

REPRESENTACIONES DEL GRUPO SIMÉTRICO

LEANDRO CAGLIERO

ÍNDICE

Introducción	1
1. Primera parte: El grupo simétrico y representaciones de grupos	2
1.1. Factorización en el grupo simétrico	2
1.2. Particiones y clases de conjugación de \mathcal{S}_n	3
1.3. Representaciones de grupos	4
1.4. La representación canónica y la representación estándar de \mathcal{S}_n	5
1.5. Representaciones de permutación	6
2. Segunda parte: Módulos de Specht	7
2.1. Diagramas, tablas, tabloides y subgrupos de Young	7
2.2. Politableoides y módulos de Specht S^λ	10
2.3. Teorema del submódulo de James	12
2.4. Subrepresentaciones de M^λ y clases de isomorfismos y cuando $char(k) = 0$	14
3. Tercera parte: Caracteres	15
3.1. Resultados básicos	15
3.2. Caracteres de \mathcal{S}_n : El anillo de Littlewood-Richardson $\mathcal{V}(\mathcal{S})$	16
3.3. Polinomios simétricos en d variables	18
3.4. El anillo de funciones simétricas Λ	20
3.5. El isomorfismo de anillos $\mathcal{V}(\mathcal{S}) \simeq \Lambda$	24
3.6. Algunas fórmulas famosas	25
Referencias	26

INTRODUCCIÓN

Los primeros aportes a la teoría de representaciones del grupo simétrico fueron hechos por Frobenius y Schur a fines del siglo XIX y pocos años más tarde Young le dio un gran impulso al área. Desde entonces la teoría de representaciones del grupo simétrico en particular, de los grupos de Coxeter en general, y sus diversas aplicaciones tienen un gran interés científico que incluso se ha acentuado en los últimos años.

Hay excelentes libros y artículos que tratan este tema desde diversos puntos de vista y algunos de ellos, como por ejemplo [Ja] o [Ma], son clásicos de la literatura en el área. Numerosos autores ponen énfasis al destacar la profundidad y dificultad de sus resultados a pesar de que muchas veces los argumentos combinatorios utilizados son relativamente elementales. Remarcan que esta característica combinada con las tan diversas ramas de la matemática que confluyen a esta área, le otorgan al tema una belleza especial.

Estas notas son una breve introducción y contienen las demostraciones de dos teoremas centrales del área. El primero es el Teorema del submódulo de James, en característica arbitraria,

Date: Córdoba, 20 de junio de 2006.

1991 Mathematics Subject Classification. 20C30, 20C15.

para los módulos de Specht S^λ ; y el segundo es el que establece un isomorfismo entre el anillo de Littlewood-Richardson, formado por los caracteres virtuales de todos los \mathcal{S}_n , y el anillo de funciones simétricas con coeficientes enteros. Las demostraciones de estos teoremas están completas salvo por algunos resultados de la teoría de representaciones de grupos finitos o de algunas identidades que relacionan entre sí las distintas familias de polinomios simétricos. Estos resultados e identidades son básicas en las respectivas áreas y son enunciados en estas notas sin demostración.

Las notas están divididas en tres partes. En la primera introducimos el grupo simétrico \mathcal{S}_n y enunciamos algunos resultados de teoría de representaciones de grupos finitos. En la sección que describimos la representación canónica de \mathcal{S}_n destacamos algunas diferencias que aparecen si la característica del cuerpo divide a n .

En la segunda parte demostramos el Teorema del submódulo de James en característica arbitraria siguiendo la monografía [Ja]. Esta demostración no requiere de ningún resultado de teoría de representaciones. Luego, como consecuencia de este teorema, obtenemos la clasificación de las representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n sobre cualquier cuerpo de característica cero. Esta clasificación requiere solamente el resultado que establece cuántas representaciones irreducibles no equivalentes tiene un grupo finito. La clasificación de las representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n en característica arbitraria tampoco requiere otros resultados de teoría de representaciones pero sí es necesario un poco más de trabajo. Se puede consultar en [Ja].

La tercera parte está dedicada al isomorfismo entre el anillo de Littlewood-Richardson, y el anillo de funciones simétricas con coeficientes enteros. Comenzamos enunciando las propiedades básicas de los caracteres de grupos finitos sin demostraciones. De manera análoga se define el anillo de funciones simétricas, pariente muy cercano del anillo de polinomios simétricos, y listamos algunas de las identidades básicas que relacionan entre sí las distintas familias de polinomios simétricos. El libro [Ma] es una referencia clásica en este tema. Aceptando las propiedades de los caracteres y las identidades entre polinomios simétricos demostramos el isomorfismo mencionado siguiendo [Go]. De este teorema se desprenden muchas fórmulas famosas de los caracteres de \mathcal{S}_n que son obtenidas en la última sección.

1. PRIMERA PARTE: EL GRUPO SIMÉTRICO Y REPRESENTACIONES DE GRUPOS

1.1. Factorización en el grupo simétrico.

El *grupo simétrico* \mathcal{S}_n es el conjunto de todas las biyecciones $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ con la composición de funciones como multiplicación. Sus elementos son llamados *permutaciones*. Ocasionalmente será necesario considerar el grupo de permutaciones (biyecciones) de algún conjunto finito E que no sea necesariamente $\{1, \dots, n\}$. A este grupo lo denotaremos \mathcal{S}_E .

Una permutación puede ser descripta a través de su tabla de valores (horizontal)

$$\pi = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{array}.$$

Por ejemplo, si

$$\sigma = \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{array} \quad \text{y} \quad \tau = \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 7 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{array}$$

entonces

$$\sigma\tau = \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 6 & 7 & 1 & 4 \end{array}.$$

Una permutación π se dice *k-ciclo* o simplemente un ciclo (de longitud k) si fija todos los elementos de $\{1, \dots, n\}$ salvo los de un subconjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ para los cuales $\pi(a_i) = a_{i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$, y $\pi(a_k) = a_1$. En este caso denotamos a π por $(a_1 a_2 \dots a_k)$. Los

ciclos de longitud 2 se llaman *trasposiciones*. Dos ciclos se dicen *disjuntos* si los correspondientes subconjuntos no fijos son disjuntos. Es claro que ciclos disjuntos conmutan entre sí. El siguiente teorema es bien conocido.

