tomemos dos triángulos , T y T', con un vértice en el

origen y los otros dos en el infinito.

Los ángulos de T y T' con vértice en el infinito son nulos,entonces área $(T) = \pi - \theta_2$ y

área (T')=$\pi - \theta_1$. Aproximando $\theta_2 \to \theta_1$ se tiene que , llamando z_T',al transporte en T', y z_T al transporte en T, $z_T' \to z_T$ cuando $\theta_2 \to \theta_1$. Ahora sabemos que Φ_o es contínuo preserva bases y es conexo, por lo tanto, $\Phi o = SO(2,R)$. Como D es conexo, $\Phi_{(u,v)} = SO(2,R)$ para todo $(u,v) \in D$.

4.6 Forma curvatura y Ecuación de Estructura

Sea ω una forma conexión de una conexión Γ dada en P

Definición 4.6.1 *La diferencial covariante de una forma diferencial α , con valores en cualquier espacio vectorial , de grado p sobre P se define por :*

$$(D\alpha)(X_1, X_2, ..., X_{p+1}) = (d\alpha)(hX_1, hX_2, ..., hX_{p+1})$$

Definición 4.6.2 *para cualquier campo vectorial X_i , $i = 1, 2, .., p+1$ sobre P donde d denota la diferenciación usual exterior y h la componente horizontal .*

Definición 4.6.3 $\Omega = D\omega$ *se denomina forma curvatura de la conexión* Γ *. Ω es de este modo una 2-forma g valuada sobre P.*

Proposición 4.6.4 *Sea Ω forma curvatura de una conexión dada Γ en P. Entonces $\forall\ a \in G$,*

$$R_a^*.\Omega \quad = \quad ad(a^{-1})\Omega$$

Una tal 2-forma se denomina $forma\ G - valuada$ del tipo $ad\,(G)$.

Demostración :

Para cualquier campo vectorial X sobre P , $R_a^*.h.X = h.R_a^*.X$, además de la proposición anterior se tiene

$(R_a^*.\omega)\,(X) = ad(a^{-1})\,(\omega\,(X))$ para cada $a \in G$ y $\forall\ X$ campo vectorial , entonces

.

$$\begin{array}{lcl} R_a^*.\,(d\omega)\,(hX_1,hX_2,...,hX_{p+1}) & = & dR_a^*\omega(hX_1,hX_2,...,hX_{p+1}) \\ d\omega(hR_a^*.X_1,hR_a^*.X_2,...,hR_a^*.X_{p+1}) & = & dhR_a^*\omega(X_1,X_2,...,X_{p+1}) \\ dh\ ad(a^{-1})\omega(X_1,X_2,...,X_{p+1}) & = & ad(a^{-1})\Omega(X_1,X_2,...,X_{p+1}) \end{array}$$

Lema 4.6.5 *Si A^* es campo vectorial fundamental y X^* un campo vectorial horizontal, entonces $[X^*, A^*]$ es horizontal.*

Demostración :

Se denomina R_{a_t} al subgrupo monoparamétrico que induce el campo vectorial fundamental $A^*(a_t$ es el subgrupo monoparamétrico generado por $A \in g)$.

Se sabe que:

$$[X^*, A^*] = \lim_{t\to 0}(\frac{1}{t})[R_{a_t}X^* - X^*].$$

donde $R_{a_t}X^*$ $\forall t$, es horizontal por que X^* tambien lo es.

Por consiguiente, $[X^*, A^*]$ es horizontal.

Proposición 4.6.6 ($Ecuación\ de\ Estructura$)*Para cualesquiera campos vectoriales X e Y sobre P vale*

$$(d\omega)\,(X,Y) = -\frac{1}{2}\,[\omega\,(X)\,,\omega\,(Y)] + \Omega\,(X,Y)\,.$$

Demostración :

Caso I) X e Y campos vectoriales horizontales. Entonces, por definición de forma conexión, $\omega(X) = \omega(Y) = 0$.Luego, usando la ecuación general de estructura de formas diferenciales se tiene

$$2\,(d\omega)\,(X,Y) = -\omega[X,Y]. \ (1)$$

y $\Omega(X,Y) = d\omega\,(hX,hY) = d\omega\,(X,Y) = -\frac{1}{2}\omega[X,Y]$.

Caso II) $X = A^*, Y = B^*$ campos vectoriales fundamentales.

Nuevamente, usando la ecuación general de estructura de formas diferenciales:

$$2\,(d\omega)\,(X,Y) = -\omega[X,Y] = -[A,B]. \ (2)$$

y $\Omega(X,Y) = d\omega\,(hX,hY) = -\frac{1}{2}\omega[hX,hY] = 0$.

Caso III) $X = A^*$c.v.f., Y horizontal, se obtiene por el mismo camino, más el lema anterior,se tiene que:

$$2\,(d\omega)\,(X,Y) = 0. \ (3)$$

y $\Omega(X,Y) = d\omega\,(hX,hY) = -\frac{1}{2}\omega[hX,Y] = 0$.

Como cualquier otro campo es combinación lineal de los anteriores y todos los términos de los resultados (1), (2) y (3), son 2-formas bilineales g-valuadas sobre P, queda demostrada la ecuación de estructura.

Corolario 4.6.7 *Si X e Y son campos vectoriales horizontales entonces la componente vertical de $[X,Y]$ está dada por -2$\Omega(X,Y)$.*

4.7 Homomorfismo de Conexiones

Recordando la noción de $Homomorfismo\ f\ de\ un\ haz\ de\ fibrado\ P\,(B,G)$ en $P'\,(B,G')$ sobre la misma base B : $\exists$ un homomorfismo (denotado por la misma letra) f,de G en G tal que $f\,(xa) = f\,(x)\,f\,(a)\ \forall x \in P$ y $a \in G$ y la aplicación inducida f de B en si mismo es una transformación diferenciable de B.

Proposición 4.7.1 *Un homomorfismo f de $P\,(B,G)$ en $P'\,(B,G')$ aplica una conexión Γ en P en una conexión Γ' en P' de tal modo que f aplica subespacios horizontales de Γ en subespacios horizontales de Γ' .*

Demostración :

Tomando $x \in P$ tal que $f(x) = x'$,se busca definir $Q_{x'}$ como la imagen por f del subespacio horizontal Q_x de P.

