

# Introducción a la teoría de operads.

María O. RONCO <sup>1</sup>

**Introducción.** Las operads son objetos matemáticos que modelizan distintos tipos de estructuras. Los principales ejemplos de operads son algebraicos (álgebras asociativas, conmutativas, de Lie, de Poisson, etc.) y topológicos (operad de pequeños cubos, espacios  $A_\infty$ , etc. ).

La teoría de operads se desarrolló a principios de los años '70 en problemas de topología algebraica relacionados con espacios de lazos. Los primeros trabajos sobre el tema se deben a J. Adams y S. Mac Lane (cf. [ML1]), J. M. Boardman y R. M. Vogt (cf. [BV]), J. D. Stasheff (cf. [St1]), J. P. May (cf. [Ma1] ), R. J. Milgram (cf. [Mi]) y J. Beck (cf. [Be]). Luego de algunos años, la noción de operad volvió a concitar interés a partir de sus aplicaciones en cohomología de grafos, dualidad de Koszul, teoría de representaciones, combinatoria, espacios de moduli, teoría de representaciones, teoría de cuerdas y teoría conforme de campos.

Si bien la definición de operad se debe a P. May (cf. [Ma1]), en 1994 V. A. Ginzburg y M. M. Kapranov ( cf. [GK]) desarrollaron en forma completa la teoría de operades algebraicas, describiendo las nociones de álgebra envolvente, módulos , operad dual y teoría de homología asociados a una operad algebraica, con especial interés en operads de Koszul.

El propósito de estas notas es:

1. Dar la definición de operad, e introducir algunos ejemplos como las operads asociadas a teoría de álgebras asociativas y las álgebras conmutativas.
2. Describir la operad de espacios  $A_\infty$ , debida a J. D. Stasheff (cf. [St1]).
3. Dar un panorama sobre las operades algebraicas asociadas a los polítopos de Stasheff. Mostrar otros ejemplos de operades, que surgen a partir de temas de física y de teoría de grafos.

---

<sup>1</sup>Depto. de Matemática, CBC, Univ. de Buenos Aires. Pab. III Ciudad Universitaria (1428) Buenos Aires, Argentina. E-mail : mronco@mate.dm.uba.ar

# 1 Operads en una categoría monoidal simétrica

## 1.1 Operads

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría monoidal simétrica con producto  $\otimes$  y objeto unidad  $\kappa$ .

Los lectores no familiarizados con teoría de categorías pueden suponer que  $(\mathcal{C}, \otimes)$  es una de las siguientes categorías:

1. La categoría de conjuntos finitos  $\mathcal{FSet}$ , con el producto de conjuntos como operación monoidal, donde  $\kappa$  es el conjunto con un único elemento.
2. Dado un cuerpo  $k$ , la categoría  $\mathcal{C} = Vect_k$  es la categoría cuyos objetos son los  $k$ -espacios vectoriales y cuyos morfismos son las transformaciones lineales entre espacios vectoriales. La operación monoidal es el producto tensorial  $\otimes_k$ , y  $\kappa$  es el cuerpo  $k$ , considerado como  $k$ -espacio vectorial de dimensión uno.
3. La categoría  $GVect_k$  que tiene como objetos a los  $k$ -espacios vectoriales graduados, y como morfismos a las transformaciones lineales de grado 0, con el producto tensorial sobre  $k$  como operación monoidal. En este caso, el objeto unidad está dado por  $\kappa_0 = k$  y  $\kappa_n = 0$ , para  $n \geq 1$ .
4. La categoría  $GDVect_k$  cuyos objetos son los pares  $(V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n, d)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial graduado y  $d : V \rightarrow V$  es una transformación lineal de grado  $-1$  tal que  $d \circ d = 0$ . La operación  $\otimes$  está definida en la siguiente forma:

$$(V, d_V) \otimes (W, d_W) := (V \otimes_k W := \bigoplus_{n \geq 0} (\bigoplus_{i=0}^n V_i \otimes W_{n-i}), d_{V \otimes_k W}),$$

donde  $d_{V \otimes_k W}(v \otimes_k w) := d_V(v) \otimes_k w + (-1)^{i-1} v \otimes_k d_W(w)$ , para  $v \in V_i$  y  $w \in W_{n-i}$ . El objeto unidad es el espacio vectorial graduado  $\kappa$  del ejemplo anterior con el morfismo trivial como diferencial.

5. La categoría  $Top$  que tiene como objetos a los espacios topológicos y como morfismos a las funciones continuas entre espacios topológicos, la operación monoidal en este caso es el producto de espacios y el objeto unidad es espacio topológico formado por un solo punto.
6. La categoría  $Top^*$  cuyos objetos son los pares  $(X, x_0)$ , donde  $X$  es un espacio topológico y  $x_0$  es un punto de  $X$ , con

$$Hom_{Top^*}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f : X \rightarrow Y \text{ continua} : f(x_0) = y_0\}.$$

En este caso, el espacio topológico de  $(X, x_0) \otimes (Y, y_0)$  es el espacio cociente del producto  $X \times Y$  por la relación de equivalencia que identifica todos los puntos de la forma  $(x_0, y)$  y de la forma  $(x, y_0)$ , con  $x \in X$  e  $y \in Y$ , con el punto  $(x_0, y_0)$ . En ese caso, el punto elegido es la clase de equivalencia de  $(x_0, y_0)$ . El objeto unidad es el espacio de un solo punto  $(\{x_0\}, x_0)$ .

**Definición 1** Una operad  $\mathcal{P}$  en una categoría monoidal simétrica  $(\mathcal{C}, \otimes)$  es una familia de objetos  $\{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{C}$  provistos de:

1. Una acción a izquierda del grupo simétrico  $S_n$  sobre  $\mathcal{P}(n)$ , para todo  $n \geq 1$ .
2. Un morfismo unidad  $\eta : \kappa \rightarrow \mathcal{P}(1)$ .
3. Para toda familia de números naturales  $n, m_1, \dots, m_n$ , un morfismo 
$$\gamma_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(m_n) \longrightarrow \mathcal{P}(m_1 + \dots + m_n)$$
 en  $\mathcal{C}$ .

que verifican las siguientes condiciones:

a) (Asociatividad de los operadores  $\gamma_{\mathcal{P}}$ ) Dados números naturales  $n, m_1, \dots, m_n, r_1^1, \dots, r_{m_1}^1, \dots, r_1^n, \dots, r_{m_n}^n$ , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{P}(m_j) \otimes \bigotimes_{k=1}^n \bigotimes_{s=1}^{m_k} \mathcal{P}(r_s^k) & \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{P}} \otimes Id} & \mathcal{P}(m) \otimes \bigotimes_{k=1}^n \bigotimes_{s=1}^{m_k} \mathcal{P}(r_s^k) \\
 & & \downarrow \gamma_{\mathcal{P}} \\
 & & \mathcal{P}(r) \\
 & & \uparrow \gamma_{\mathcal{P}} \\
 \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{k=1}^n (\mathcal{P}(m_k) \otimes \bigotimes_{s=1}^{m_k} \mathcal{P}(r_s^k)) & \xrightarrow{Id \otimes \bigotimes \gamma_{\mathcal{P}}} & \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{P}(r^k),
 \end{array}$$

donde

$$\tau((f_1 \otimes \dots \otimes f_n) \otimes (g_1^1 \otimes \dots \otimes g_{m_n}^n)) := (f_1 \otimes g_1^1 \otimes \dots \otimes g_{m_1}^1) \otimes \dots \otimes (f_n \otimes g_1^n \otimes \dots \otimes g_{m_n}^n),$$

$$m := \sum_{i=1}^n m_i, \quad r^k := \sum_{i=1}^{m_k} r_i^k \quad \text{y} \quad r := \sum_{k=1}^n r^k:$$

b) (Identidad) Las composiciones  $\gamma_{\mathcal{P}} \circ (Id \otimes \eta^{\otimes n})$  y  $\gamma_{\mathcal{P}} \circ (\eta \otimes Id)$  son los isomorfismos naturales de  $\mathcal{P}(n) \otimes \kappa^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{P}(n)$  y  $\kappa \otimes \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n)$ , respectivamente.

c) (Compatibilidad de  $\gamma_{\mathcal{P}}$  con la acción de  $S_n$ ) Sean  $f \in \mathcal{P}(n)$ ,  $g_1 \in \mathcal{P}(m_1), \dots, g_n \in \mathcal{P}(m_n)$ .

(i) Para toda permutación  $\sigma \in S_n$ , se tiene que  $\gamma_{\mathcal{P}}((\sigma \cdot f) \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_n) =$

$$\sigma(m_1, \dots, m_n) \cdot \gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes g_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes g_{\sigma(n)}),$$

donde  $\sigma(m_1, \dots, m_n) \in S_{m_1+\dots+m_n}$  es la permutación:

$$\sigma(m_1, \dots, m_n)(i) := m_1 + \dots + m_{k-1} + l, \quad \text{para } i = m_{\sigma(1)} + \dots + m_{\sigma(k-1)} + l,$$

con  $1 \leq l \leq m_{\sigma(k)}$ .

(ii) Dadas permutaciones  $\tau_i \in S_{m_i}$ , para  $1 \leq i \leq n$ , vale que:

$$(\tau_1 \times \dots \times \tau_n) \cdot \gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_n) = \gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes \tau_1 \cdot g_1 \otimes \dots \otimes \tau_n \cdot g_n),$$

donde  $\tau_1 \times \dots \times \tau_n \in S_{m_1+\dots+m_n}$  es la concatenación de las  $\tau_i$ 's, esto es:

$$\tau_1 \times \dots \times \tau_n(i) := \tau_k(i - m_1 - \dots - m_{k-1}) + m_1 + \dots + m_{k-1},$$

para  $m_1 + \dots + m_{k-1} < i \leq m_1 + \dots + m_k$ .