Teorema 1.1. *Toda permutación se factoriza de manera única, salvo por el orden, como producto de ciclos disjuntos. Además, toda permutación se factoriza como producto de trasposiciones (no necesariamente disjuntas). Esta factorización no es única pero la paridad de la cantidad de trasposiciones que aparecen en cualquier factorización de una permutación dada es única.*

Por ejemplo, las permutaciones de arriba son

$$\begin{aligned} \sigma &= (1283)(57) & \tau &= (1842)(37)(56) & \sigma\tau &= (13567)(48) \\ &= (12)(28)(83)(57) & &= (18)(84)(42)(37)(56) & &= (13)(35)(56)(67)(48) \end{aligned}$$

Dada una permutación π , la paridad mencionada en el teorema se llama *signo* de π y será denotada por $\text{sg}(\pi)$. Por ejemplo $\text{sg}(\sigma) = 1$, $\text{sg}(\tau) = -1$. Es claro que $\text{sg} : \mathcal{S}_n \rightarrow \{1, -1\}$ es un homomorfismo de grupos.

1.2. Particiones y clases de conjugación de \mathcal{S}_n .

Una *partición* λ de n es una sucesión débilmente decreciente de números enteros no negativos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ que suman n . Los números λ_i se llaman las *partes* de λ . Por lo general cerraremos el paréntesis en la última parte no nula. Por ejemplo $(6, 3, 2, 2, 1)$ es una partición de 14.

Las particiones también pueden ser descriptas a través de la *notación exponencial*: si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ es una partición de n , y r_α es la cantidad de veces que aparece α en $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ escribimos $\lambda = [1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}]$ omitiendo los números cuyos exponentes son cero. Por ejemplo $(6, 3, 2, 2, 1) = [1^1 2^2 3^1 6^1]$.

El Teorema 1.1 permite definir el *tipo* de una permutación de \mathcal{S}_n como la partición de n que resulta de considerar las longitudes de los ciclos que aparecen en su factorización, incluyendo a los puntos fijos como ciclos de longitud 1. Por ejemplo $\sigma = (1283)(57) = (1283)(57)(4)(6)$ es de tipo $(4, 2, 1, 1) = [1^2 2^1 4^1]$.

En general, en un grupo G , dos elementos $x, y \in G$ se dicen *conjugados* si existe un elemento $g \in G$ tal que $x = gyg^{-1}$. Es claro que la conjugación es una relación de equivalencia y por lo tanto G queda descompuesto como unión disjunta de sus clases de conjugación.

En el grupo simétrico \mathcal{S}_n las clases de conjugación quedan descriptas por las particiones de n . Más precisamente, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ y

$$\sigma = (a_{1,1} a_{1,2} \dots a_{1,k_1}) \cdots (a_{r,1} a_{r,2} \dots a_{r,k_r})$$

es su descomposición como producto de ciclos disjuntos, entonces

$$\pi\sigma\pi^{-1} = (\pi(a_{1,1})\pi(a_{1,2}) \dots \pi(a_{1,k_1})) \cdots (\pi(a_{r,1})\pi(a_{r,2}) \dots \pi(a_{r,k_r}))$$

es la descomposición de $\pi\sigma\pi^{-1}$ como producto de ciclos disjuntos. Lo dicho hasta aquí forma parte de la prueba del siguiente teorema. La demostración completa se puede consultar en [Go].

Teorema 1.2. *Dos permutaciones están en la misma clase de conjugación si y sólo si son del mismo tipo. Además, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es tipo $[1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}]$ entonces el centralizador $C_{\mathcal{S}_n}(\sigma)$ de σ en \mathcal{S}_n tiene orden $|C_{\mathcal{S}_n}(\sigma)| = 1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \dots n^{r_n} r_n!$ y por lo tanto la clase de conjugación de tipo $[1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}]$ tiene*

$$\frac{n!}{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \dots n^{r_n} r_n!}$$

elementos.

Ejemplo. Las particiones de 4 son

$$(4) = [4^1], \quad (3, 1) = [1^1 3^1], \quad (2, 2) = [2^2], \quad (2, 1, 1) = [1^2 2^1], \quad (1, 1, 1, 1) = [1^4]$$

y las respectivas clases de conjugación de \mathcal{S}_4 son

Tipo	Clase	Cantidad de elementos
$[4^1]$	$\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$	$\frac{4!}{4^1 1!} = 6$
$[1^1 3^1]$	$\{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$	$\frac{4!}{1^1 1! 3^1 1!} = 8$
$[2^2]$	$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$	$\frac{4!}{2^2 2!} = 3$
$[1^2 2^1]$	$\{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$	$\frac{4!}{1^2 2! 2^1 1!} = 6$
$[1^4]$	$\{1\}$	$\frac{4!}{1^4 4!} = 1$

1.3. Representaciones de grupos.

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo k , denotamos con $\text{Aut}_k(V)$ al grupo de automorfismos k -lineales de V . Dada una base B de V y $L \in \text{Aut}_k(V)$ denotaremos con $[L]_B$ a la matriz de la transformación L en la base B . Sabemos que $[\cdot]_B : \text{Aut}_k(V) \simeq GL(m, k)$ es un isomorfismo de grupos.

Una *representación* (T, V) de dimensión finita de un grupo G sobre un cuerpo k es un homomorfismo de grupos

$$T : G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$$

para algún k -espacio vectorial V de dimensión finita. Dado que el grupo de automorfismos de un espacio vectorial de dimensión 1 es isomorfo a k^\times , las representaciones de dimensión 1 son homomorfismos $T : G \rightarrow k^\times$. Como k^\times es conmutativo, el conmutador de un grupo G está contenido en el núcleo de toda representación de dimensión 1. Por lo tanto el grupo simétrico \mathcal{S}_n tiene solamente dos representaciones de dimensión 1: la representación trivial y la representación signo.

Dadas dos representaciones (T_1, V_1) y (T_2, V_2) de G , denotamos con

$$\text{Hom}_G(V_1, V_2) = \{L : V_1 \rightarrow V_2 : L \text{ es } k\text{-lineal y } L \circ T_1(g) = T_2(g) \circ L \text{ para todo } g \in G\}.$$

Las dos representaciones se dicen isomorfas si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $L \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$. Los elementos de $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ se llaman *G-morfismos* o *morfismos de entrelazamiento*.