Con el objeto de mostrar que $Q_{x'}$ es independiente de la elección de x se toma y cualquier otro punto tal que $f(y) = x'$, puesto que f es un homorfismo que induce un isomorfismo f de B en sí mismo se tiene entonces un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & P & \rightarrow & P' & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi' \\ & B & \rightarrow & B & \\ & & f & & \end{array}$$

$\pi' f = f\pi$ siendo la f del segundo miembro un difeomorfismo y π' y π la proyección de P' en B y la proyección de P en B respectivamente; entonces x e y deben estar en la misma fibra de P y $y = xa$ para algún $a \in G$. Luego $f(y) = f(x)\, f(a) = f(x)$ y de este modo $f(a)$ es el elemento identidad e' de G'. Puesto que $Q_y = R_a.Q_x$ se tiene $f.Q_y = f.R_aQ_x = R_{f(a)}.f.Q_x = f.Q_x$.

Observación : Si $y = xc$, entonces $Q_{y'} = R_{c'}.Q_{x'}$ donde $x' = f(x)$, $y' = f(y)$ y $c' = f(c)$.

Ahora , sea x'' un punto arbitrario de P' , éste puede expresarse como $x'' = x'.a'$ donde $x' = f(x)$ es un cierto punto de $f(P)$ y $a' \in G'$. Se define $Q_{x''} = R_{a'}.Q_{x'}$, donde $Q_{x'}$ fue definido antes .

Resta mostrar que $Q_{x''}$ es independiente de la elección de la representación $x'' = x'.a'$, con $x' \in f(P)$ y resulta facilmente de la observación anterior.Queda así definido $Q_{x'}, \forall\, x' \in P'$.

Restaría verificar que la elección realizada del subespacio horizontal en P' define una conexión en el mismo.

1) Para demostrar que en cada punto x', $P'_{x'} = Q_{x'} \oplus G_{x'}$,se hace uso del diagrama conmutativo antes mencionado. Puesto que f da un isomorfismo lineal del espacio tangente $T_{u,U} = \pi(x)$ sobre $T_{u',U'} = f(U) = \pi'(x')$, se ve entonces que π' aplica $Q_{x'}$ en $T_{u'}$ y por lo tanto, $dimQ_{x'} = n$,con n, la dimensión de B.

Si $X' = f(X)$, $X \in Q_x$, pertenece a $G_{u'}$ tenemos $0 = \pi' X' = f\pi(X)$ en $T_{u'}$ lo cual implica que $\pi(X) = 0$ en T_u. Puesto que π aplica Q_x isomórficamente sobre T_u, eso significa que $X = 0$ y, por consiguiente $X' = 0$.

2) Por construcción, de $Q_{x'}$, queda probado que para todo $a \in G'$, $x' \in P'$, $Q_{x'a}$ es la imagen de $Q_{x'}$ por R_a.

3)Para demostrar que $Q_{x'}$ depende diferenciablemente de x', basta demostrar que, dado un campo vectorial diferenciable $X' \in P'$ sus componentes, horizontal y vertical, también lo son.

Sea $X' = Y' + Z'$, con Y' componente vertical, Z' componente horizontal respectivamente.

Puesto que $f(Z) = Z'$, Z es componente horizontal diferenciable por la Γ dada en P, y $f(Z) = (\pi')^{-1} \circ f \circ \pi(Z)$, f y $\pi' \mid_{Q_{x'}}$son difeomorfismos, entonces el segundo miembro, aplica campos diferenciables en diferenciables.

Recíprocamente, si en P y P' están definidas las conexiones Γ y Γ' respectivamente, y si un homomorfismo f aplica Γ en Γ', del modo descripto en la proposición,se dice que f preserva conexiones.

Si f es una inyección de P en P', se dice que, dada una conexión Γ' en P' es reducible a la conexión Γ en P si f aplica Γ en Γ'.

Si f es un automorfismo de P en sí mismo, el cual aplica Γ en sí misma, se dice que f es un automorfismo de la conexión Γ de P.

Observación: f induce un homomorfismo natural del grupo de holonomía Φ de Γ , en el grupo de holonomía Φ' de Γ'.

Es decir, dada una curva horizontal de x_o a x_{oa}, la cual da un elemento $a \in \Phi$, su imagen por f es una curva horizontal la cual define $f(a) \in \Phi'$.

Incluímos , sin demostración, el siguiente teorema.

Teorema 4.7.2 *(Teorema de reducción para conexiones)*
Sea $P(B, G)$ un haz de fibrados principales el cual satisface el segundo axioma de numerabilidad, y sea Φ el grupo de holonomía de una conexión dada Γ en P .Entonces, el grupo estructural G es reducible a su subgrupo Φ , y la conexión Γ es reducible a una conexión en el haz de fibrados reducido $P'(B, \Phi)$ cuyo grupo de holonomía es exactamente Φ.

4.8 Teorema de Holonomía

Sea Φ el grupo de holonomía con punto de referencia x_o de una conexión Γ en $P(B, G)$. Se sabe que si B satisface el segundo axioma de numerabilidad ,Φ es grupo de Lie con Φ^o, el grupo de holonomía restringido, éste es un grupo de Lie conexo igual a la componente conexa de la identidad en el grupo de holonomía Φ.Φ/Φ° es , a lo sumo , numerable.

El siguiente teorema describe cómo el *álgebra de holonomía* ,

álgebra de lie de Φ^o, está determinada por la forma curvatura.

Teorema 4.8.1 *(Teorema de holonomía) El álgebra de holonomía $\Im$ es la subálgebra de g la cual es generada por todos los elementos de la forma $\Omega_x(X^*, Y^*)$, donde x recorre el conjunto de todos los puntos que podrían unirse a x_o por una curva horizontal y X^* y Y^* son vectores horizontales arbitrarios en x.*

Demostración :

Primero se probará el teorema en el caso en que todo punto de P pueda unirse a x_o por una curva horizontal .Aplicamos el hecho de que si $P(B,G)$ satisface el segundo axioma de numerabilidad y Φ es el grupo de holonomía de la conexión Γ en P , entonces el grupo estructural es reducible a su subgrupo Φ y la conexión en el haz reducido $P'(B,\Phi)$ tiene grupo de holonomía Φ. En el caso que tratamos el grupo de holonomía es igual a G .