Si pensamos que  $\mathcal{P}$  es una teoría dada por operaciones y relaciones, observamos que:

1. El objeto  $\mathcal{P}(n)$  corresponde a las operaciones  $n$ -arias de la teoría. Dadas variables  $x_1, \dots, x_n$  y una operación  $f \in \mathcal{P}(n)$ , tiene sentido evaluar  $f$  en las variables  $x_1, \dots, x_n$  tomadas en cualquier orden, y el resultado sigue siendo una operación para la teoría  $\mathcal{P}$ . Para una permutación  $\sigma \in S_n$ , la operación  $\sigma \cdot f \in \mathcal{P}(n)$  aplicada en  $x_1, \dots, x_n$  es:

$$(\sigma \cdot f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Por ejemplo, si  $\mathcal{P}$  es la operad *Ass* asociada a las álgebras asociativas, el producto asociativo  $\mu$  determina dos operaciones en *Ass*(2):

$\mu(x_1, x_2)$  y  $((2, 1) \cdot \mu)(x_1, x_2) = \mu(x_2, x_1)$ , donde  $(2, 1) \in S_2$  es la trasposición de 1 y 2.

En cambio, si miramos la operad *Com* asociada a las álgebras asociativas y conmutativas, el producto determina una sola operación en *Com*(2), dada por  $\mu(x_1, x_2) = ((2, 1) \cdot \mu)(x_1, x_2) = \mu(x_2, x_1)$ .

2. El morfismo unidad  $\eta : \kappa \rightarrow \mathcal{P}(1)$  determina la existencia de la operación identidad en  $\mathcal{P}(1)$ . Por ejemplo, en la operad asociativa *Ass*, la relación de asociatividad se escribe en *Ass*(3) como:

$$\gamma_{Ass}(\mu \otimes 1 \otimes \mu) = \gamma_{Ass}(\mu \otimes \mu \otimes 1),$$

donde  $1 \in Ass(1)$  es el la imagen por  $\eta$  de  $1_k \in k = \kappa$ .

3. Las operaciones  $\gamma_{\mathcal{P}}$  corresponden a la composición de operaciones. Si tenemos variables  $x_1, \dots, x_{m_1}, \dots, x_{m_1+\dots+m_n}$ , y operaciones  $g_i \in \mathcal{P}(m_i)$  y  $f \in \mathcal{P}(n)$ , entonces hacer  $f(g_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, g_n(x_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_1+\dots+m_n}))$  es una operación en  $m_1 + \dots + m_n$  variables.

En este contexto, las condiciones a), b) y c) son fáciles de interpretar. La condición a) por ejemplo indica que la composición de operaciones es asociativa, o sea que:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes \gamma_{\mathcal{P}}(g_1 \otimes h_1^1 \otimes \dots \otimes h_{m_1}^1) \otimes \dots \otimes \gamma_{\mathcal{P}}(g_n \otimes h_1^n \otimes \dots \otimes h_{m_n}^n)) &= \\ f(g_1(h_1^1, \dots, h_{m_1}^1), \dots, g_n(h_1^n, \dots, h_{m_n}^n)) &= \\ \gamma_{\mathcal{P}}(\gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_n) \otimes h_1^1 \otimes \dots \otimes h_{m_n}^n). & \end{aligned}$$

La condición b) establece que:

$$\gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes Id \otimes \dots \otimes Id) = f(Id, \dots, Id) = f,$$

y que

$$\gamma_{\mathcal{P}}(Id \otimes f) = Id(f) = f.$$

En tanto que c) afirma que, dada una permutación  $\sigma$ , resulta:

$$\begin{aligned} f(g_{\sigma(1)}(x_{M_{\sigma(1)}-1+1}, \dots, x_{M_{\sigma(1)}}), \dots, g_{\sigma(n)}(x_{M_{\sigma(n)}-1+1}, \dots, x_{M_{\sigma(n)}})) &= \\ f \circ (g_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes g_{\sigma(n)})(x_{M_{\sigma(1)}-1+1}, \dots, x_{M_{\sigma(n)}}) &= \\ \sigma(m_1, \dots, m_n) \cdot (f(g_1, \dots, g_n))(x_1, \dots, x_{M_n}), & \end{aligned}$$

donde  $M_l := m_1 + \dots + m_l$ , para  $0 \leq l \leq n$ . Dadas permutaciones  $\tau_1, \dots, \tau_n$ , la condición (ii) afirma que:

$$\begin{aligned} f((g_1(x_{\tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_1(m_1)}), \dots, g_n(x_{\tau_n(1)+M_{n-1}}, \dots, x_{\tau_n(m_n)+M_{n-1}}))) &= \\ f(g_1, \dots, g_n)(x_{\tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_n(m_n)+M_{n-1}}) &= \\ (\tau_1 \times \dots \times \tau_n) \cdot f(g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_{M_n}). & \end{aligned}$$

**Ejemplos.** a) Dado un cuerpo  $k$ , la operad *Ass* que describe las álgebras asociativas sobre  $k$  es la operad en la categoría  $Vect_k$  dada por:

1.  $Ass(n)$  es el  $k$ -espacio vectorial generado por todas las operaciones posibles en  $n$  variables. Como un álgebra asociativa está dada por un producto binario asociativo, las únicas operaciones en  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  son las combinaciones

lineales de los productos  $x_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}$ , para una permutación cualquiera  $\sigma \in S_n$ . Luego, el espacio vectorial  $Ass(n)$  está generado por  $n!$  operaciones, una por cada permutación de  $S_n$ . Entonces  $Ass(n)$  es el espacio vectorial  $k[S_n]$ , con  $\delta(x_1, \dots, x_n) = x_{\delta(1)} \cdot \dots \cdot x_{\delta(n)}$ .

Para calcular la acción de  $S_n$  en  $Ass(n)$ , recordemos que:

$$\sigma \cdot \delta(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(\delta(1))} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(\delta(n))} = (\sigma\delta)(x_1, \dots, x_n).$$

Luego, la acción de  $S_n$  sobre  $Ass(n)$  coincide con el producto del álgebra de grupo. O sea, que  $Ass(n)$  es la representación regular de  $S_n$ .

2. El objeto  $\kappa$  en  $Vect_k$  es el mismo cuerpo  $k$ , y  $Ass(1) = k[S_1] = k$ , luego  $\eta = Id_k$ .
3. Sean  $\lambda \in Ass(n)$  y  $\delta_i \in Ass(m_i)$  permutaciones, con  $1 \leq i \leq n$ . Recordemos que  $\gamma_{Ass}(\lambda \otimes \delta_1 \otimes \dots \otimes \delta_n)$  es la composición de operaciones. Como

$$\begin{aligned} & \lambda(\delta_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, \delta_n(x_{M_{n-1}+1}, \dots, x_{M_n})) = \\ & \lambda(x_{\delta_1(1)} \cdot \dots \cdot x_{\delta_1(m_1)}, \dots, x_{\delta_n(1)+M_{n-1}} \cdot \dots \cdot x_{\delta_n(m_n)+M_{n-1}}) = \\ & x_{\delta_{\lambda(1)}(1)+M_{\lambda(1)-1}} \cdot \dots \cdot x_{\delta_{\lambda(1)}(m_{\lambda(1)})+M_{\lambda(1)-1}} \cdot \dots \cdot x_{\delta_{\lambda(n)}(m_{\lambda(n)})+M_{\lambda(n)-1}} = \\ & (\delta_1 \times \dots \times \delta_n) \cdot \lambda(m_1, \dots, m_n)(x_1, \dots, x_{M_n}). \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \gamma_{Ass}(\lambda \otimes \delta_1 \otimes \dots \otimes \delta_n) = (\delta_1 \times \dots \times \delta_n) \cdot \lambda(m_1, \dots, m_n).$$

**Ejercicio.** Probar que con esta descripción  $Ass$  es una operad.

b) La operad  $Com$  que describe las álgebras asociativas y conmutativas sobre  $k$  es la operad definida en la categoría  $Vect_k$  tal que  $Com(n) = k$  es la representación trivial del grupo  $S_n$ . En efecto, dadas  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  la única operación posible en  $Com$  es el producto  $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ , ya que para cualquier permutación  $\sigma \in S_n$ , resulta:

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_n = x_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}.$$

Notamos  $1_n \in Com(n) = k$  a esta operación, que identificamos con la unidad de  $k$ . Nuevamente, es inmediato verificar que  $\eta = Id_k$ . Calcular la composición también resulta simple, tenemos que:

$$\gamma_{Com}(1_n \otimes 1_{m_1} \otimes \dots \otimes 1_{m_n}) = 1_{m_1+\dots+m_n}.$$

c) Consideremos ahora las álgebras de Lie sobre  $k$ , la operad asociada *Lie* es también una operad en la categoría  $Vect_k$ . Un álgebra de Lie sobre  $k$  es un  $k$ -espacio vectorial  $\mathcal{G}$ , muido de una aplicación bilineal  $[-, -] : \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  que verifica las siguientes igualdades:

1.  $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$ ,
2. (Identidad de Jacobi)  $[x_1, [x_2, x_3]] = [[x_1, x_2], x_3] - [[x_1, x_3], x_2]$ ,

para todos  $x_1, x_2$  y  $x_3$  en  $\mathcal{G}$ .