Un subespacio $W \subset V$ se dice *G-invariante* si $T(g)w \in W$ para todo $g \in G$ y todo $w \in W$. Una representación se dice *irreducible* si los únicos subespacios G -invariantes de V son los triviales. Una representación se dice *completamente reducible* si todo subespacio G -invariante tiene un complemento G -invariante.

Es sabido que una representación de dimensión finita es completamente reducible si y sólo si es suma directa de una cantidad finita de representaciones irreducibles. Este resultado tiene una demostración sencilla y es cierto aún en un contexto mucho más general, ver [CR, Thm 15.3].

A continuación enunciamos algunos resultados de la teoría.

El siguiente teorema es básico en la teoría de representaciones de grupos finitos y su demostración no es complicada, ver por ejemplo [CR, Thm 10.8].

Teorema 1.3 (Maschke). *Sea (T, V) una representación de dimensión finita de un grupo finito G sobre un cuerpo k . Si $\text{char}(k)$ no divide a $|G|$ entonces (T, V) es completamente reducible y por lo tanto V es suma directa de una cantidad finita de representaciones irreducibles.*

La cantidad de representaciones irreducibles de dimensión finita de un grupo finito G depende del cuerpo y enunciamos dos teoremas que hablan de ella.

En el primero, si $k = \mathbb{C}$, el resultado es consecuencia de la teoría de caracteres; y si k es arbitrario, el resultado es consecuencia de la teoría de representaciones de álgebras asociativas semisimples de dimensión finita y de la estructura del álgebra kG (ver [FH, Prop 2.30] o [CR, Thm 27.22, Rmk 27.25]).

Teorema 1.4. *Sea G un grupo finito y k un cuerpo tal que $\text{char}(k)$ no divide a $|G|$. Entonces el número de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de dimensión finita de G sobre k es menor o igual a la cantidad de clases de conjugación de G . Si además k es algebraicamente cerrado entonces vale la igualdad.*

El segundo teorema es parte de la teoría de Brauer de representaciones modulares. Trata el caso particular en que G es un grupo tal que todas sus representaciones irreducibles sobre \mathbb{Q} son irreducibles sobre \mathbb{C} . Demostraremos que \mathcal{S}_n tiene esta propiedad (ver Teorema 2.13).

Una clase de conjugación se dice *p -regular*, p primo, si el orden de sus elementos es coprimo con p . Un grupo tiene clases de conjugación p -regulares si y sólo si p divide a $|G|$ (Teorema de Cauchy). Para la demostración del siguiente teorema se puede consultar las secciones 82 y 83 de [CR]. Ver también [CR, Thm 29.15] y la página 40 de [Ja].

Teorema 1.5. *Sea G un grupo finito tal que todas sus representaciones irreducibles sobre \mathbb{Q} son irreducibles sobre \mathbb{C} . Entonces el número de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de dimensión finita de G sobre un cuerpo k con $\text{char}(k) = p$ es igual a la cantidad de clases de conjugación p -regulares de G .*

1.4. La representación canónica y la representación estándar de \mathcal{S}_n .

Sea $C = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ la base canónica de k^n . La *representación canónica* de \mathcal{S}_n es (T, k^n) con $T(\pi)\epsilon_i = \epsilon_{\pi(i)}$. El conjunto de matrices $\{[T(\pi)]_C : \pi \in \mathcal{S}_n\}$ es exactamente el conjunto de *matrices de permutación* de $GL(n, k)$, es decir, las matrices que resultan de permutar las columnas de la matriz identidad. Por ejemplo, si $n = 3$ tenemos

π	$[T(\pi)]_C$	π	$[T(\pi)]_C$	π	$[T(\pi)]_C$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(123)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	(132)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(12)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(13)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	(23)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La representación (T, k^n) no es irreducible. El subespacio kv_0 generado por el vector $v_0 = \sum \epsilon_i$ es \mathcal{S}_n -invariante y la acción de \mathcal{S}_n en él es trivial. Otro subespacio \mathcal{S}_n -invariante de k^n es

$$W = \{v = \sum x_i \epsilon_i, x_i \in k : \sum x_i = 0\}.$$

Es claro que si $\text{char}(k)$ no divide a n entonces $W \cap kv_0 = 0$ y por lo tanto $k^n = W \oplus kv_0$. En cambio, si $\text{char}(k)$ divide a n , entonces $v_0 \in W$.

Ejercicio 1.6.

- (1) Demostrar que, independientemente de $\text{char}(\mathbb{k})$, W y kv_0 son los únicos subespacios no triviales de \mathbb{k}^n que son \mathcal{S}_n -invariantes. Sugerencia: Demostrar que si W' es \mathcal{S}_n -invariante y contiene algún vector cuyas coordenadas en la base C no son todas iguales, entonces W' contiene todos los vectores $\epsilon_i - \epsilon_j$.
- (2) Demostrar que si $\text{char}(\mathbb{k})$ no divide a n entonces W es irreducible, y si $\text{char}(\mathbb{k})$ divide a n entonces W/kv_0 es irreducible.
- (3) Demostrar que si $\text{char}(\mathbb{k})$ divide a n entonces \mathbb{k}^n no es completamente reducible.

La *representación estándar* de \mathcal{S}_n es (T, W) , en el caso en que $\text{char}(\mathbb{k})$ no divide a n o $(T, W/kv_0)$ en el caso en que sí divide (para no recargar la notación, hemos mantenido la letra T para los correspondientes homomorfismos).

Analicemos las matrices de la representación estándar cuando $n = 3$. El conjunto $B = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3\}$ es base de W y las matrices son

π	$[T(\pi) _W]_B$	π	$[T(\pi) _W]_B$	π	$[T(\pi) _W]_B$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	(123)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	(132)	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
(12)	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	(13)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	(23)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Si $\text{char}(\mathbb{k}) = 3$ entonces $v_0 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = (\epsilon_1 - \epsilon_2) - (\epsilon_2 - \epsilon_3) \in W$ y W/kv_0 es isomorfa a la representación signo de \mathcal{S}_3 .

La representación canónica de \mathcal{S}_n es un caso particular de las llamadas representaciones de permutación, las cuales definimos a continuación.