Sean X e Y dos campos vectoriales cualesquiera de B y sean X^* e Y^*los levantamientos de X e Y ,respectivamente.

El conjunto de $A = \omega_x [X^*, Y^*] = -2\Omega_x (X^*, Y^*)$,según corolario de ecuación de estructura,y esto ocurre $\forall x \in P$; los X e Y que cumplen con la propiedad antes mencionada forman una subálgebra g' de g . Se probará que g' es igual a g,la cual es el álgebra de holonomía f para el caso particular de P que se está tratando.

En cada punto $x \in P$, sea Δ_x el subespacio de P_x el cual está generado por el subespacio Q_x y el subespacio $\rho'_x = \{A^*_x \ , A \in g'\}$,donde A^* es un campo vectorial fundamental correspondiente a $A \in g'$.Si $dim\ B = n$, $dim\ g = r$ y $dim\ g' = s$, entonces Δ_x es un subespacio tangente de dimensión $n + s$.

Se probará a continuación que la distribución $x \to \Delta_x$ es diferenciable.

Sea $A_1, A_2, ..., A_s$ una base de g' y sean A^*_i los campos vectoriales fundamentales correspondientes a los A_i . Para cualquier entorno U en B $(\pi^{-1}(U) \simeq U \times G)$, pueden tomarse n campos vectoriales $X_1, X_2, ..., X_n$ en B los cuales generan el espacio tangente $T_u$en cada punto $u \in U$.

Entonces los levantamientos $X^*_1, X^*_2, ..., X^*_n$ generan el subespacio horizontal Q_x en cada punto $x \in \pi^{-1}(U)$.

Por otra parte, $A^*_1, A^*_2, ..., A^*_s$ generan $\{(A^*)_x \ , A \in g'\}$ en cada $x \in \pi^{-1}(U)$. Se ha demostrado así, que Δ admite una base local $A^*_i \ , X^*_i, \ i = 1, 2, ..., s$ y $j = 1, 2, ...n$ en $\pi^{-1}(U)$.

Ahora se probará que la distribución es involutiva :

Para ello es suficiente probar que , $[A^*_i, A^*_j], [A^*_i, X^*_j]$,y $[X^*_i, X^*_j]$ pertenecen a Δ .

El primero $\in \Delta$ debido a que g' es la subálgebra , el segundo es horizontal ya que X^*_j lo es (ver proposición anterior), de modo que está en Δ por definición de la misma , finalmente el tercero,tiene componente vertical en x que es igual a A^*_x, donde,$A = \omega_x[X^*_i, X^*_j] = -2\Omega_x(X^*_i, X^*_j) \in g'$,así si su componente vertical pertenece a g' entonces$[X^*_i, X^*_j] \in \Delta$, entonces $x \to \Delta_x$ es diferenciable e involutiva .

Por el teorema de Frobenius ,por cada punto x_o de P pasa una variedad integral maximal de Δ ,$P(x_o)$.

Además ,todo punto de P está ,para el caso particular que se está demostrando , en una curva horizontal que pasa por x_o, la cual debe estar en

$P(x_o)$ puesto que la distribución contiene todos los subespacios horizontales Q_x. De modo que $P \subset P(x_o)$,entonces, como $P(x_o)$ es subvariedad de P, $P = P(x_o)$ .Lo cual implica que la dimensión de $P(x_o) = n + s$ es igual a la dimensión de $P = n + r$, entonces $s = r$,por consiguiente , $g = g'$.

Ahora, para tratar el caso general , sea $P'(B, \Phi)$ el haz de fibrados reducido con una conexión reducida Γ' (ver teorema de reducción de conexiones) .

Se sabe que el teorema es válido para la conexión Γ' dada en P'.

Para probarlo para P , es suficiente ver que el grupo de holonomía y por consiguiente el álgebra de holonomía de Γ son los mismos que los de Γ' y que el conjunto de los $\Omega_x(X^*, Y^*)$ de la formulación del teorema es exactamente el conjunto de los $\Omega'_x(X^*, Y^*)$ (con Ω' la forma curvatura de Γ') .

Lo primero se sabe por el teorema de reducción de conexiones .

La segunda afirmación sigue del hecho que

$$\Omega'_x(X^*, Y^*) = \Omega_x(X^*, Y^*)$$

para cualquier $x \in P'$ y para los levantamientos X^*, Y^* de cualesquiera dos campos vectoriales X e $Y \in B$, debido a que se obtuvo que para Γ', $g = g'$.

Por consiguiente se puede concluir que el subespacio de g generado por todos las formas $\Omega_x(X^*, Y^*)$ forma una subálgebra que ,por el teorema de holonomía ,es álgebra de holonomía.

4.9 Existencia de conexiones

Probablemente hay varias maneras de probar la existencia de conexiones en un haz de fibrados principales que satisfaga el segundo axioma de numerabilidad.

Supondremos que G es conexo y mostraremos la existencia de una conexión en $P(B, G)$ a partir de la existencia de una métrica riemannianasobre una variedad diferenciable.

Sea K subgrupo compacto maximal de G.Es sabido que el grupo estructural G de $P(B, G)$ puede

reducirse a K.

Sea, ahora, $P'(B, K)$ el haz reducido. Aplicando el Teorema 4.7.2, si existe una conexión

en $P'(B, K)$ entonces ésta induce una conexión en $P(B, G)$.

Por lo tanto, es suficiente probar la existencia de conexión en $P(B, G)$ con G compacto.

Ya que P satisface el segundo axioma de numerabilidad existe métrica riemanniana sobre P. Llamaremos $g(X,Y)$ al producto interno entre dos vectores tangentes X e Y con respecto a esta métrica riemanniana.

Ahora, podemos definir una nueva métrica riemanniana invariante respecto de R_a $a \in G$, por

$$g^*(X,Y) = \int_G g(R_aX, R_aY)da$$

donde da indica la medida de Haar bi-invariante y normalizada sobre el compacto G.