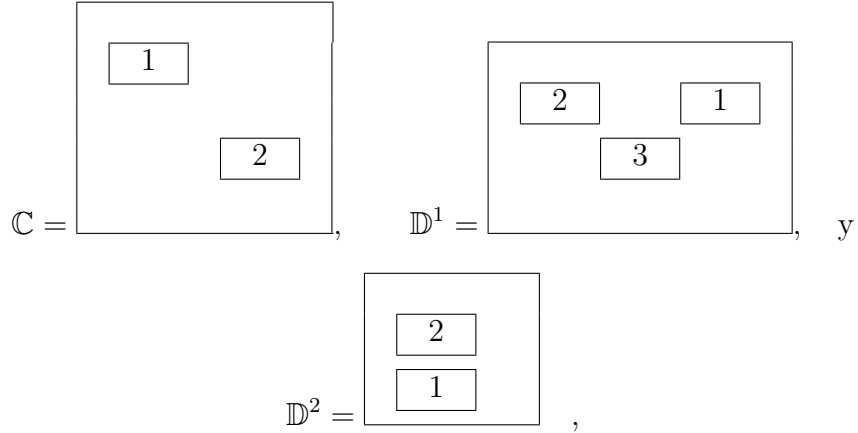
Tenemos que  $Lie(1) = k$  y  $\eta = Id_k$ . En dos variables, existe una sola operación  $[x_1, x_2]$ , con  $[x_2, x_1] = -[x_1, x_2]$ . Luego,  $Lie(2) = k$  es la signatura de  $S_2$ . Los restantes espacios  $Lie(n)$  son más complicados de calcular, en  $Lie(3)$  por ejemplo tenemos dos tipos de operaciones:  $[x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]]$  y  $[[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}], x_{\sigma(3)}]$ , para cada  $\sigma \in S_3$ . Esto implica que  $Lie(3)$  es el cociente de  $k[S_3] \oplus k[S_3]$  por todas las relaciones entre corchetes que pueden obtenerse a partir de la antisimetría y de la identidad de Jacobi.

En general, la representación  $Lie(n)$  de  $S_n$  está dada por el subespacio de dimensión  $n$  del álgebra de Lie libre en  $n$  elementos, para una mejor descripción de *Lie* se sugiere consultar [KL].

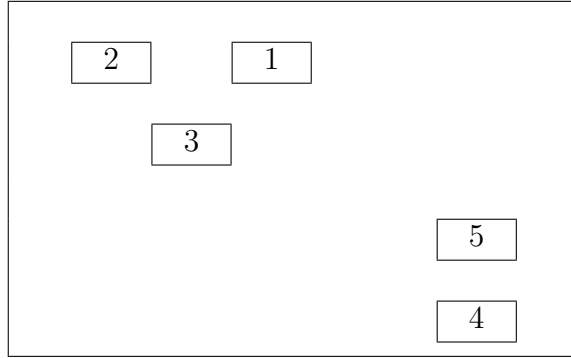
d) **Operad de pequeños cubos** (cf. [BV], [Ma1] y [Vo1]) Dado un entero  $k \geq 1$ , sea  $[0, 1]^k$  el cubo unitario en  $\mathbb{R}^k$ . La *operad de pequeños  $k$  cubos* es la operad  $\mathcal{Q}_k$  en la categoría  $Top$ , dada por:

1.  $\mathcal{Q}_k(n)$  es el espacio de  $n$ -uplas ordenadas de subcubos  $C_1, \dots, C_n$  de dimensión  $k$  de  $[0, 1]^k$  tales que:
  - (i) Los lados de  $C_i$  son paralelos a los lados de  $[0, 1]^k$ .
  - (ii) La intersección del interior de  $C_i$  y el interior de  $C_j$  es vacía, para  $i \neq j$ .
2. Sean  $\mathbb{C} = (C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{Q}_k(n)$  y  $\mathbb{D}^i = (D_1^i, \dots, D_{m_i}^i) \in \mathcal{Q}_k(m_i)$ , con  $1 \leq i \leq n$ . El elemento  $\gamma_{\mathcal{Q}_k}(\mathbb{C} \otimes \mathbb{D}^1 \otimes \dots \otimes \mathbb{D}^n) \in \mathcal{Q}_k(m_1 + \dots + m_n)$  se obtiene reemplazando el subcubo  $C_i$  por la configuración  $\mathbb{D}^i$ .

Por ejemplo, si



tenemos que  $\gamma_{\mathcal{Q}_2}(\mathbb{C} \otimes \mathbb{D}^1 \otimes \mathbb{D}^2) \in \mathcal{Q}_2(5)$  es la configuración



3. La acción de  $S_n$  sobre  $\mathcal{Q}_k(n)$  está dada por la permutación en el orden de los subcubos:

$$\sigma \cdot (C_1, \dots, C_n) := (C_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, C_{\sigma^{-1}(n)}).$$

4. El elemento  $1 \in \mathcal{Q}_k(1)$  es la configuración que tiene como único subcubo a todo  $[0, 1]^k$ .

En realidad, una configuración  $\mathbb{C} \in \mathcal{Q}_k(n)$  queda determinada por las coordenadas del centro de cada  $C_i$  y su radio. O sea, que  $\mathcal{Q}_k(n)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^{(k+1)n}$ .

**Definición 2** Dadas operads  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  en una categoría  $\mathcal{C}$ , un morfismo de operads  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  es una colección de morfismos  $\varphi(n) : \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{Q}(n)$  en  $\mathcal{C}$  tal que:

1.  $\varphi(n)(\sigma \cdot f) = \sigma \cdot \varphi(n)(f)$ , para todo  $\sigma \in S_n$  y  $f \in \mathcal{P}(n)$ .

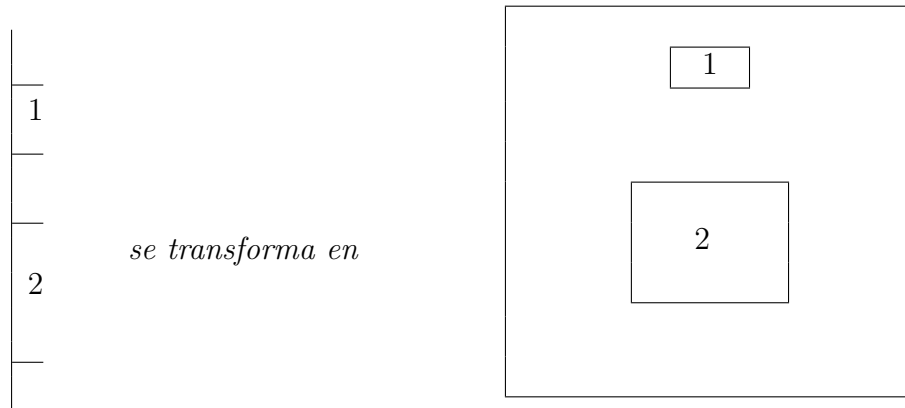


2.  $\varphi(1)(1_{\mathcal{P}}) = 1_{\mathcal{Q}}$
3.  $\varphi(m_1 + \cdots + m_n)(\gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)) = \gamma_{\mathcal{Q}}(\varphi(n)(f) \otimes \varphi(m_1)(g_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(m_n)(g_n))$ , para todos  $f \in \mathcal{P}(n)$ ,  $g_i \in \mathcal{P}(m_i)$ , con  $1 \leq i \leq n$ .

### Ejemplos.

1. La proyección  $k[S_n] \rightarrow k$  dada por  $\sigma \mapsto 1$ , para todo  $\sigma \in S_n$ , induce un morfismo de operads  $Ass \rightarrow Com$ .
2. El Teorema de Poincaré-Birkhof-Witt (cf. [Ta]) implica que la representación  $Lie(n)$  es un sumando directo de la representación regular de  $S_n$ . Esto induce un morfismo de  $k[S_n]$ -módulos  $Lie(n) \hookrightarrow k[S_n]$ , que determina un morfismo de operads  $Lie \rightarrow Ass$ .
3. Dado  $k \geq 1$ , existe un morfismo natural de operads  $q_k : \mathcal{Q}_k \rightarrow \mathcal{Q}_{k+1}$  que consiste en enviar la configuración  $(C_1, \dots, C_n)$  en  $(C_1 \times [\frac{1}{2} - r_1, \frac{1}{2} + r_1], \dots, C_n \times [\frac{1}{2} - r_n, \frac{1}{2} + r_n])$ , donde  $r_i$  es el radio de  $C_i$ .

Por ejemplo



## 1.2 Algebras sobre una operad

**Definición 3** Sea  $\mathcal{P}$  una operad en la categoría  $\mathcal{C}$ . Una  $\mathcal{P}$ -álgebra es un objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$ , provisto de morfismos  $\rho_n : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \rightarrow A$ , donde  $A^{\otimes n}$  denota el producto de  $A$  consigo mismo  $n$  veces, que verifican las siguientes relaciones:

a) (Compatibilidad con  $\gamma_{\mathcal{P}}$ ) Dados  $f \in \mathcal{P}(n)$ ,  $g_1 \in \mathcal{P}(m_1)$ ,  $\dots$ ,  $g_n \in \mathcal{P}(m_n)$  y elementos  $a_1^1, \dots, a_{m_1}^1, \dots, a_1^n, \dots, a_{m_n}^n$  de  $A$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} & \rho_{m_1+\dots+m_n}(\gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_n) \otimes a_1^1 \otimes \dots \otimes a_{m_n}^n) = \\ & \rho_n(f \otimes \rho_{m_1}(g_1 \otimes a_1^1 \otimes \dots \otimes a_{m_1}^1) \otimes \dots \otimes \rho_{m_n}(g_n \otimes a_1^n \otimes \dots \otimes a_{m_n}^n)). \end{aligned}$$

b) La composición  $\rho_1 \circ (\eta \otimes Id_A)$  es el isomorfismo canónico de  $\kappa \otimes A$  en  $A$ .

c) Dada una permutación  $\sigma \in S_n$ , se tiene que:

$$\rho_n((\sigma \cdot f) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \rho_n(f \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)}).$$

**Definición 4** Dadas dos  $\mathcal{P}$ -álgebras  $A$  y  $B$ , un morfismo de  $\mathcal{P}$ -álgebras es un morfismo  $\phi$  en  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  tal que  $\phi(\rho_n^A(f \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n)) = \rho_n^B(f \otimes \phi(a_1) \otimes \dots \otimes \phi(a_n))$ .