1.5. Representaciones de permutación.

Una *acción* de un grupo G en un conjunto finito E es un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{S}_E \\ g &\mapsto (e \mapsto g.e). \end{aligned}$$

La acción se dice *transitiva* si dados $e_1, e_2 \in E$ existe un $g \in G$ tal que $g.e_1 = e_2$.

Dada una acción de un grupo G en un conjunto finito $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ se obtiene una representación de G en el espacio vectorial $\mathbb{k}E \simeq \mathbb{k}^m$ extendiendo linealmente la acción, es decir definiendo $T(g) \in \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}E)$ como $T(g)(\sum x_i e_i) = \sum x_i g.e_i$.

Las representaciones construidas de esta manera son llamadas *representaciones de permutación* de G . Es claro que $\{[T(g)]_E : g \in G\}$ es un subconjunto de las matrices de permutación de $GL(m, \mathbb{k})$. En particular, una representación de permutación nunca es irreducible (salvo que sea de dimensión 1) pues

$$\mathbb{k}(\sum e_i) \quad \text{y} \quad \{v = \sum x_i e_i, x_i \in \mathbb{k} : \sum x_i = 0\}$$

son G -invariantes.

Observación 1.7. Al ser $[T(g)]_E$ una matriz de permutación para todo $g \in G$, es en particular una matriz ortogonal con sólo unos y ceros. Por lo tanto las representaciones de permutación vienen provistas naturalmente de una forma bilineal no degenerada G -invariante en la que E es base ortonormal. Si \mathbb{k} es \mathbb{Q} o \mathbb{R} esta forma bilineal es producto interno, si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ la forma sesquilineal correspondiente es producto interno.

Ejemplos.

- (1) La representación canónica de $G = \mathcal{S}_n$ es la representación de permutación correspondiente a la acción de \mathcal{S}_n en $E = C$, la base canónica de k^n .
- (2) La *representación regular (a izquierda)* de un grupo G es la representación de permutación correspondiente a la acción regular a izquierda de G en $E = G$ dada por multiplicación a izquierda.
- (3) Más generalmente, si $H < G$ es un subgrupo de G , entonces G actúa en el conjunto de coclases $E = G/H$ por multiplicación a izquierda: $g.(g_0H) = (gg_0)H$. La representación de permutación que se obtiene es, por definición, la *representación inducida* a G por la representación trivial de H .

Por ejemplo, si $H = \mathcal{S}_{n-1}$ lo vemos como el subgrupo de $G = \mathcal{S}_n$ correspondiente a las permutaciones que fijan n entonces

$$E = \mathcal{S}_n/\mathcal{S}_{n-1} = \{(1n)\mathcal{S}_{n-1}, (2n)\mathcal{S}_{n-1}, \dots, (n-1n)\mathcal{S}_{n-1}, \mathcal{S}_{n-1}\}$$

y la acción \mathcal{S}_n en E es $\pi.((jn)\mathcal{S}_{n-1}) = (\pi(j)n)\mathcal{S}_{n-1}$. Por lo tanto, la biyección

$$E = \{(1n)\mathcal{S}_{n-1}, (2n)\mathcal{S}_{n-1}, \dots, (n-1n)\mathcal{S}_{n-1}, \mathcal{S}_{n-1}\} \rightarrow \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\} = C$$

$$(jn)\mathcal{S}_{n-1} \mapsto \epsilon_j$$

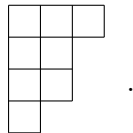
establece un isomorfismo entre la representación de permutación dada por $\mathcal{S}_n/\mathcal{S}_{n-1}$ y la representación canónica.

Construiremos todas las representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n como subrepresentaciones de representaciones de permutación.

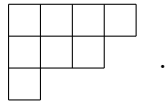
2. SEGUNDA PARTE: MÓDULOS DE SPECHT

2.1. Diagramas, tablas, tabloides y subgrupos de Young.

Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, el *diagrama* de Young o de Ferrer de λ es el dibujo que consiste en filas de cuadritos justificadas a izquierda, donde la i -ésima fila tiene λ_i cuadritos. Por ejemplo, si $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ su diagrama es



La *partición traspuesta* de λ se denota con λ' y es la que tiene diagrama traspuesto al diagrama de λ . Por ejemplo, si $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ entonces $\lambda' = (4, 3, 1)$ pues su diagrama es



Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ de n , una *tabla de tipo λ* es una asignación biyectiva de los números $\{1, 2, \dots, n\}$ a los cuadritos del diagrama. Por ejemplo,

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 7 & 1 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

es una tabla de tipo $(3, 2, 2, 1)$. Denotamos con $t_{i,j}$ el número que tiene el cuadrado de la fila i y columna j . En el ejemplo de recién $t_{3,2} = 1$. En analogía con las particiones, definimos *tabla traspuesta*: si t es una tabla de tipo λ , entonces t' se denotará la tabla, de tipo λ' , dada por $t'_{i,j} = t_{j,i}$. Denotamos con T_λ el conjunto de todas las tablas de tipo λ .

Si λ es una partición de n entonces \mathcal{S}_n actúa en T_λ por $(\pi.t)_{i,j} = \pi(t_{i,j})$. Es claro que T_λ tiene $n!$ elementos y que \mathcal{S}_n actúa transitivamente en T_λ . Más aún, para cualquier $t_0 \in T_\lambda$ fija la biyección

$$(2.1) \quad \begin{aligned} f_{t_0} : \mathcal{S}_n &\rightarrow T_\lambda \\ \pi &\mapsto \pi.t_0 \end{aligned}$$

establece una correspondencia entre la acción regular a izquierda de \mathcal{S}_n en sí mismo y la acción de \mathcal{S}_n en T_λ . Por lo tanto, la representación de permutación dada por la acción en las tablas es una versión gráfica de la representación regular a izquierda de \mathcal{S}_n y en particular no depende de la partición λ .