Para cada $x \in P$ sea Q_x el complemento ortogonal al subespacio tangente a la fibra, G_x, con respecto a la métrica $g^*(X,Y)$.

Queda

$$P_x = G_x \oplus Q_x$$

Para cada $a \in G$, $g^*(X,Y)$ es R_a-invariante ,entonces $Q_{xa} = R_aQ_x$.

La aplicación $x \to Q_x$ es diferenciable (ejercicio); entonces $x \to Q_x$ define una conexión en $P(B,G)$.

1-Conexión Lineal.

Una conexión lineal sobre una variedad diferenciable B es una conexión en el haz de fibrados de marcos lineales :

Sea B una variedad diferenciable de dimensión n , un marco lineal u en un punto $x \in B$ es una base ordenada $X_1, X_2, ..., X_n$ del espacio tangente T_x de B .

Sea FB el conjunto de todos los marcos lineales es todos los puntos de B y sea $\pi : FB \to B, (u \to x)$, si u es un marco lineal en x.

Se define una acción de $G = Gl\,(n,R)$ en FB a derecha:

si $a = (a_{ij}) \in Gl\,(n,R)$ y $u = (X_1, X_2, ..., X_n)$ es un marco lineal en x ,entonces ua es el marco lineal $(Y_1, ..., Y_n)$ en x definido por : $Y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j\, X_j$.

Con el objeto de introducir una estructura diferenciable en FB se procede de la siguiente manera :Sea $(x^1, x^2, ..., x^n)$ un sistema de coordenadas locales en un entorno U en B .

Si $x \in U$ entonces $(\frac{\partial}{\partial x^1})_x, ..., (\frac{\partial}{\partial x^n})_x$ es un marco lineal en x . Entonces todo marco lineal u en x puede ser expresado de manera única en la forma :

$$u = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

con

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_i^j (\frac{\partial}{\partial x^j})$$

donde $\left(x_i^j\right) \in Gl\,(n, R)$.

Se tiene , entonces una aplicación biyectiva: $\Psi : \pi^{-1}\,(U) \to U \times Gl\,(n, R)$, con $\Psi\,(u) = (x, (x_i^j))$.

En FB se tiene una estructura de variedad diferenciable tomando (x^i, x_i^j) como un sistema de cooerdenadas locales en $\pi^{-1}\,(U)$.

Es claro que la acción $FB \times Gl\,(n, R) \to FB$,$u \to ua$ es C^∞ .

De modo que si $\varphi\,(u) = \left(x_i^j\right) \in Gl\,(n, R)$ entonces FB es un haz de fibrado principal sobre B con grupo de estructura $Gl\,(n, R)$ y proyección π .

Entonces FB es el *haz de fibrado principal de los marcos lineales* de B .

Puede observarse que si $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de R^n ,y $u = (X_1, X_2, ..., X_n)$ es un marco lineal en x , entonces u puede ser considerado como un isomorfismo lineal $u : R^n \to T_x B$ definido por $u\,(e_i) = X_i$ con $1 \leq i \leq n$.

Por otra parte , una matriz no singular $a \in Gl\,(n, R)$ puede considerarse como un automorfismo $a : R^n \to R^n$.

Así, la acción de $Gl\,(n, R)$ en FB está dada por la composición :

$$R^n \xrightarrow{a} R^n \xrightarrow{u} T_x B$$

Como el grupo estructural $Gl(n, R)$ puede ser reducido al grupo ortogonal existe una conexión lineal sobre cualquier variedad diferenciable que satisfaga el segundo axioma de numerabilidad.

2-Conexiones afines

Una conexión afín sobre una variedad diferenciable B es una conexión en el haz de fibrados afín $\widetilde{P}(B, \widetilde{G})$ sobre B, donde $\widetilde{G}$ es el grupo de todas las transformaciones afines de un espacio afín de dimensión n.

Si $P(B, G)$ es el haz de marcos de referencia con , $G = Gl(n, R)$; G puede ser considerado como un subgrupo de $\widetilde{G}$

El haz afín $\widetilde{P}(B, \widetilde{G})$ es un haz fibrado principal sobre B obtenido a partir de $P(B, G)$ extendiendo su grupo de estructura.

Geométricamente, el haz $\widetilde{P}$ puede ser considerado como el haz de fibrados principales asociado al haz de fibrados tangentes TB cuyas fibras (espacios tangentes en cada elemento de B) tiene una estructura afín natural.

Capítulo 5

Conexiones Lineales

5.1 Conexiones lineales

En este capítulo haremos una rápida recorrida por las conexiones lineales y la conexión afín.

Dicho de otro modo,y en respuesta a las afirmaciones hechas en la introducción, ya sabemos qué es una conexión y de su existencia.

Ahora veremos por qué derivamos en R^n como lo hacemos.

Sea B una variedad diferenciable n y P el haz de fibrado principal de marcos de B cuyo grupo estructural G es el grupo general lineal $Gl\,(n, R)$.

Todo punto $x \in P$ da un isomorfismo lineal de un espacio vectorial $n-$dimensional F sobre el espacio tangente T_u de B en $u = \pi\,(x)$.

Sea P es el haz de fibrados principales .Sea $\pi : P \to B$ la proyección.Sea F una variedad diferenciable tal que G actúa a izquierda sobre F, y así G actúa a derecha sobre $P \times F$ de la siguiente manera:

$(x, \xi).a = (x.a, a^{-1}\xi)$, para todo $x \in P, \xi \in F$,$a \in G$.

Sea $E = (P \times F)/G$, se tiene : $\pi_E : P \times F \to E$, $\pi_P : P \to b, p : E \to B$, tal que $p[x, \xi] = \pi(x)$.

Entonces E verifica la propiedad de trivialidad local en el siguiente sentido:dado $u \in B$, existe U entorno de U en B , y un difeomorfismo $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ el cual induce para cada $v \in P$,una aplicación lineal $\theta : P \to F$ dada por $\theta(v) = a\xi$ si y sólo si $\theta(v) = \theta(v)\xi \in F$,donde $\pi_p(v) = u, p[v, \xi] = [u, a\xi]$ con a=$\phi(v)$.