**Ejemplo.** Dado un espacio topológico  $X$  y un punto  $x_0 \in X$ , consideramos el espacio de lazos  $\Omega(X, x_0) := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua} : \gamma(0) = x_0 = \gamma(1)\}$  con la topología compacto abierta (si  $X$  es conexo por arcos,  $\Omega(X, x_0)$  no depende del punto  $x_0$  elegido). Dado  $n \geq 1$ , definimos la función continua

$$\rho_n : \mathcal{Q}_1(n) \times \Omega(X, x_0)^n \rightarrow \Omega(X, x_0),$$

$$\rho_n((C_1, \dots, C_n), \gamma_1, \dots, \gamma_n)(t) := \begin{cases} x_0 & \text{si } t \notin \bigcup_{i=1}^n C_i \\ \gamma_i\left(\frac{t-t_0^i}{t_1^i-t_0^i}\right) & \text{si } t \in C_i, \end{cases}$$

donde  $C_i$  es el intervalo  $[t_0^i, t_1^i]$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Es fácil ver que  $\rho_n$  está bien definida y es continua. Los morfismos  $\rho_n$  definen una estructura de  $\mathcal{Q}_1$ -álgebra sobre  $\Omega(X, x_0)$ .

### Ejercicios.

1. Probar que la categoría de  $k$ -álgebras asociativas es equivalente a la categoría de las *Ass*-álgebras en  $Vect_k$ , y que la categoría de  $k$ -álgebra asociativas y conmutativas es equivalente a la categoría de *Com*-álgebras.
2. Sean  $X$  un espacio topológico y  $x_0$  un punto de  $X$ . Definimos en forma recurrente  $\Omega^1(X) := \Omega(X, x_0)$  y  $\Omega^n(X) := \Omega(\Omega^{n-1}(X), x_0^{n-1})$ , donde  $x_0^n$  es la función constante de  $\Omega(\Omega^{n-1}(X), x_0^{n-1})$ . Probar que  $\Omega^n(X)$  es una  $\mathcal{Q}_n$ -álgebra, para  $n \geq 1$ .

**Observación 5** Un morfismo de operads  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  induce un funtor  $F_\varphi : \mathcal{Q} - alg \rightarrow \mathcal{P} - alg$ , usando la composición:

$$\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{\varphi^{(n)} \otimes Id} \mathcal{Q}(n) \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{\rho_n} A \quad ,$$

donde  $\mathcal{Q} - alg$  (respectivamente,  $\mathcal{P} - alg$ ) denota la categoría de  $\mathcal{Q}$ -álgebras (respectivamente, de  $\mathcal{P}$ -álgebras).

Por ejemplo, el morfismo de operads  $Ass \rightarrow Com$  induce el funtor de inclusión  $Com - alg \rightarrow Ass - alg$  para todo cuerpo fijo  $k$ . En el otro ejemplo, tenemos que el morfismo de operads  $Lie \rightarrow Ass$  induce el funtor de la categoría de álgebras asociativas en la categoría de álgebras de Lie que a un álgebra  $(A, \cdot)$  le asocia el álgebra de Lie cuyo espacio vectorial subyacente es  $A$ , provisto del corchete de Lie definido por:

$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a, \quad \text{para } a, b \in A.$$

### Ejercicios.

1. Sea  $\mathcal{P}$  una operad en la categoría  $Vect_k$  y sea  $\mathcal{O} : \mathcal{P} - alg \rightarrow Vect_k$  el funtor tal que  $\mathcal{O}(A)$  es el espacio vectorial subyacente de la  $\mathcal{P}$ -álgebra  $A$ . El funtor  $\mathcal{O}$  se llama a menudo *functor de olvido*, porque consiste en olvidar parte de la estructura de  $A$ . Probar que el funtor  $\mathcal{O}$  admite un funtor adjunto a izquierda  $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} : Vect_k \rightarrow \mathcal{P} - alg$ , tal que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(V) = \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n} \otimes_{k[S_n]} \mathcal{P}(n), \quad \text{para todo espacio vectorial } V,$$

donde la acción a derecha de  $S_n$  en  $V^{\otimes n}$  está dada por  $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot \sigma := v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$ .

2. Recordemos que un álgebra de Poisson sobre  $k$  es un espacio vectorial  $A$  provisto de dos operaciones binarias  $\cdot$  y  $[-, -]$  tales que:
  - a)  $(A, \cdot)$  es una  $k$ -álgebra asociativa y conmutativa, y  $(A, [-, -])$  es un álgebra de Lie sobre  $k$ .
  - b) las operaciones  $\cdot$  y  $[-, -]$  verifican la siguiente relación:

$$[a \cdot b, c] = a \cdot [b, c] + [a, c] \cdot b, \quad \text{para } a, b, c \in A.$$

Probar que:

(i) Si  $k$  es un cuerpo de característica 0 y  $Poiss$  es la operad asociada a las álgebras de Poisson, entonces  $Poiss(n)$  es la representación regular de  $S_n$ , para  $n \geq 1$ .

(ii) Describir los morfismos  $\gamma_{Poiss}$ .

**Definición 6** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría monoidal (no necesariamente simétrica). Una operad no-simétrica, o no- $\Sigma$  operad, en  $\mathcal{C}$  es una colección de objetos  $\mathcal{P}'(n)$  de  $\mathcal{C}$ , provisto de una familia de morfismos

$$\delta_{\mathcal{P}'} : \mathcal{P}'(n) \otimes \mathcal{P}'(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}'(m_n) \longrightarrow \mathcal{P}'(m_1 + \cdots + m_n),$$

y un morfismo  $\eta : \kappa \rightarrow \mathcal{P}'(1)$  que verifican las condiciones a) y b) de la Definición 1.

Si  $\mathcal{C}$  es una categoría monoidal simétrica con coproductos finitos, a toda operad no simétrica  $\mathcal{P}'$  en  $\mathcal{C}$  se le asocia una operad  $\mathcal{P}$  en  $\mathcal{C}$  de la siguiente forma:

1. El objeto  $\mathcal{P}(n)$  es  $\kappa[S_n] \otimes \mathcal{P}'(n)$ , donde  $\kappa[S_n] := \coprod_{\sigma \in S_n} \kappa_\sigma$ , con  $\kappa_\sigma = \kappa$  para todo  $\sigma \in S_n$ .
2. La acción de  $S_n$  en  $\mathcal{P}(n)$  está dada por la acción evidente en  $\kappa[S_n]$  donde  $S_n$  actúa permutando las copias de  $\kappa$ .
3. Sea  $\Theta_{n,(m_i)}$  la aplicación dada por:

$$\Theta_{n,(m_i)}(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n) := (\tau_1 \times \cdots \times \tau_n) \cdot \sigma(m_1, \dots, m_n).$$

Los morfismos  $\gamma_{\mathcal{P}}$  están inducidos en forma evidente por los  $\delta_{\mathcal{P}'}$  y los  $\Theta_{n,(m_i)}$ .

Un ejemplo evidente de una operad asociada a una operad no simétrica es  $Ass$ , donde  $Ass'(n) = k$ , para todo  $n \geq 1$ .

## 2 Polígono de Stasheff y espacios $A_\infty$

### 2.1 Árboles planares binarios

**Definición 7** Un árbol planar es un grafo  $t$  orientado conexo, sin lazos y con un elemento maximal tal que cada vértice de  $t$  es el punto inicial de un único segmento y el punto final de al menos dos segmentos.

El elemento maximal del árbol se llama *raíz*. Los segmentos de un árbol limitados por un vértice sólo en el extremo final se llaman *hojas*. El árbol que tiene como único vértice la raíz y  $n$  hojas se llama *corola de dimensión  $n$* , y se nota  $c_n$ .

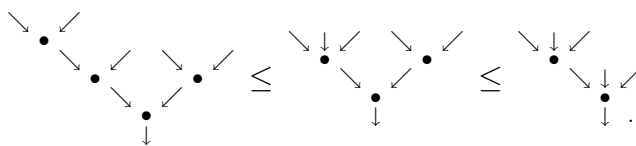
**Notation 8** Dado  $n \geq 0$ , notamos  $T_n$  al conjunto de árboles planares con  $n$  hojas.

A continuación describimos los conjuntos  $T_n$ , con  $n \leq 3$ ,

$$T_1 = \{\downarrow\}, \quad T_2 = \left\{ \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \downarrow \end{array} \right\}, \quad \text{y} \quad T_3 = \left\{ \begin{array}{c} \swarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \downarrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}, \begin{array}{c} \swarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \downarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}, \begin{array}{c} \swarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \downarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \right\}.$$

El número  $n$  se llama el *grado* de  $t \in T_n$  y se nota  $|t|$ . El conjunto  $T_n$  es la unión disjunta de los conjuntos  $T_{n,k} = \{t \in T_n : t \text{ tiene } n - 1 - k \text{ vértices}\}$ . El conjunto  $T_{n,0}$  está formado por los árboles tales que cada vértice es el punto final de exactamente dos segmentos, llamados árboles planares binarios, y  $T_{n,n}$  tiene un único elemento: la corola  $c_n$ .

Dados dos árboles  $t$  y  $t'$  en  $T_n$ , decimos que  $t$  es menor que  $t'$  si  $t'$  se obtiene a partir de  $t$  contrayendo segmentos internos. Por ejemplo, tenemos que:



Los árboles planares binarios son elementos minimales de  $T_n$  para el orden  $\leq$  y la corola  $c_n$  es el elemento maximal.

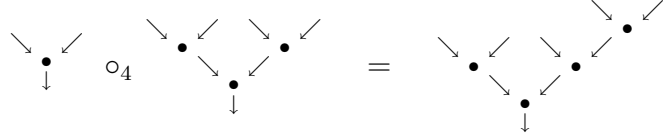
**Definición 9** Sean  $t^1, \dots, t^r$  árboles, con  $t^i \in T_{n_i}$  para  $1 \leq i \leq r$ ,  $\bigvee(t^1, \dots, t^r)$  es el elemento de  $T_{n_1 + \dots + n_r}$  que se obtiene uniendo las raíces de  $t^1, \dots, t^r$  a una nueva raíz.