Dada una tabla $t \in T_\lambda$ llamamos \mathcal{R}_t al subgrupo de \mathcal{S}_n que estabiliza las filas de t y \mathcal{C}_t al subgrupo de \mathcal{S}_n que estabiliza las columnas de t . Por ejemplo, si

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 7 & 1 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

entonces $\mathcal{R}_t = \mathcal{S}_{\{4,5,8\}} \times \mathcal{S}_{\{2,3\}} \times \mathcal{S}_{\{1,7\}} \times \mathcal{S}_{\{6\}}$ y $\mathcal{C}_t = \mathcal{S}_{\{2,6,7,8\}} \times \mathcal{S}_{\{1,3,4\}} \times \mathcal{S}_{\{5\}}$.

Los subgrupos \mathcal{R}_t y \mathcal{C}_t , variando t se llaman *subgrupos de Young* de \mathcal{S}_n .

Observación 2.1. Acá resumimos algunas propiedades de los subgrupos de Young que son fáciles de demostrar.

- (1) Para toda $t \in T_\lambda$ y toda $\pi \in \mathcal{S}_n$, se cumple $\mathcal{R}_{\pi.t} = \pi\mathcal{R}_t\pi^{-1}$ y $\mathcal{C}_{\pi.t} = \pi\mathcal{C}_t\pi^{-1}$.
- (2) Dada una tabla t de tipo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, la estructura del subgrupo \mathcal{R}_t depende sólo de λ pues $\mathcal{R}_t \simeq \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_r}$. Además es claro que $\mathcal{C}_t = \mathcal{R}_{t'}$.
- (3) La intersección de subgrupos de Young es subgrupo de Young. En efecto, $\mathcal{R}_{t_1} \cap \mathcal{R}_{t_2} = \mathcal{R}_{t_3}$ donde t_3 es una tabla cuyas filas sean las intersecciones de las filas de t_1 y t_2 .

Dos tablas t_1 y t_2 de tipo λ se dicen equivalentes por filas si tienen los mismos números en cada fila, es decir si existe $\pi \in \mathcal{R}_{t_1}$ tal que $\pi.t_1 = t_2$. Un *tabloide* $\{t\}$ de tipo λ es la clase de equivalencia por filas de una tabla t de tipo λ . Denotamos con $\{T\}_\lambda$ el conjunto de todos los tabloides de tipo λ . Es conveniente pensar que los tabloides son tablas en las que borramos las líneas verticales. Por ejemplo,

$$\text{si } t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 7 & 1 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \text{ entonces } \{t\} = \overline{\begin{array}{ccc} 8 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \\ 7 & 1 & \\ 6 & & \end{array}} = \overline{\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & \\ 1 & 7 & \\ 6 & & \end{array}}.$$

Por lo tanto, un tabloide de tipo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ es una partición del conjunto $\{1, \dots, n\}$ en r partes tal que la i -ésima parte tiene λ_i elementos. En verdad esta afirmación requiere una (muy sencilla) demostración de buena definición: dos tablas son equivalentes por fila si y sólo si definen la misma partición de $\{1, \dots, n\}$.

El grupo simétrico también actúa transitivamente en los tabloides por $\pi.\{t\} = \{\pi.t\}$. También sería necesario verificar la buena definición de la acción, aunque si ya la hicimos en el párrafo

anterior, la acción que estamos definiendo ahora está automáticamente bien definida como la acción de \mathcal{S}_n en las particiones del conjunto $\{1, \dots, n\}$. La representación de permutación en el espacio vectorial $k\{T\}_\lambda$ será denotada por M^λ .

Así como la acción de \mathcal{S}_n en T_λ es una versión gráfica de la acción regular a izquierda de \mathcal{S}_n en sí mismo, la acción de \mathcal{S}_n en $\{T\}_\lambda$ es una versión gráfica de la acción a izquierda de \mathcal{S}_n en $\mathcal{S}_n/\mathcal{R}_{t_0}$ para cualquier tabla t_0 de tipo λ , según lo establece la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Sea $t_0 \in T_\lambda$ fija y sea $f_{t_0} : \mathcal{S}_n \rightarrow T_\lambda$ la biyección $f_{t_0}(\pi) = \pi.t_0$. Entonces las coclases a izquierda del subgrupo de Young \mathcal{R}_{t_0} coinciden, a través de f_{t_0} , con clases de equivalencia por filas en T_λ .*

Demostración. Lo que afirma el teorema es que si $\pi' = \pi\rho$, con $\rho \in \mathcal{R}_{t_0}$, entonces $\pi'.t_0$ es equivalente por filas a $\pi.t_0$. Esto es consecuencia de que $\pi'.t_0 = (\pi\rho).t_0 = \pi\rho\pi^{-1}(\pi.t_0)$ y que, según la parte (1) de la Observación 2.1, $\pi\rho\pi^{-1} \in \mathcal{R}_{\pi.t_0}$. \square

Teorema 2.3. *Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ una partición de n , entonces*

- (1) M^λ es isomorfa a la representación inducida a \mathcal{S}_n por la representación trivial del subgrupo $\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_r}$.
- (2) $\dim M^\lambda = [\mathcal{S}_n : \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_r}] = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_r!}$.
- (3) Si V es un subespacio \mathcal{S}_n -invariante de M^λ y V contiene un tabloide, entonces $V = M^\lambda$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de la proposición anterior, de la parte (2) de la Observación 2.1 y de la definición de representación inducida por la representación trivial del subgrupo (ver Ejemplo (3) de la Sección 1.5). La segunda afirmación es consecuencia de la primera, y la tercera es por el hecho de que \mathcal{S}_n actúa transitivamente en la base $\{T\}_\lambda$ de M^λ . \square

Ejemplos.

- (1) Los dos casos extremos son los correspondientes a las particiones $[n^1]$ y $[1^n]$. En el primer caso $\{T\}_{[n^1]} = \{ \overline{1 \ 2 \ \dots \ n} \}$ y por lo tanto $M^{[n^1]}$ es la representación trivial. En el segundo caso los tabloides son “iguales” a las tablas y por lo tanto $M^{[1^n]}$ es la representación regular a izquierda de \mathcal{S}_n .
- (2) Los tabloides de tipo $[1^1 (n-1)^1]$ quedan determinados por el único número de la segunda fila y por lo tanto la representación $M^{[1^1 (n-1)^1]}$ es isomorfa a la canónica.
- (3) Miremos algunas matrices de la representación $M^{[2^2]}$ de \mathcal{S}_4 . Todos los tabloides son

$$\{T\}_{[2^2]} = \left\{ \overline{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}} \right\}$$

y tomando como base ordenada $B = \{T\}_{[2^2]}$

$$\begin{aligned} [(12)]_B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & [(24)]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & [(123)]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ [(423)]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & [(1234)]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & [(4132)]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2. Politabloides y módulos de Specht S^λ .