$\phi : \pi^{-1}(U) \to G$ es la aplicación inducida por el isomorfismo correspondiente al haz de fibrados principales $P(B, G)$.

Ahora,

Definición 5.1.1 *Sea E un haz de fibrado sobre B con fibra estandar F,grupo estructural G asociado a P .Se denomina haz de fibrado asociado a P y se* *denota* $E(B, F, G, P)$.

Sea P el haz de fibrados principales asociados al tangente $T(B)$ de B cuya fibra estandar es F y cuyo grupo estructural es $Gl(n, R)$.

En primer lugar ,se define una $1 - forma\ \theta$ sobre P con valores en el espacio vectorial F :

En cada punto $x \in P$,

$$\theta_x(X) = x^{-1}\pi(X)$$

para cualquier vector tangente X , donde x^{-1} es la inversa del isomorfismo lineal x de F sobre T_u ,$u = \pi(x)$.$\pi(x)$ es un elemento de T_u y $\theta_x(X)$ un elemento de F .

θ es una 1-forma con valores en F . θ satisface la siguiente condición:

$R_a^* \cdot \theta = a^{-1} \cdot \theta\ \forall a \in G$, esto es , $(R_a^* \cdot \theta)(X) = a^{-1} \cdot (\theta(X))\ \forall$ vector tangente X en P , a^{-1}

en el miembro derecho de la expresión denota la acción de $a^{-1} \in G$ sobre F .

La igualdad anterior se obtiene de :

$$\begin{array}{lcll} (R_a^* \cdot \theta)_x(X) & = & \theta_{xa}(R_aX) & = \\ (xa)^{-1}\pi(R_aX) & = & a^{-1}x^{-1}\pi(X) & = \\ & = & a^{-1} \cdot (\theta(X)) & \end{array}$$

Definición 5.1.2 *Una conexión lineal sobre B es una conexión en el haz de fibrado principal de los marcos lineales de B, P (o, equivalentemente, una conexión en el fibrado tangente $T(B)$).*

En general, sea $P(B, G)$ un haz de fibrado principal y sea $E(B, F, G, P)$ el haz de fibrado asociado con fibra estandard F en el cual G actúa efectivamente.

Para $x \in P$ si $u = \pi(x)$, como consecuencia de la aplicación $p : E \to B$, queda determinada la aplicación $\theta : P \to F$.

Definición 5.1.3 *Una conexión en E es una distribución $Q : e \to Q_e$ de dimensión n (igual a la dimensión de B) que satisface las siguientes condiciones:*

1-$E_e = F_e \oplus Q_e$ en cada punto $e \in E$, donde E_e es el subespacio tangente a la fibra a través de e.

2- Para cualquier curva u_t de u_0 a u_1 en B, existe una curva integral e_t de la distribución Q que comienza en cualquier punto de la fibra F_u y la cual cubre la fibra F_u. Más aún ,

E_t define un isomorfismo de F_{u_o} en F_{u_1}, que depende diferenciablemente de t (a trozos).

3-e $\rightarrow Q_e$ es diferenciable.

Dada una conexión en P,se definirá un campo vectorial básico.

Sea ξ un elemento de F. En cada $x \in P$, sea $(B(\xi))_x$ el único campo horizontal en x que se proyecta en

$x.\xi \in T_u,\ u = \pi(x)$. La asignación $x \rightarrow (B(\xi))_x$,define un campo vectorial (horizontal) $B(\xi)$ en cada $x \in P$,que se designa como *campo vectorial básico* asociado a $\xi \in F$.

Propiedades.

Con la notación de la definición anterior:

1-Cada 1-forma θ caracteriza los campos vectoriales básicos.

2-$B(\xi) \neq 0$,cada vez que $\xi \neq 0$.

Demostración:

1-$\theta_x(B(\xi)_x) = x^{-1}.\pi(B(\xi)_x) = x^{-1}.(x.\xi) = \xi$.

Con x el isomorfismo de F sobre T_u, si $u = \pi(x)$.

Recíprocamente, definiendo $B(\xi)$ como el único campo vectorial horizontal en P tal que $\theta(B(\xi)) = \xi$ en cada punto de P. En virtud de la propiedad que verifica θ, se tiene:

$R_a.B(\xi) = B(a^{-1}.\xi)$ para todo $a \in G,\ \xi \in F$.

2-Si se supone que $B(\xi) = 0$ para algún $\xi \in F$, entonces $x.\xi = \pi.(B(\xi))_x = 0$, lo cual implica que $\xi = 0$ pues x es un isomorfismo.

Sean $\xi_1, ..., \xi_n$ una base fija de F como espacio vectorial, con respecto a G, está representada por un grupo de matrices a_{ij}.

El álgebra de Lie g de G está también formada por matrices.

Proposición 5.1.4 *Sea $A_{i,j},\ i,j = 1,...,n$ una base de g. Si $A^*_{i,j}\ i,j = 1,...,n$ son los campos vectoriales fundamentales y $B(\xi_1),...,B(\xi_n)$ son los campos vectoriales básicos,entonces forman base de P :*

$$\left\{A^*_{i,j}, B(\xi_1), ..., B(\xi_n), i,j = 1,...,n\right\}$$

En consecuencia la dimensión P es $n + n^2$.

Demostración:

Basta demostrar que $B(\xi_1),...,B(\xi_n)$ son linealmente independientes, pues $A^*_{i,j}$ son verticales y $B(\xi_1),...,B(\xi_n)$ son horizontales.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i B(\xi_i) = 0$ entonces $B(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i) = 0$, en algún punto $x \in P$.

Por la proposición anterior 2), resulta $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i = 0$.

Como $\xi_1, ..., \xi_n$ son base de F, se tiene que $c_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$.