Por ejemplo,

$$\bigvee \left( \begin{array}{c} \swarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \downarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}, \downarrow, \begin{array}{c} \swarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \downarrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \swarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \downarrow \quad \bullet \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}.$$

Todo árbol planar  $t \in T_n$  se expresa en forma única como  $t = \bigvee(t^1, \dots, t^r)$ , para cierto conjunto de árboles  $\{t^1, \dots, t^r\}$ , con  $|t^1| + \dots + |t^r| = n$ .

Dado  $t \in T_n$  numeramos sus hojas de izquierda a derecha con  $1, 2, \dots, n$ . Dados dos árboles  $t$  y  $t'$  y un entero  $1 \leq i \leq |t'|$ , el árbol  $t \circ_i t'$  se obtiene uniendo la raíz de  $t$  a la  $i$ -ésima hoja de  $t'$ . Por ejemplo,



Sea  $k[T_n]$  el  $k$ -espacio vectorial generado por  $T_n$ . Definimos  $\partial : k[T_n] \longrightarrow k[T_n]$  como la única transformación lineal que verifica las siguientes condiciones:

1.  $\partial(c_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^{(i+1)j} c_j \circ_i c_{n-j}$ .

2.  $\partial(\vee(t^0, t^1, \dots, t^r)) :=$

$$\sum_{i=0}^r (-1)^{n_0 + \dots + n_{i-1}} \vee(t^0, \dots, \partial(t^i), \dots, t^r) + (-1)^{n(t)} \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq r \\ (i,j) \neq (0,r)}} (-1)^{N_{i,j}} \vee(t^0, \dots, t^{i-1}, \vee(t^i, \dots, t^j), t^{j+1}, \dots, t^r).$$

donde  $n_i := |t^i|$  - número de vértices de  $t^i$ ,  $n(t) := n_0 + \dots + n_r$  si

$t = \vee(t^0, \dots, t^r)$ , y  $N_{i,j} := (i+1)(j-i) + (n_{j+1} + \dots + n_r)(j-i+1)$  para  $0 \leq j \leq r-1$ .

Notemos que el número de vértices de  $t$  es el número de vértices de  $\partial(t) - 1$ , luego  $\partial(T_{n,k}) \subseteq T_{n,k+1}$ .

La demostración del siguiente resultado se obtiene por inducción en  $n$ , si bien no es complicada resulta extensa y tediosa por lo cual preferimos dejarla a cargo del lector.

**Lema 10** *El morfismo  $\partial : T_n \rightarrow T_n$  verifica que  $\partial \circ \partial = 0$ .*

**Ejercicio.** Sea  $\{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 1}$  una familia de objetos en una categoría monoidal, tal que:

1. Existe un morfismo  $\eta : \kappa \rightarrow \mathcal{P}(1)$ .

2. Existen morfismos  $\circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \longrightarrow \mathcal{P}(m+n-1)$ , para todos los enteros positivos  $n, m$  y  $1 \leq i \leq m$ , que verifican:

$$(i) \circ_i \circ (\eta \otimes Id_{\mathcal{P}(m)}) = Id_{\mathcal{P}(m)}, \quad \text{para todos } m \geq 1, 1 \leq i \leq m,$$

$$(ii) \circ_1 \circ (Id_{\mathcal{P}(m)} \otimes \eta) = Id_{\mathcal{P}(m)}, \quad \text{para todo } m \geq 1,$$

(iii) Dados  $f \in \mathcal{P}(n)$ ,  $g \in \mathcal{P}(m)$ ,  $h \in \mathcal{P}(r)$ ,  $1 \leq i \leq m+r-1$  y  $1 \leq j \leq r$ ,

$$f \circ_i (g \circ_j h) = \begin{cases} g \circ_{n+j-1} (f \circ_i h), & \text{si } 1 \leq i \leq j-1 \\ (f \circ_{i-j+1} g) \circ_j h, & \text{si } j \leq i \leq j+m-1 \\ g \circ_j (f \circ_{i-m+1} h), & \text{si } j+m \leq i \leq m+r-1. \end{cases}$$

Probar que existe una única estructura de operad no simétrica en  $\{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 1}$  tal que

$$\gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes g \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) = g \circ_i f,$$

donde  $m_j = 1$  si  $j \neq i$ .

## 2.2 Polígono de Stasheff

Dado un espacio vectorial  $X$  y un punto  $x_0 \in X$ , en la sección anterior definimos el espacio  $\Omega(X, x_0)$  de lazos con base  $x_0$ . Dados dos lazos  $\gamma$  y  $\mu$ , la *composición de Poincaré* de  $\gamma$  y  $\mu$  es el lazo:

$$\gamma \circ \mu(t) := \begin{cases} \mu(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$




La operación  $\circ$  no es asociativa, pero  $H : [0, 1] \times \Omega(X, x_0)^3 \longrightarrow \Omega(X, x_0)$ , dada por:

$$H(h, \gamma, \mu, \delta)(t) := \begin{cases} \delta\left(\frac{4t}{1+h}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+h}{4} \\ \mu(4t-h-1) & \text{si } \frac{1+h}{4} \leq t \leq \frac{2+h}{4} \\ \gamma\left(\frac{4t-h-2}{2-h}\right) & \text{si } \frac{2+h}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$




define una homotopía entre  $(\gamma \circ \mu) \circ \delta$  y  $\gamma \circ (\mu \circ \delta)$ , para toda terna de lazos  $\gamma$ ,  $\mu$  y  $\delta$ .

El problema inicial de J.D. Stasheff (cf. [St1]) fue simplificar un criterio de Sugawara (cf. [Su]) que caracteriza los espacios topológicos que son, módulo homotopía, espacios de lazos. La idea básica de [St1] es considerar espacios topológicos  $X$  munidos de una función continua  $\circ : X^2 \rightarrow X$ .

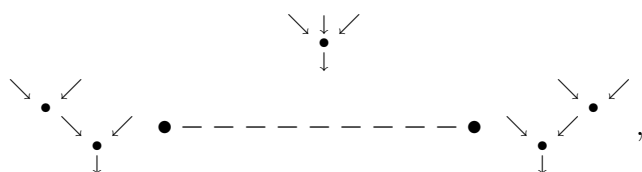
Observemos que el conjunto de árboles planares binarios  $T(n, 0)$  describe todas las formas posibles de obtener elementos de  $X$  a partir de  $n$  elementos  $x_1, \dots, x_n$  de  $X$  y la operación  $\circ$ , manteniendo el orden de las  $x_i$ 's. Por ejemplo:

1. El árbol  determina la operación  $x_1 \circ x_2$ .
2. El árbol  está asociado a la operación  $(x_1 \circ x_2) \circ x_3$ , mientras que el árbol  da la operación  $x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$ .

Evidentemente, si queremos todos los elementos posibles que se obtienen a partir de  $n$  elementos y la operación  $\circ$  debemos considerar las permutaciones de elementos, y tomar el producto cartesiano  $S_n \times T_{n,0}$ .

Como la operación  $\circ$  no es asociativa, sino asociativa módulo homotopía, Stasheff considera que la corola  representa la homotopía entre  y .

De otra forma, si miramos el conjunto parcialmente ordenado  $(T_3, \leq)$  y construimos su realización geométrica (cf. [CR]), obtenemos una descomposición celular del disco  $D^1 := \{t \in \mathbb{R} : t^2 \leq 1\}$  de dimensión 1, que es la división baricéntrica de:



que corresponde al polígono de Stasheff de dimensión 3,  $K_3$ .

En general, el polígono de Stasheff  $K_n$  (también llamado asociahedro) de dimensión  $n$  es una descomposición celular de  $D^{n-2} := \{(t_0, \dots, t_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \sum_{i=0}^{n-2} t_i^2 \leq 1\}$ , para  $n \geq 2$ , cuyas celdas de dimensión  $k$  corresponden a los elementos de  $T_{n,k}$ . Por ejemplo, los árboles planares binarios corresponden a los vértices de  $K_n$  y la única celda de dimensión  $n - 2$  corresponde a la corola  $c_n$ . Observemos además que el borde geométrico de  $K_n$  está descrito por la aplicación  $\partial$  definida en la sección anterior.

Existen en la literatura varias descripciones de la realización de  $K_n$  como un polígono convexo, por ejemplo [Le], [GKZ], [To], [De], [CFZ] y [Lo2]. Para aquellos lectores familiarizados con la realización geométrica de conjuntos parcialmente ordenados,



$K_n$  es la descomposición celular de  $D^{n-2}$  cuya subdivisión baricéntrica corresponde a la realización del conjunto parcialmente ordenado  $(T_n, \leq)$ . El espacio  $K_1$  es un punto que corresponde al árbol  $c_1 = \downarrow$ .

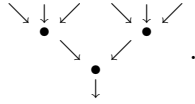
Dados enteros no negativos  $n, m_1, \dots, m_n$ , el espacio  $K_n \times K_{m_1} \times \dots \times K_{m_n}$  es igual a la celda de  $K_{m_1+\dots+m_n}$  correspondiente al árbol

$$c_{m_1} \circ_1 (c_{m_2} \circ_2 (\dots c_{m_{n-1}} \circ_{n-1} (c_{m_n} \circ_n c_n))))).$$

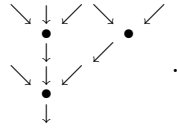
Por ejemplo,

1.  $K_1 \times K_m = K_m$  tiene dimensión  $m - 2$ , para  $m \geq 2$ , y corresponde a todo  $K_m$ , que es la celda asociada a  $c_m \circ_1 c_1 = c_m$ .