Ya mencionamos que las representaciones de permutación de dimensión mayor que 1 no pueden ser irreducibles. En particular M^λ contiene muchos subespacios invariantes. Uno de ellos es el generado por los politabloides que a continuación definimos.

Dada una tabla t , sea

$$c_t = \sum_{\pi \in \mathcal{C}_t} \text{sg}(\pi)\pi \in \mathbf{k}\mathcal{S}_n.$$

Por ejemplo, si

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 2 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

entonces $\mathcal{C}_t = \mathcal{S}_{\{1,3,4\}} \times \mathcal{S}_{\{5,6\}} \times \mathcal{S}_{\{2\}}$ y

$$\begin{aligned} c_t &= (1) - (13) - (14) - (35) + (134) + (143) \\ &\quad - (56) + (13)(56) + (14)(56) + (34)(56) - (134)(56) - (143)(56) \\ &= \left((1) - (13) - (14) - (35) + (134) + (143) \right) \left(1 - (56) \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 2.4. Sea (ab) una trasposición en \mathcal{C}_t , demostrar que $(1 - (ab))$ es factor (a izquierda o a derecha) de c_t en el álgebra $\mathbf{k}\mathcal{S}_n$.

Dada una tabla t el *politabloide* asociado a t es $e_t = c_t\{t\}$. Por ejemplo, si

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

entonces $c_t = (1) - (13) - (45) + (13)(45)$ y

$$\begin{aligned} e_t &= \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 2 \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline \end{array}} + \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 2 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}} \\ &= \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline \end{array}} + \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}} \end{aligned}$$

El subespacio de M^λ generado por los politabloides es por definición el *módulo de Specht* asociado a la partición λ y lo denotamos con S^λ . Cuando $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$ los subespacios S^λ son irreducibles y, variando λ , forman un conjunto completo de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n . En la próxima sección demostraremos este resultado.

Observación 2.5. A continuación destacamos algunas propiedades de los politabloides.

- (1) El politabloide asociado a t , a pesar de ser un elemento de M^λ , depende de la tabla t y no solamente del tabloide $\{t\}$. Por ejemplo,

$$s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

es equivalente por filas a la tabla t del ejemplo anterior. Sin embargo $c_s = (1) - (14) - (35) + (14)(35)$ y

$$e_s = \frac{\overline{2 \ 3 \ 4}}{\overline{1 \ 5}} - \frac{\overline{1 \ 2 \ 3}}{\overline{4 \ 5}} - \frac{\overline{2 \ 4 \ 5}}{\overline{1 \ 3}} + \frac{\overline{1 \ 2 \ 5}}{\overline{3 \ 4}} \neq e_t$$

En principio hay $n!$ politabloides en M^λ , que tiene dimensión $\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_r!}$, y por lo tanto hay mucha dependencia lineal entre ellos.

- (2) En realidad es exagerado contar $n!$ politabloides de tipo λ pues si $t_2 = \pi.t_1$ con $\pi \in \mathcal{C}_{t_1}$ (es decir equivalentes por columnas) entonces es claro que $e_{t_2} = \pm e_{t_1}$. Como la estructura de \mathcal{C}_{t_1} sólo depende de λ , resulta que a lo sumo hay (salvo múltiplos) $\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_r!}$ politabloides de tipo λ . Aún contando sólo éstos hay todavía mucha dependencia lineal.
- (3) Queda de ejercicio verificar que $\pi c_t \pi^{-1} = c_{\pi.t}$ y $\pi.e_t = e_{\pi.t}$ para toda tabla t y toda permutación π . En particular, dado que \mathcal{S}_n actúa transitivamente en las tablas, \mathcal{S}_n actúa transitivamente en los politabloides y por lo tanto si un subespacio \mathcal{S}_n -invariante V de M^λ contiene un politabloide e_t entonces contiene a todos los politabloides y así $S^\lambda \subset V$. Sin embargo el hecho de que $\pi.e_t = e_{\pi.t}$ para todo politabloide e_t y toda permutación π no debe hacernos pensar que S^λ es una representación de permutación pues los $\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_r!}$ politabloides de un tipo dado son por lo general muy linealmente dependientes.

A continuación describimos todos los politabloides de tipo $\lambda = (2, 2)$ sin considerar tablas t_1 y t_2 con $t_2 = \pi.t_1$, $\pi \in \mathcal{C}_{t_1}$. Al lado de cada politabloide se indican las coordenadas ± 1 con respecto a la base

$$\{T\}^{[2^2]} = \left\{ \frac{\overline{1 \ 2}}{\overline{3 \ 4}}, \frac{\overline{1 \ 3}}{\overline{2 \ 4}}, \frac{\overline{2 \ 3}}{\overline{1 \ 4}}, \frac{\overline{1 \ 4}}{\overline{2 \ 3}}, \frac{\overline{2 \ 4}}{\overline{1 \ 3}}, \frac{\overline{3 \ 4}}{\overline{1 \ 2}} \right\}$$

de $M^{[2^2]}$.

$$\text{Si } t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \text{ entonces } e_t = \frac{\overline{1 \ 3}}{\overline{2 \ 4}} - \frac{\overline{2 \ 3}}{\overline{1 \ 4}} - \frac{\overline{1 \ 4}}{\overline{2 \ 3}} + \frac{\overline{2 \ 4}}{\overline{1 \ 3}} = (0, +, -, -, +, 0);$$

$$\text{si } t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \text{ entonces } e_t = \frac{\overline{1 \ 2}}{\overline{3 \ 4}} - \frac{\overline{2 \ 3}}{\overline{1 \ 4}} - \frac{\overline{1 \ 4}}{\overline{2 \ 3}} + \frac{\overline{3 \ 4}}{\overline{1 \ 2}} = (+, 0, -, -, 0, +);$$

$$\text{si } t = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \text{ entonces } e_t = \frac{\overline{1 \ 2}}{\overline{3 \ 4}} - \frac{\overline{1 \ 3}}{\overline{2 \ 4}} - \frac{\overline{2 \ 4}}{\overline{1 \ 3}} + \frac{\overline{3 \ 4}}{\overline{1 \ 2}} = (+, -, 0, 0, -, +);$$