Proposición 5.1.5 *Si A^* es fundamental y $B(\xi)$ es básico,entonces $[A^*, B(\xi)]$ es un campo vectorial básico $B(A.\xi)$,donde $A.\xi$ denota la imagen de ξ por $A \in g$ el cual actúa en F.*

Demostración:

Sea a_t el subgrupo 1-paramétrico de G generado por $A \in g$, entonces se tiene:

$$A.\xi = \lim_{t\to 0}(\frac{1}{t})(a_t.\xi - \xi).$$

Por otra parte, se sabe que:

$$\begin{aligned}[A^*, B(\xi)] &= \lim_{t\to 0}(\frac{1}{t})(B(\xi) - R_{a_t}.B(\xi))) = \\ &= \lim_{t\to 0}(\frac{1}{t})(B(\xi) - B(a_t^{-1}.\xi)).\end{aligned}$$

Como la aplicación $\xi \to (B(\xi))_x$ es lineal, y por lo tanto diferenciable, aplica F en el espacio horizontal Q_x, y, en consecuencia,

$$[A^*, B(\xi)] = B \lim_{t\to 0}(\frac{1}{t})(\xi - a_t^{-1}.\xi) = B(A.\xi).$$

5.2 Forma Torsión y Ecuación de Estructura

De la misma manera con que se define la forma curvatura, $\Omega = D\omega$ (ω forma conexión), se tiene la siguiente:

Definición 5.2.1 *Dada una conexión lineal, se define como $forma\ torsión$ a:*

$$\Theta = D\theta.$$

Se verifica además que: Θ es una 2-forma en P con valores en F tal que $R_a^*.\Theta = a^{-1}.\Theta$.

Más aún, si uno de los vectores tangentes X ó Y es vertical, entonces $\Theta\,(X, Y) = 0$.

Teorema 5.2.2 (*Ecuación de Estructura*).

Para cualquier par de campos X , Y en P, donde $\omega\,(Y).\theta\,(X)$,

$$d\theta\,(X, Y) = \frac{1}{2}\left\{\omega\,(Y)\,.\theta\,(X) - \omega\,(X)\,\theta\,(Y)\right\} + \Theta\,(X, Y)$$

Por ejemplo, denota la acción de $\omega(Y) \in g$ en $\theta(X) \in F$.

Demostración:

Caso 1). $X = A^*$ y $Y = B^*$ son campos vectoriales fundamentales,por lo tanto ambos son campos verticales y, en consecuencia,el miembro de la derecha es idénticamente nulo.

El miembro de la derecha es igual a :

$$\frac{1}{2}\left\{A^*.\theta(B^*) - B^*.\theta(A^*) - \theta([A^*, B^*])\right\}$$

el cual también es cero.

Caso 2). X e Y son ambos harizontales, en cuyo caso la ecuación de estructura se reduce a la definición de Θ.

Caso 3). $X = A^*$ es un campo fundamental, Y es horizontal, más aún, dado que los campos del tipo $B(\xi)$ son generadores, se puede suponer que $Y = B(\xi)$ para algún $\xi \in F$.

El miembro derecho de la ecuación es igual a:

$$\frac{-1}{2}\omega(A^*).\theta(B(\xi)) = \frac{-1}{2}A.\xi.$$

El miembro de la izquierda es igual a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left\{A^*.\theta(B(\xi)) - B(\xi).\theta(A^*) - \theta([A^*, B(\xi)])\right\} \\ = \; & \frac{-1}{2}\theta([A^*, B(\xi)]) = \frac{-1}{2}A.\xi. \end{aligned}$$

esta última igualdad resulta de la proposición.

Sean B_1 y B_2 dos campos vectoriales básicos. Entonces la componente vertical de $[B_1, B_2]$ está dada por $\omega([B_1, B_2]) = -2\Omega(B_1, B_2)$.

Si la parte horizontal de $[B_1, B_2]$ en x es igual a $(B(\xi))_x$ para algún $\xi \in F$, entonces, por el caso 2) de la Ecuación de Estructura se tiene:

$$\begin{aligned} \Theta(B_1,B_2) &= d\theta(B_1, B_2) = \\ &= \frac{1}{2}\left\{B_1\theta(B_2) - B_2\theta(B_1) - \theta([B_1, B_2])\right\}, \end{aligned}$$

esto es , $2\Theta_x(B_1, B_2) = -\theta_x(B(\xi)) = -\xi.$:

Corolario 5.2.3 *Si B_1 y B_2 son campos vectoriales básicos cualesquiera, entonces la componente horizontal de B_1, B_2 está dada por -$2\Theta(B_1, B_2)$.*

5.3 Diferenciación covariante

Se vió que una conexión en un haz de fibrados principales $P\,(B,G)$ determina una conexión en un haz de fibrados asociado y de ese modo define el desplazamiento paralelo de las fibras a lo largo de curvas de B .

En el caso de una conexión lineal ,se tiene la noción de desplazamiento paralelo de vectores tangentes de B a lo largo de cualquier curva en B : para cada curva τ ,desde u_o a $u_1$en B , el desplazamiento paralelo a lo largo de τ es un isomorfismo lineal del espacio tangente T_{u_o} sobre T_{u_1} .

Esto último es una interpretación geométrica de la noción de conexión lineal .

Sea X e Y dos campos vectoriales en B se definirá la *derivada covariante* $\nabla_Y \cdot X$ de X con respecto a Y :

Para cualquier punto arbitrario p en B ,sea u_t la curva integral del campo vectorial Y con la condición inicial $u_o = p$.

El desplazamiento paralelo τ_t^{-1} desde u_t a u_o en la dirección opuesta aplica X_{u_t} (el valor de X en el punto u_t) en el vector tangente $\tau_t^{-1} X_{u_t}$.

Definición 5.3.1 *Se define $(\nabla_Y \cdot X)_p$ como el vector tangente en p que es igual a :*

$$(\nabla_Y \cdot X)_p = \lim_{t \to 0} (\frac{1}{t})[\tau_t^{-1} X_{u_t} - X_p]$$

Definido $(\nabla_Y \cdot X)_p$ para cada p ,se obtiene un campo vectorial $\nabla_Y \cdot X$, el cual se define como la derivada covariante de X con respecto a Y .