2.  $K_2 \times K_3 \times K_3$  tiene dimensión 2, y corresponde a la celda asociada al árbol



3.  $K_3 \times K_1 \times K_3 \times K_2$  es la celda de dimensión 2 asociada al árbol



Sea  $\lambda_{n,m_1,\dots,m_n} : K_n \times K_{m_1} \times \dots \times K_{m_n} \longrightarrow K_{m_1+\dots+m_n}$  la inclusión de  $K_n \times K_{m_1} \times \dots \times K_{m_n}$  en  $K_{m_1+\dots+m_n}$ , vía la identificación con la celda correspondiente.

**Ejercicio.** Probar el siguiente Lema.

**Lema 11** *La familia de  $\mathcal{K} := \{K_n\}_{n \geq 1}$  con las aplicaciones  $\lambda_{n,m_1,\dots,m_n}$  es una operad no simétrica en la categoría  $Top$ .*

El principal resultado de [St1] es el siguiente teorema, que simplifica el principio de reconocimiento de Sugawara:

**Teorema 12** *Un espacio conexo  $Y$ , con el tipo de homotopía de un complejo CW, tiene el tipo de homotopía de un espacio de lazos  $\Omega(X)$  para algún espacio  $X$  si y solo si  $Y$  es un álgebra sobre la operad asociada a  $\mathcal{K}$ .*

### 3 Otros ejemplos

#### 3.1 Operads algebraicas asociadas a operads topológicas

Dados un espacio topológico  $X$  y un cuerpo  $k$ , el espacio simplicial de cadenas singulares  $Sing_*(X, k)$ , de  $X$  con coeficientes en  $k$  (cf. [ML2] y [Ma2]), determina un funtor  $Sing : Top \rightarrow Simp(Vect_k)$ , donde  $Simp(Vect_k)$  es la categoría de objetos simpliciales de  $Vect_k$ . Sea  $CSing : Top \rightarrow GDVect_k$  la composición de  $Sing$  con el funtor  $CC : Simp(Vect_k) \rightarrow GDVect_k$ , que asigna a un objeto simplicial el complejo de cadenas asociado.

**Observación.** Dados  $n, m \geq 1$ , el producto de simples estándar  $\Delta^n \times \Delta^m$  es una unión de  $\binom{n+m}{n}$  copias de  $\Delta^{n+m}$ .

En efecto, para  $n$  y  $m$  fijos, consideremos el conjunto  $C_{n,m}$  de sucesiones no crecientes  $\underline{i} = (i_1, \dots, i_m)$  de  $m$  enteros con  $0 \leq i_j \leq n$ . Es fácil ver que  $C_{n,m}$  tiene  $\binom{n+m}{n}$  elementos. Para cada  $\underline{i} \in C_{n,m}$  definimos la región  $R_{\underline{i}}$  de  $\Delta^n \times \Delta^m$  como el conjunto de todos los elementos  $((x_1, \dots, x_n, 1 - \sum_{j=1}^n x_j), (y_1, \dots, y_m, 1 - \sum_{j=1}^m y_j))$  de  $\Delta^n \times \Delta^m$  que verifican, para todo  $1 \leq j \leq m$ , las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_{i_j} + y_1 + \dots + y_j &\leq 1, \\ x_1 + \dots + x_{i_j} + x_{i_j+1} + y_1 + \dots + y_j &\geq 1. \end{aligned}$$

Es claro que  $R_{\underline{i}}$  es un subconjunto cerrado de  $\Delta^n \times \Delta^m$ . Definimos  $F_{\underline{i}} : \Delta^{n+m} \rightarrow R_{\underline{i}}$ , asociada a  $\underline{i} = (i_1, \dots, i_m)$  en la siguiente forma:

Sean  $h_k$  el número de  $i_j$ 's tales que  $i_j = k+1$ , y  $H_k := h_0 + \dots + h_k$ , para  $0 \leq k \leq n$ . Y sean

$$g_l := \begin{cases} i_m + 1 & \text{si } l = m \\ i_l - i_{l-1} + 1 & \text{si } 1 \leq l < m \\ n - i_1 & \text{si } l = 0, \end{cases}$$

y  $G_m := g_1 + \dots + g_m$ . Dado un elemento  $(t_0, \dots, t_{n+m}) \in \Delta^{n+m}$ , definimos  $F_{\underline{i}}((t_0, \dots, t_{n+m})) :=$

$$((t_0 + \dots + t_{h_0}, \dots, t_{H_{n-1}+1} + \dots + t_{n+m}), (t_{G_m+1} + \dots + t_{n+m}, \dots, t_0 + \dots + t_{g_m})).$$

La demostración del siguiente resultado queda a cargo del lector.

**Lema 13** *Las regiones  $R_{\underline{i}}$  definidas más arriba verifican las siguientes propiedades:*

1. La intersección de los interiores de las regiones  $R_{\underline{i}}$  y  $R_{\underline{k}}$  es vacía si  $\underline{i} \neq \underline{k}$ .
2.  $\Delta^n \times \Delta^m$  es la unión de los subespacios cerrados  $R_{\underline{i}}$ , con  $\underline{i} \in C_{n,m}$ .
3. Dado  $\underline{i} \in C_{n,m}$ , la función  $F_{\underline{i}} : \Delta^{n+m} \rightarrow R_{\underline{i}}$  es continua y biyectiva.

Dada una operad  $\mathcal{P}$  en  $Top$ , la operad  $CSing(\mathcal{P})$  en  $DGVect_k$ , está dada por:

1.  $CSing(\mathcal{P})(n)$  es el complejo de cadenas asociado  $CSing(\mathcal{P}(n))$ .
2. La acción de  $S_n$  en  $CSing(\mathcal{P})(n)$  es la inducida por la acción de  $S_n$  en  $\mathcal{P}(n)$ .
3. Las funciones  $\gamma_{CSing(\mathcal{P})}$  están determinadas por las aplicaciones  $F_{\underline{i}}$ , definidas anteriormente, y las funciones  $\gamma_{\mathcal{P}}$ .

**Ejemplos. 1. La operad  $A_\infty$ .** Sea  $CSing(\mathcal{K})$  la no- $\Sigma$  operad asociada a los polítopos de Stasheff. El objeto  $CSing(\mathcal{K})(n)$  es el complejo de cadenas singular del polítopo  $K_n$ .

**Definición 14** (cf. [Vo2]) *La operad  $A_\infty$  de álgebras asociativas módulo homotopía en la categoría  $DGVect_k$  es la operad asociada a  $CSing(\mathcal{K})$ .*

Observemos que el complejo  $CSing(\mathcal{K})(n)$  resulta quasi-isomorfo (cf. [ML2]) al complejo de cadenas  $(k[T_n], \partial)$  cuyos  $k$ -ésimo espacio está generado por el conjunto  $T_{n,k}$  de árboles planares con  $n$  hojas y  $n - k - 1$  vértices, y cuyo diferencial está dado el morfismo  $\partial$  definido en la Sección 2.1. Tenemos que  $k[T_n]_{n-2}$  es el espacio de dimensión 1 generado por la corola  $c_n$ , y que  $k[T_n]_k = 0$ , para  $k > n - 2$ .

**Ejercicio.** (díficil) Probar que una  $A_\infty$ -álgebra es un  $k$ -espacio vectorial diferencial graduado  $(A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n, d)$  munido de una familia  $\{\mu_n\}_{n \geq 2}$  de operaciones tales que:

1.  $\mu_n : A^{\otimes n} \rightarrow A$  es una transformación  $n$ -lineal de grado  $n - 2$ ,
- 2.

$$d(\mu_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)) - (-1)^n \sum_{i=1}^n \alpha(i) \mu_n(a_1 \otimes \cdots \otimes d(a_i) \otimes \cdots \otimes a_n) =$$

$$\sum_{k+l=n+1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+l(n-i-l)} \beta(i, l) \mu_k(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes \mu_l(a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+l})) \otimes \cdots \otimes a_n,$$

donde  $\alpha(i) := (-1)^{|a_1| + \cdots + |a_i| - 1}$ ,  $\beta(i, l) := (-1)^{|a_1| + \cdots + |a_i| + l - 2}$ , y  $|a|$  es el grado de  $a \in A$ .

**2. Álgebras de Gerstenhaber** En [Ge], M. Gerstenhaber define distintas operaciones en el complejo  $CC^*(A)$  de cocadenas de Hochschild de una  $k$ -álgebra  $A$ , que le permiten obtener en el  $A$ -módulo de cohomología de Hochschild  $HH^*(A)$  un producto conmutativo  $\cup$  y un corchete de Lie  $[-, -]$ , que verifican cierta relación.

**Definición 15** *Un álgebra de Gerstenhaber en un espacio vectorial graduado  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  munido de dos operaciones binarias  $\cdot$  y  $[-, -]$  que verifican las siguientes propiedades:*

1.  $\cdot$  es asociativa y conmutativa graduada, o sea,

$$v \cdot w = (-1)^{nm} w \cdot v, \quad \text{para } v \in V_n \text{ y } w \in V_m.$$

2.  $[-, -]$  es un corchete de Lie graduado en la desuspensión  $V[1]$  de  $V$ , esto es

$$[v, w] = (-1)^{(n-1)(m-1)} [w, v]$$

$$[v, [w, z]] = [[v, w], z] - (-1)^{(m-1)(r-1)} [[v, z], w], \quad \text{si } v \in V_n, w \in V_m \text{ y } z \in V_r.$$

3.

$$[v, w \cdot z] = [v, w] \cdot z + (-1)^{(n-1)m} w \cdot [v, z], \quad \text{si } v \in V_n, w \in V_m \text{ y } z \in V_r.$$

En otras palabras, un álgebra de Gerstenhaber es una cierta versión graduada de un álgebra de Poisson.

El ejemplo clásico de un álgebra de Gerstenhaber es el  $k$ -espacio de cohomología de Hochschild de un álgebra asociativa sobre  $k$  (cf. [Ge]).