$$\text{si } t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array}, \text{ entonces } e_t = \frac{\overline{1 \ 2}}{\overline{3 \ 4}} - \frac{\overline{1 \ 3}}{\overline{2 \ 4}} - \frac{\overline{2 \ 4}}{\overline{1 \ 3}} + \frac{\overline{3 \ 4}}{\overline{1 \ 2}} = (+, -, 0, 0, -, +);$$

$$\text{si } t = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \text{ entonces } e_t = \frac{\overline{1 \ 2}}{\overline{3 \ 4}} - \frac{\overline{2 \ 3}}{\overline{1 \ 4}} - \frac{\overline{1 \ 4}}{\overline{2 \ 3}} + \frac{\overline{3 \ 4}}{\overline{1 \ 2}} = (+, 0, -, -, 0, +);$$

$$\text{si } t = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array}, \text{ entonces } e_t = \frac{\overline{1 \ 3}}{\overline{2 \ 4}} - \frac{\overline{2 \ 3}}{\overline{1 \ 4}} - \frac{\overline{1 \ 4}}{\overline{2 \ 3}} + \frac{\overline{2 \ 4}}{\overline{1 \ 3}} = (0, +, -, -, +, 0).$$

Aún sin haber considerado tablas equivalentes por columnas, los tres últimos politabloides son iguales a los tres primeros y se ve que $S^{[2^2]}$ tiene dimensión 2. Esta representación de \mathcal{S}_4 también se obtiene a través de la representación estándar de \mathcal{S}_3 y el morfismo $\mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{S}_3$ con núcleo el subgrupo normal de A_4 .

2.3. Teorema del submódulo de James.

Definición 2.6. Sean t_1 y t_2 dos tablas, no necesariamente del mismo tipo, pero sí correspondientes a particiones de un mismo n . Entonces t_1 y t_2 se dicen *disjuntas por filas*, o simplemente disjuntas, si para todo i, j la fila i de t_1 y la fila j de t_2 tienen a lo sumo un número en común.

Por ejemplo, $t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}$, $t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$ y $t_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$ son disjuntas dos a dos.

Recordemos que si λ es una partición entonces λ' es la partición traspuesta y análogamente, si t es una tabla, entonces t' es la tabla traspuesta.

Lema 2.7. Sean t y s tablas correspondientes a particiones de un mismo n .

(1) Si $c_t\{s\} \neq 0$ entonces t' y s son disjuntas.

(2) Si además t y s son del mismo tipo entonces $c_t\{s\} = \pm c_t\{t\} = \pm e_t$.

Demostración. (1) Si t' y s no fueran disjuntas entonces habría un par de números a y b que están en una misma fila de s y en una misma columna de t , es decir que habría una trasposición $(ab) \in \mathcal{C}_t \cap \mathcal{R}_s$. Si $(ab) \in \mathcal{R}_s$ entonces $(ab)\{s\} = \{s\}$. Si $(ab) \in \mathcal{C}_t$ entonces del Ejercicio 2.4 sabemos que $(1 - (ab))$ es factor a derecha de c_t . Entre las dos cosas obtendríamos que $c_t\{s\} = 0$, absurdo.

(2) Dado que $c_t\{s\} \neq 0$ tenemos que t' y s son disjuntas. Esto quiere decir que los elementos de la primera fila de s están en diferentes columnas de t y por lo tanto, dado que s y t son del mismo tipo, hay un elemento $\pi_1 \in \mathcal{C}_t$ tal que la primera fila de $\{\pi_1.t\}$ es igual a la primera fila de $\{s\}$. Una vez acomodada la primera fila lo mismo podemos hacer con la segunda sin arruinar la primera y obtener un elemento $\pi_2 \in \mathcal{C}_t$ tal que las dos primeras filas de $\{\pi_2.\pi_1.t\}$ son iguales a las dos primeras filas de $\{s\}$. Así sucesivamente, encontramos un elemento $\pi \in \mathcal{C}_t$ tal que $\{\pi.t\} = \{s\}$. Por lo tanto $\{s\}$ es uno de los tabloides que aparecen en el politabloide e_t y queda $c_t\{s\} = \text{sg}(\pi)c_t\{t\} = \text{sg}(\pi)e_t$. \square

Corolario 2.8. Si λ es una partición de n y $v \in M^\lambda$ entonces c_tv es múltiplo de e_t para toda tabla t de tipo λ .

Demostración. El lema anterior afirma que si t es de tipo λ entonces $c_t\{s\}$ es $\pm e_t$ para todo tabloide $\{s\} \in M^\lambda$. Como todo vector $v \in M^\lambda$ es combinación lineal de tabloides, obtenemos lo afirmado. \square

Recordemos (ver Observación 1.7) que toda representación de permutación (T, V) de un grupo G viene provista naturalmente de una forma bilineal G -invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en la que E es base ortonormal y $T(g)$ es ortogonal para todo $g \in G$. Tal es el caso de M^λ con $E = \{T\}_\lambda$ y con respecto a esta forma bilineal el operador c_t es simétrico pues

$$\langle c_t.v, w \rangle = \left\langle \sum_{\pi \in \mathcal{C}_t} \text{sg}(\pi)\pi.v, w \right\rangle = \left\langle v, \sum_{\pi \in \mathcal{C}_t} \text{sg}(\pi)\pi^{-1}.w \right\rangle = \left\langle v, \sum_{\pi \in \mathcal{C}_t} \text{sg}(\pi)\pi.w \right\rangle = \langle v, c_t.w \rangle.$$

Dado un subespacio V de M^λ , denotaremos con V^\perp el subespacio ortogonal a V con respecto a esta forma bilineal.

Si $k = \mathbb{Q}$ esta forma bilineal es producto interno y $V^\perp \oplus V = M^\lambda$ para cualquier subespacio V . En cambio, si $\text{char}(k) \neq 0$, podría ocurrir que $V^\perp \cap V \neq 0$. En general, dada una forma bilineal B no degenerada sobre un k -espacio vectorial V , para todo subespacio $W \subset V$ se sabe que $\dim_k(W/W \cap W^\perp)$ es el rango de la matriz de Gram $G_{ij} = B(\epsilon_i, \epsilon_j)$ de B , con $\{\epsilon_i\}$ una base de W .