En términos del haz de marcos lineales P, sea y_o cualquier punto de P tal que $\pi(y_o) = p$, y sea y_t una curva ,la cual cubre u_t ,entonces y_t^{-1}:$T_{u_t} \to P$ e $y_o : P \to T_{u_o} = T_p$, de este modo $\tau_t^{-1} X_{u_t}$ está dado por $y_o \circ\ y_t^{-1} \circ\ X_{u_t}$ y se tiene :

$$(\nabla_Y \cdot X)_p = \lim_{t \to 0} (\frac{1}{t})[y_o \circ y_t^{-1} \circ X_{u_t} - X_p]$$

1. $\nabla_{Y_1 + Y_2} \cdot X = \nabla_{Y_1} \cdot X + \nabla_{Y_2} \cdot X$
2. $\nabla_Y \cdot (X_1 + X_2) = \nabla_Y \cdot X_1 + \nabla_Y \cdot X_2$
3. $\nabla_{\varphi Y} \cdot X = \varphi \nabla_Y \cdot X$
4. $\nabla_Y \cdot (\varphi X) = \varphi \nabla_Y \cdot X + Y\varphi \cdot X$

Proposición 5.3.2 *donde X e Y son campos vectoriales en B y φ es una función diferenciable arbitraria en B .*

Demostración:

1- Se obtiene de observar que el levantado de $X+Y$ es la suma de los levantados de X y de Y.

3-Análogamente al anterior, si Y^* es el levantado de Y y φ^* es la función $\varphi \circ \pi$, el levantado de φY es $\varphi^* Y^*$.

2- Considerando la función $P \to F$, aplica $X_1 + X_2$ en $\theta(X_1^* + X_2^*) = \theta(X_1^*) + \theta(X_2^*)$

4-Si $f = \theta(X^*)$, entonces $\varphi^* f$ es la función $P \to F$ que corresponde a φX, donde $\varphi^* = \varphi \circ \pi$.

Si Y^* es el levantado de Y, tenemos que

$$Y^*(\varphi^* f) = (\varphi^* Y^* f) + (Y^* \varphi^*) f)$$

Observación: Si escribimos $t(X)Y = \nabla_Y X$, la proposición anterior dice que $t(X)$ es un $F-$ endomorfismo que verifica

$t(X_1 + X_2) = t(X_1) + t(X_2)$ y $t(\varphi X).Y = \varphi t(X).Y + Y\varphi.X$

La derivación covariante ∇_Y con respecto a Y puede ser aplicada a campos tensoriales sobre B.

Geométricamente, el desplazamiento paralelo τ a lo largo de una curva desde u_0 a u_1,es un isomorfismo lineal de T_{u_0} sobre T_{u_1}que induce un isomorfismo entre espacios tensoriales en u_0 y u_1.

El lector interesado podrá hallar este tema en la bibliografía recomendada.

5.4 Símbolos de Christoffel y Geodésicas

Vimos en la sección anterior que $t(X)Y = \nabla_Y X$; ahora hallaremos los símbolos de Christoffel ó componentes de la conexión lineal, Γ_{ij}^k.

Sea U un entorno coordenado en B con coordenadas locales $u^1, ..., u^n$.

Entonces los campos de vectores $X_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, ..., X_n = \frac{\partial}{\partial u^n}$ forman una base del F-módulo de campos vectoriales en U. Aplicando la conexión lineal inducida en U, queda

$$t(X_i)X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$$

donde Γ_{ij}^k son n^3 funciones diferenciables en U.

Queda como ejercicio probar que las componentes así definidas son independientes del sistema coordenado local elegido.

Definición 5.4.1 *Dada una conexión lineal en B,definimos geodésica en B como una curva diferenciable cuyos vectores tangentes son paralelos a lo largo de ella.*

En términos de haz de marcos de referencias P, diremos:

Proposición 5.4.2 *La proyección de cualquier curva integral de campos vectoriales básicos en P es una geodésica en B. Recíprocamente, cada geodésica en B se obtiene de ese modo.*

Corolario 5.4.3 *Para cada punto $p \in B$ y cada vector tangente X en p,hay una y sólo una geodésica u_t tal que $u_o = p$ y $(\frac{du_t}{dt})_{t=0} = X$. El parámetro t de u_t está univocamente determinado por la condición inicial.*

En términos de las coordenadas locales $u^1, ..., u^n$, en un entorno de un punto $p \in B$ y de las componentes Γ^k_{ij} de una conexión lineal dada ,una geodésica puede ser expresada como solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0$$

$k = 1, ..., n$.

La definición de conexión lineal en términos de $\nabla_X Y$ se debe a J.L.Koszul.

Dada una conexión lineal Γ en términos de $\nabla_X Y$ podemos probar que $\nabla'_X Y = \nabla_X Y - [X, Y]$ define otra conexión Γ'.

Si Γestá definida por Γ^k_{ij}, entonces Γ' está definida por $\Gamma'^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

$\frac{1}{2}(\Gamma + \Gamma')$ es tambien una conexión lineal definida por $\frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji})$,con campo tensorial torsión cero.

Dada una métrica riemanniana sobre la variedad B , existe una única conexión lineal la cual satisface las siguientes dos condiciones :

a) campo tensorial torsión cero,

b)el desplazamiento paralelo es una isometría entre espacios tangentes.

Se la llama conexión riemanniana (o de Levi-Civita).

Si la métrica riemanniana e escribe $g(X, Y)$ entonces la conexión riemanniana está dada por $\nabla_X Y$ y determinada por la ecuación:

$2g(\nabla_X Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(Z, X) - Z.g(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])$

donde X, Y, Z son campos vectoriales arbitrarios.

Se deja al lector la verificación de a) y de b).

Ejemplo 5.4.4 *:Geodésicas en* L^2

Sea L^2 el plano 2-dimensional con la métrica de Lorentz, $ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2$.

Sabemos que $G = O(1,1)$ actúa sobre L^2.

Llamamos $P(L^2, O(1,1))$ al haz de fibrados principales sobre L^2 con grupo $O(1,1)$.

Una conexión Γ en P es la asignación de un subespacio Q_u de T_u a cada $u \in P$ tal que

a) $T_u(P) = Q_u \oplus G_u$, G_u consiste de los vectores tangentes a la fibra a través de u.

b) $Q_{ua} = (R_a)_* Q_u$, $u \in P, a \in g, Rau = ua$

c) Q_u depende diferenciablemente de u.