Sea  $e_2 = H_*(\mathcal{Q}_2, k)$  la operad en  $GVect_k$  asociada a la homología singular de la operad  $\mathcal{Q}_2$  de pequeños cubos en el plano. O sea que  $e_2(n) = \sum_{i \geq 0} H_i(\mathcal{Q}_2(n), k)$  es la homología del complejo  $CSing(\mathcal{Q}_2(n), k)$ .

El siguiente Teorema se debe a F. Cohen (cf. [Co])

**Teorema 16** *La categoría de álgebras de Gerstenhaber  $\mathbb{Z}$ -graduadas es equivalente a la categoría de  $e_2$ -álgebras.*

En 1993, P. Deligne conjeturó que el Teorema de Cohen puede ser naturalmente levantado a los complejos de cocadenas.

**Conjetura de Deligne.** El complejo de cocadenas de Hochschild de un álgebra asociativa  $A$  es una  $CSing(\mathcal{Q}_2)$ -álgebra.

La conjetura de Deligne fue probada por M. Konsevitch en 1999. Para una descripción más detallada del problema sugerimos ver [Ko], [KS], [Vo1] y [Ta].

## 3.2 Otras operads asociadas a los árboles planares

### 1. Magma libre (cf. [GH] )

**Definición 17** *Un magma libre sobre  $k$  es un  $k$  espacio vectorial  $M$  equipado con una operación bilineal  $\mu : M \otimes M \longrightarrow M$ .*

**Ejercicio.** Probar que la operad  $Mag$  cuyas álgebras son magmas libres, es la operad asociada a la siguiente no- $\Sigma$  operad siguiente:

1.  $Mag'(n)$  es el  $k$ -espacio vectorial  $k[T_{n,0}]$  generado por el conjunto de árboles planares binarios con  $n$  hojas, para  $n \geq 2$ .
2.  $Mag'(1) := k \cdot \downarrow$
3.  $\delta_{Mag'} : k[T_{n,0}] \otimes k[T_{m_1,0}] \otimes \cdots \otimes k[T_{m_n,0}] \longrightarrow k[T_{m_1+\cdots+m_n,0}]$  está dada por:

$$\delta_{Mag'}(t_0 \otimes t_1 \otimes \cdots \otimes t_n) := t_1 \circ_1 (t_2 \circ_2 (\cdots (t_{n-1} \circ_{n-1} (t_n \circ_n t_0))),$$

donde  $\circ_i$  es la operación de *injerto en la  $i$ -ésima hoja*, definida en la Sección 2.1.

### 2. Algebras dendriformes (cf. [Lo3])

**Definición 18** *Un álgebra dendriforme sobre  $k$  es un  $k$  espacio vectorial  $D$  munitido de dos operaciones bilineales  $\succ, \prec : D \otimes D \longrightarrow D$  que verifican las siguientes relaciones:*

1.  $a \succ (b \succ c) = (a \succ b) \succ c + (a \prec b) \succ c,$
2.  $a \succ (b \prec c) = (a \succ b) \prec c,$
3.  $a \prec (b \succ c) + a \prec (b \prec c) = (a \prec b) \prec c,$

para todos  $a, b$  y  $c$  en  $D$ .

**Observación** Si  $(D, \succ, \prec)$  es un álgebra dendriforme entonces  $(D, *)$  es un álgebra asociativa, con  $a * b := a \succ b + a \prec b$ .

**Ejemplo.** Consideremos el espacio vectorial  $Dend(k)$  generado por todos los árboles planares binarios,  $Dend(k) := \bigoplus_{n \geq 1} k[T_{n,0}]$ .

Notemos que si  $t^l$  y  $t^r$  son dos árboles planares binarios, entonces  $t = \vee(t^l, t^r)$  también resulta un árbol binario. Más aún, dado  $t \in T_{n+1,0}$ ,  $t$  se escribe en forma única como  $\vee(t^l, t^r)$ , con  $t^l \in T_{n_l+1,0}$ ,  $t^r \in T_{n_r+1,0}$ , y  $n = n_l + n_r + 1$  (donde  $t^l$  o  $t^r$  pueden ser el árbol  $\downarrow$ ).

Existe una única estructura de álgebra dendriforme en  $Dend(k)$  dada por las siguientes definiciones:

1. Dado un árbol planar binario  $t$ , tenemos que:

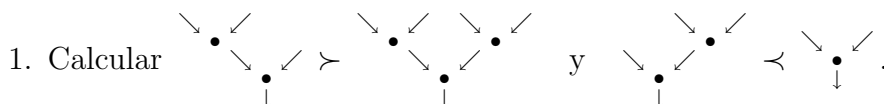
- (i)  $t * \downarrow := t =: \downarrow * t$ ,
- (ii)  $t \succ \downarrow = \downarrow \prec t = 0$ ,
- (iii)  $t \prec \downarrow = \downarrow \succ t = t$ .

2. Si  $t = \vee(t^l, t^r)$  y  $w = \vee(w^l, w^r)$ , entonces

- (i)  $t \succ w := \vee(t * w^l, w^r)$ ,
- (ii)  $t \prec w := \vee(t^l, t^r * w)$ ,




donde  $t * w = t \succ w + t \prec w$ .

**Ejercicio.**



2. Probar que  $Dend(k)$  con las operaciones  $\succ$  y  $\prec$  así definidas es un álgebra dendriforme.

La operad  $Dend$  asociada a las álgebras dendriformes está dada por un operad no simétrica  $Dend'$ . Para describirla, observemos que las operaciones en  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ , donde el orden de la variables queda fijo, corresponden a todos los árboles planares binarios con  $n + 1$  hojas.

Consideramos al árbol  como la operación identidad, a  como la operación  $x_1 \succ x_2$ , y a  como la operación  $x_1 \prec x_2$ . Vamos a ver ahora que  $Dend'(n)$  es el espacio vectorial generado por el conjunto  $T_{n+1,0}$ .

Procedemos por inducción sobre  $n$ : dado un árbol  $t = \vee(t^l, t^r)$ , suponemos que existen operaciones  $f_l \in Dend'(n_l)$  y  $f_r \in Dend'(n_r)$  que corresponden, respectivamente, a  $t^l$  y  $t^r$ ; entonces a  $t$  le corresponde la operación

$$f(x_1, \dots, x_n) := f_l(x_1, \dots, x_{n_l}) \succ x_{n_l+1} \prec f_r(x_{n_l+2}, \dots, x_n).$$

Al revés, dada una operación  $f \in Dend'(n)$ , las relaciones de la definición 18 implican que existe una única expresión del tipo:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_l(x_1, \dots, x_{n_l}) \succ x_{n_l+1} \prec f_r(x_{n_l+2}, \dots, x_n),$$

con  $1 \leq l \leq n$ ,  $f_l \in Dend'(n_l)$  y  $f_r \in Dend'(n - n_l - 1)$ . Procediendo por inducción en  $n$ , si  $f_l$  está dada por el árbol  $t^l$  y  $f_r$  por el árbol  $t^r$ , entonces a  $f$  le corresponde el árbol  $t = \vee(t^r, t^l)$ .

Esto muestra que  $Dend'(n) = k[T_{n+1,0}]$ , para  $n \geq 1$ .

Evidentemente,  $\eta : k \rightarrow k[T_{2,0}] = k \cdot \begin{array}{c} \searrow \quad \swarrow \\ \bullet \\ \downarrow \end{array}$  es el morfismo identidad.

Para definir las operaciones  $\delta_{Dend'}$  usamos la estructura de álgebra dendriforme de  $Dend(k)$ . Supongamos que tenemos  $t \in T_{n+1,0}$ ,  $w_1 \in T_{m_1+1,0}$ ,  $\dots$  y  $w_n \in T_{m-n+1,0}$ , sabemos que a  $t$  le corresponde una única operación  $f$  de  $n$  variables, construida a partir de  $\succ$  y  $\prec$ . Definimos entonces:

$$\delta_{Dend'}(t \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_n) := f(w_1, \dots, w_n).$$

La definición es correcta pues  $w_1, \dots, w_n$  son elementos del álgebra dendriforme  $Dend(k)$ .

**Aplicaciones. I. Algebras de Baxter.** En [Ag] y [EF] se estudia la conexión entre las álgebras dendriformes y los operadores de Baxter. Un *operador de Baxter de peso*  $\lambda$  en un álgebra asociativa  $(A, \cdot)$  sobre  $k$  es una transformación lineal  $B : A \rightarrow A$  que verifica:

$$B(a) \cdot B(b) + \lambda B(a \cdot b) = B(a \cdot B(b) + B(a) \cdot b), \quad \text{para } a, b \in A.$$

En particular, si  $B$  es un operador de Baxter de peso 0 sobre  $(A, \cdot)$  se definen operaciones:

$$a \succ b := B(a) \cdot b \quad \text{y} \quad a \prec b := a \cdot B(b), \quad \text{para } a, b \in A.$$

El siguiente resultado se verifica con un sencillo cálculo:

**Lema 19** Dada un álgebra asociativa  $(A, \cdot)$  con un operador de Baxter  $B$  de peso 0, el álgebra  $A$  con las operaciones  $\succ$  y  $\prec$  es un álgebra dendriforme.

**Ejercicio.** (o más bien problema . . . ) Construir la operad asociada a las álgebras de Baxter (Sugerencia: usar la construcción de álgebras de Baxter libres de [GuK] y que  $Baxt$  es una operad no simétrica )

**II. Grafos orientados y L-coálgebras.** En [Ler], P. Leroux define estructuras de co-álgebras asociadas a grafos orientados localmente finitos.

**Definición 20** Un grafo orientado es una cuaterna  $G = (G_0, G_1, s, t)$  donde  $G_0$  y  $G_1$  son conjuntos numerables, llamados respectivamente conjunto de vértices y conjunto de flechas, y  $s, t : G_1 \rightarrow G_0$  son aplicaciones, llamadas origen y final, respectivamente.

Un grafo orientado se dice localmente finito si  $s^{-1}(v)$  y  $t^{-1}(v)$  son conjuntos finitos, para todo  $v \in G_0$ .

Una función de peso en un grafo orientado  $G$  es una aplicación  $\omega : G_1 \rightarrow k$ .

En toda la sección consideraremos solo grafos orientados  $(G_0, G_1, s, t)$  tales que dados dos vértices  $v, w \in G_0$  existe a lo sumo una flecha  $g \in G_1$  con  $s(g) = v$  y  $t(g) = w$ .

Sea  $G$  un grafo orientado localmente finito equipado con una función de peso  $\omega$ . Consideramos el espacio vectorial  $k[G_0]$  generado por los vértices, provisto de los coproductos  $\Delta, \hat{\Delta} : k[G_0] \rightarrow k[G_0] \otimes k[G_0]$ , dados por:

$$\Delta(v) := \sum_{g \in G_1 \cap s^{-1}(v)} \omega(g)v \otimes t(g)$$

$$\hat{\Delta}(v) := \sum_{g \in G_1 \cap t^{-1}(v)} \omega(g)s(g) \otimes v,$$

para  $v \in G_0$ .

**Ejemplo.** Sea  $G$  el grafo dado por:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\lambda} & b \\ \mu \downarrow & \nearrow^{\lambda} & \uparrow \eta \\ d & & c, \end{array}$$

con  $\lambda, \mu$  y  $\eta \in k$ . Tenemos que  $\Delta(a) = a \otimes (\lambda b + \mu d)$ ,  $\hat{\Delta}(a) = 0$  y



$$\hat{\Delta}(b) = (\lambda(a + d) + \eta c) \otimes b.$$

Es fácil ver que  $\Delta$  y  $\hat{\Delta}$  no son coasociativas, pero verifican la siguiente relación:

$$(1) \quad (\hat{\Delta} \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \hat{\Delta}.$$

Si pensamos que el grafo indica el estado de un punto en un momento de terminado, la operación  $(\hat{\Delta} \otimes Id) \circ \Delta$  puede interpretarse como *pasado*  $\otimes$  *presente*  $\otimes$  *futuro*. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 21** Una  $L$ -coálgebra es un espacio vectorial  $V$  equipado con dos coproductos  $\Delta, \hat{\Delta} : V \longrightarrow V \otimes V$  que verifican la relación (1).

Si  $V$  es una  $L$ -coálgebra de dimensión finita, entonces su dual  $V^*$  es un espacio vectorial munido de dos productos  $\succ$  y  $\prec$  que verifican la segunda ecuación de la Definición 18, o sea:

$$a \succ (b \prec c) = (a \succ b) \prec c, \quad \text{para } a, b, c \in V^*.$$

Si llamamos  $L$ -álgebras a los objetos con esta propiedad, resulta que toda álgebra dendriforme es una  $L$ -álgebra.

**Ejercicio.** (sin respuesta conocida) Determinar la operad  $L - alg$  asociada a las  $L$ -álgebras y definir el morfismo de operads  $L - alg \longrightarrow Dend$  que da la inclusión de las álgebras dendriformes en las  $L$ -álgebras.

### 3. Algebras pre-Lie y álgebras de Gerstenhaber

En los ejemplos de la Sección anterior damos la definición de álgebra de Gerstenhaber. En [Ge], M. Gerstenhaber define ciertas operaciones en el complejo  $CC^*(A)$  de cocadenas de Hochschild de una  $k$ -álgebra  $A$ , que inducen una estructura de álgebra de Gerstenhaber en el espacio de cohomología  $HH^*(A)$ . En particular, el corchete de Lie proviene de una estructura llamada por M. Gerstenhaber álgebra pre-Lie álgebra, cuya definición es la siguiente:

**Definición 22** Una  $k$ -álgebra pre-Lie es un espacio vectorial  $L$  provisto de una operación bilineal  $\bullet : L \otimes L \longrightarrow L$  que verifica la siguiente relación:

$$(a \bullet b) \bullet c - (b \bullet a) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) - a \bullet (c \bullet b),$$

para todos  $a, b, c \in L$ .

### Observación.

1. Si  $(L, \bullet)$  es un álgebra pre-Lie, entonces  $L$  con el corchete definido por:

$$[a, b] := a \bullet b - b \bullet a, \quad \text{para } a, b \in L,$$

es un álgebra de Lie.

2. Si  $(D, \succ, \prec)$  es un álgebra dendriforme entonces  $D$  con la operación  $\bullet$  dada por .

$$a \bullet b := a \prec b - b \succ a, \quad \text{para } a, b \in D,$$

es un álgebra pre-Lie.

La operad asociada a las álgebras pre-Lie está descrita en [ChL] en términos de árboles no-planares con vértices coloreados.

**Ejercicio.** (con solución desconocida) En la observación definimos un funtor de la categoría de álgebras dendriformes en la categoría de álgebras pre-Lie. Describir el morfismo de operads  $Pre - Lie \longrightarrow Dend$  correspondiente a este funtor.

## References

- [Ag] M. Aguiar, *Infinitesimal bialgebras, pre-Lie and dendriform algebras*, en Hopf algebras: Proceedings from an International Conference held at De Paul University (2002), a aparecer.
- [Be] J. Beck, *On H-spaces and infinite loop spaces*, en Springer Lecture Notes in Math. 99, Springer-Verlag (1969).
- [BV] J.M. Boardman , R.M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lectures Notes in Math., vol. 347, Springer-Verlag, (1973).
- [CFZ] F. Chapoton, S. Fomin, A. V. Zelevinsky *Polytopal realizations of generalized associahedra*, arXiv: math.CO/0202004.
- [Co] F. R. Cohen, *The homology of  $\mathcal{C}_{n+1}$ -spaces,  $n \geq 0$* , en The homology of iterated loop spaces, Lect. Notes in Mathematics 533, Springer-Verlag (1976) 207-351.

- [CR] C. Curtis , I. Reiner, *Methods of Representation Theory II*, Wiley Interscience (1985).
- [ChL] F. Chapoton, M. Livernet , *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Internat. Math. Res. Notices, num. 8 (2001) 395-408.
- [De] S. L. Devadoss, *Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad*, en Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), Contemp. Math. 239 (1999) 91-114.
- [EF] K. Ebrahimi-Fard, *Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation*, Lett. Math. Phys. 61, num. 2 (2002) 139-147.
- [Ge] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) 78 (1963) 267-288.
- [GH] L. Gerritzen, R. Holtkamp, *Co-addition for free non-associative algebras and the Hausdorff series*, arXiv math.RA/0207083.
- [GK] V. Ginzburg , M. M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J.,76:203-272,1994.
- [GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser Boston (1994).
- [GuK] L. Guo, W. Keigher, *Baxter algebras and the shuffle products*, Adv. in Math. 150 (2000) 117-149.
- [Kl] A. Klyachko, *Lie elements in the tensor algebra*, Siberian Math. J. 15 (1974), 1296-1304.
- [Ko] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, Lett. Math. Phys. 48 (1999) 35-72.
- [KS] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Deformations of algebras over operads and Deligne's Conjecture*, arXiv math.QA/0001151.
- [Le] C. W. Lee, *The associahedron and triangulations of the n-gon*, European J. of Combin. 10, n 6 (1989) 551-560.

- [Ler] P. Leroux, *Thèse: Description algébrique des graphes orientés pondérés et applications*, Pub. Univ. de Rennes, Num. 2834 (2003).
- [Lo2] J. L. Loday, *Realization of the Stasheff polytope*, preprint ( 9 de diciembre de 2002), arXiv: math.AT/0212126 v1.
- [Lo3] J.-L. Loday. *Dialgebras* , en Dialgebras and related operads, Springer Lecture Notes in Math. 1763 (2002)
- [Ma1] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics vol 271, Springer-Verlag (1972).
- [Ma2] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, D. Van Nostrand 1967, reeditado por The University of Chicago Press 1982 y 1992.
- [Ma3] J. P. May, *Definitions: operads, algebras and modules*, en Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math. 202 (1997) 1-7.
- [Ma4] J. P. May, *Operads, algebras and modules*, en Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math. 202 (1997) 15-31.
- [Mi] R. J. Milgram, *Iterated loop spaces*, Annals of math. 84 (1966) 386-403.
- [ML1] S. MacLane, *Categorical algebra* , Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965) 40-106.
- [ML2] S. MacLane, *Homology*, Classics in Math., Springer-Verlag (1995).
- [Su] M. Sugawara, *On a condition that a space is group-like*, Math. J. Okayama Univ. 7 (1957) 123-149.
- [St1] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I y II*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 275-312.
- [St2] J. D. Stasheff, *The pre-history of operads*, en Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math. 202 (1997) 9-14.
- [St3] J. D. Stasheff, *From operads to physically inspired theories*, en Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math. 202 (1997) 53-81.

- [Tam] D. E. Tamarkin, *Formality of chain operad of small square*, arXiv:math.QA/9809164 (1998)
- [Ta] D. Tanré, *Homotopie Rationnelle: Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Springer Lecture Notes in Mathematics vol. 1025, Springer-Verlag (1983).
- [To] A. P. Tonks, *Relating the associahedron and the permutahedron*, en *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*, *Contemp. Math.* 202 (1997) 33-36.
- [Vi] J. W. Vick, *Homology theory; an introduction to algebraic topology*, segunda edición, Springer-Verlag, (1994), 41-65.
- [Vo1] A. A. Voronov, *Homotopy Gerstenhaber algebras*, Conf. Moshe Flato 1999 (G. Dito and D. Sternheimer, eds.), vol. 2, Kluwer Acad. Pub. (2000), 307-331.
- [Vo2] A. A. Voronov, *Notes on universal algebra*, Univ. of Warwick Preprint 26/2001, arXiv:math QA/0111009.