Dada una conexión Γ sobre P, definimos la 1-forma w sobre P con valores en el álgebra de Lie g de G

$g = o(1,1) = \{X/\ X^t\ S + SX = 0\}$

$S = (s_{ij})$ donde $s_{11} = -1, s_{ii} = 1, i : 2, ..., n, s_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$X \in T_u(P), w(X) = A \in g$, tal que (A_u^*) es la componente vertical de X.Deseamos encontrar dicha 1-forma w.

En L^2 sea x^1, x^2 el sistema coordenado local, $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}$ satisfaciendo $\langle X_1, X_1 \rangle = 1$, $\langle X_2, X_2 \rangle = -1$, $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$.

Sea U entorno de u; cada marco de referencia local puede ser expresado de manera única por

$(\sum_i X_1^i (X_i)_x, \sum_i X_2^i (X_i)_x)$ con $\det(X_j^i) \neq 0$,

entonces podemos considerar

$$(X_j^i) = \begin{bmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{bmatrix} \in O(1,1)$$

y la matriz inversa

$(Y_j^i) = \begin{bmatrix} cht & -sht \\ -sht & cht \end{bmatrix}$ y cualquier otro marco de referencia es $(cht.\frac{\partial}{\partial x^1} + sht.\frac{\partial}{\partial x^2}, sht.\frac{\partial}{\partial x^1}\ + cht.\frac{\partial}{\partial x^2})$.

Respecto de la base $\{\mathrm{E}_i^j\}$ de g , escribimos $w = \sum_{i,j} w_j^i \mathrm{E}_i^j$ donde $w_j^i = \sum_k Y_k^i dx_j^k + \sum_{l,m} \Gamma_{ml}^k x_k^l dx^m$

como el segundo término es cero , se obtiene,

$w_1^1 = sht.cht - sht.cht = 0$

$w_2^1 = -ch^2 t + sh^2 t = -1$

$w_2^2 = -sht.cht + sht.cht = 0$

o sea, $(w^i_j) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$Ahora necesitamos la base $\{\mathrm{E}^j_i\}$ de $o(1,1)$.La dimensión de $o(1,1)$ es igual a 1 y como $o(1,1)=\{X/\ X^t\ S + SX = 0\}$

si $X = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{bmatrix}$ tenemos $\begin{bmatrix} -2x^1 & x^3 - x^2 \\ x^3 - x^2 & 2x^4 \end{bmatrix} = 0$, de donde

$$\begin{cases} x^1 = x^4 = 0 \\ x^3 = x^2 \end{cases}$$

Obtenemos que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es base.En efecto , es $\begin{bmatrix} 0 & dt \\ dt & 0 \end{bmatrix}$.

Ahora tenemos que $w = \sum w^i_j \mathrm{E}^j_i$ entonces

$w = \begin{bmatrix} -dt & 0 \\ 0 & -dt \end{bmatrix}$.

Como $g \simeq G_u$ y P tiene curvatura cero (es flat) queda $P \simeq M \times G = L^2 \times O(1,1)$ si $X \in T_u(P)$;

así

$X = a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + b \frac{d}{dt.}$

$Q_u = \{X/w(X) = 0\} y w(X) = 0$ si y sólo si $b = 0$.

Es decir,

$Q_u = \{X/X = a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x^2}\}$ a partir de lo cual, es difeomorfo a L^2 mismo.

Ahora podemos obtener las geodésicas respecto a esta conexión lineal. $T_x(L^2) = \{X/X = a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x^2}\}$.

Queremos hallar $x(t) : R \to L^2$ tal que $(a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x^2})(x(t)) = 0$.

Denotamos $x'(t) = (x'^1(t), x'^2(t))$ y queda $a_1 x'^1(t) + a_2 x'^2(t) = 0$

Siempre puede considerarse $x^1(t) = t$; reemplazando en la ecuación anterior e integrando, tenemos

$\int x'^2(t)\ dt = -\frac{a_1}{a_2} t + b = x^2(t)$.

Finalmente, $a_2 x^2(t) + a_1 x^1(t) - b = 0$ por lo que $x(t)$ es una línea recta en L^2.

5.5 Conexiones afines

Sea B una variedad diferenciable.Llamaremos $P(B,G)$ y $\widetilde{P}(B,\widetilde{G})$ al haz de marcos de referencia y al haz afín sobre B respectivamente,según la notación usada en el ejemplo del capítulo precedente.

Definición 5.5.1 *Una conexión afín es una conexión en* $\widetilde{P}(B,\widetilde{G})$

Sea $\widetilde{w}$ la forma conexión de una conexión afín $\widetilde{\Gamma}$.

La forma $\widetilde{w}$ sobre $\widetilde{P}$ toma valores en el álgebra de Lie $\widetilde{g}$ de $\widetilde{G}$. Ya que $\widetilde{G}$ es el producto semi-directo $F \times G$,tenemos la suma semi-directa $\widetilde{g} = \mathcal{F} + g$ donde $\mathcal{F}$ es el álgebra de Lie identificada con el grupo F (y con el espacio vectorial n-dimensional el cual es la fibra estandard el haz de fibrados tangentes de B

Mediante la inyectividad de la aplicación $i : P \rightarrow \widetilde{P}$ se tiene la descomposición $i^*\widetilde{w} = w + \alpha$ sobre P, donde α es una 1-forma $F-$valuada sobre P y w es una 1-forma

$g-$ valuada sobre $P. \widetilde{w}$ es del tipo $ad(\widetilde{G})$.

w es del tipo $ad(G)$.

Es fácil verificar (ejercicio) que w es la forma conexión de P,y por lo tanto , define una conexión lineal sobre B

Bibliografía

[1] Chevalley,C, "Theory of Lie Groups ",Princeton,1946

[2] Kobayashi & Nomizu, "Foundations of Differentiable Geometry", vol. I and II, N.Y.,John Wiley& Sons Inc.,1963 and 1965.

[3] Steenrod,N., " The topology of fiber bundles", Princeton, 1951.

[4] Warner,F., "Foundations of Differentiables Manifolds and Lie Groups ", Scott,Foresman and Company,1971.

[5] Walkers and Newns, "Tangents planes to a differentiable manifold ",Journal London Math. Soc.,(1956),400-407.