Teorema 2.9. *Sea λ una partición de n y sea V un subespacio \mathcal{S}_n -invariante de M^λ . Entonces*

$$S^\lambda \subset V \quad \text{o} \quad V \subset (S^\lambda)^\perp.$$

En particular $S^\lambda / S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp$ es irreducible para toda partición λ de n . Más aún, si $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$, $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$ y por lo tanto S^λ es irreducible para toda partición λ de n .

Demostración. Por el corolario anterior sabemos que $c_t v$ es múltiplo de e_t para toda tabla t de tipo λ y todo $v \in V$. Entonces hay dos posibilidades. Si V contiene un vector v tal que $c_t v \neq 0$ para alguna tabla t , entonces $e_t \in V$ y por la parte (3) de la Observación 2.5 obtenemos que $S^\lambda \subset V$. Si por el contrario $c_t v = 0$ para todo $v \in V$ y toda tabla t de tipo λ , por ser c_t simétrico obtenemos $0 = \langle c_t v, \{t\} \rangle = \langle v, c_t \{t\} \rangle = \langle v, e_t \rangle$ para todo $v \in V$ y toda tabla t de tipo λ lo que implica que $V \subset (S^\lambda)^\perp$.

Es claro ahora que $S^\lambda / S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp$ es irreducible. Resta probar que si $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$ entonces $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$. Esto es claro si $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, pues la forma bilineal es producto interno. En particular $\dim_{\mathbb{Q}} S^\lambda$ es el rango de la matriz de Gram de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en S^λ . Si $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$ entonces $\dim_{\mathbb{k}} S^\lambda = \dim_{\mathbb{Q}} S^\lambda$ y el rango de la matriz de Gram no depende de \mathbb{k} , por lo tanto $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$. \square

¿Qué falta para completar la clasificación de las representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n ? Dos cosas: primero determinar las clases de isomorfismo entre las representaciones $S^\lambda / S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp$, variando λ ; y segundo demostrar que las clases obtenidas son en total la cantidad que deben ser.

En el caso en que $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$ demostraremos en la próxima sección que $S^\lambda \simeq S^\mu$ si y sólo si $\lambda = \mu$. De este modo, utilizando los Teoremas 1.2 y 1.4 obtendremos que estas representaciones forman un conjunto completo de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n .

Como las representaciones S^λ están definidas sobre \mathbb{Q} , la clasificación para $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$ ayuda para el caso $\text{char}(\mathbb{k}) = p$ pues permite utilizar el Teorema 1.5 que dice que si $\text{char}(\mathbb{k}) = p$ entonces \mathcal{S}_n tiene tantas clase de isomorfismo de representaciones irreducibles como clases de conjugación p -regulares. Se prueba entonces que una partición λ de n corresponde a una clase de conjugación p -regular de \mathcal{S}_n si y sólo si λ es p -regular, que quiere decir no tiene p partes positivas iguales entre sí. Luego se prueba que $S^\lambda / S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp \neq 0$ si y sólo si λ es p -regular y finalmente que entre estas representaciones no hay isomorfías entre sí. De este modo se obtiene que el conjunto

$$\left\{ S^\lambda / S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp : \lambda \text{ es partición } p\text{-regular de } n \right\}$$

es un conjunto completo de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n en característica p . Los detalles están en [Ja].

Ejercicio 2.10. Sea $\lambda = (3, 2)$.

- (1) Escribir los $\frac{5!}{3!2!}$ politablos de tipo λ que hay sin considerar tablas equivalentes por columnas.
- (2) Encontrar una base de S^λ . ¿Depende de $\text{char}(\mathbb{k})$ la dimensión de S^λ ?
- (3) Demostrar que $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$ si $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$ o $\text{char}(\mathbb{k}) > 5$ y determinar $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp$ para $\text{char}(\mathbb{k}) = 2, 3, 5$.
- (4) Dar las matrices de las trasposiciones (12), (23), (34) y (45) en las diferentes posibilidades de $\text{char}(\mathbb{k})$.

2.4. Subrepresentaciones de M^λ y clases de isomorfismos y cuando $\text{char}(k) = 0$.

A continuación asumiremos que $\text{char}(k) = 0$ y probaremos que $S^\lambda \simeq S^\mu$ si y sólo si $\lambda = \mu$. Obtendremos entonces que

$$\{S^\lambda : \lambda \text{ es partición de } n\}$$

es un conjunto completo de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n sobre k . En efecto, como las particiones de n parametrizan las clases de conjugación de \mathcal{S}_n (ver Teorema 1.2) el Teorema 1.4 implica que tenemos todas las representaciones irreducibles sobre k . Esta es la única instancia en la que utilizamos un resultado de representaciones de grupos para describir las representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n .

Para probar que $S^\lambda \simeq S^\mu$ si y sólo si $\lambda = \mu$ necesitamos dos resultados. El primero es el siguiente lema que describe qué subrepresentaciones tiene M^μ .

Lema 2.11. *Sean λ y μ particiones de n tales que existe un operador de entrelazamiento no nulo $L \in \text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(S^\lambda, M^\mu)$. Entonces existen tablas t y s de tipo λ y μ respectivamente tales que t' y s son disjuntas. Además $\text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(S^\lambda, M^\lambda) \simeq k$ y por lo tanto S^λ aparece dentro de M^λ con multiplicidad igual a 1.*

Demostración. Sea $L \in \text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(S^\lambda, M^\mu)$, $L \neq 0$. Como $\text{char}(k) = 0$, el Teorema 2.9 dice que $M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$ y por lo tanto podemos extender L a todo M^λ (definiéndolo cero en $(S^\lambda)^\perp$) y pensar que $L \in \text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(M^\lambda, M^\mu)$. Como L es no nulo en S^λ existe una tabla t de tipo λ tal que $L(e_t) \neq 0$. Esto implica que

$$0 \neq L(e_t) = L(c_t\{t\}) = c_t L(\{t\}) = c_t \sum_s x_s \{s\}, \text{ con } x_s \in k \text{ y } s \text{ tablas de tipo } \mu$$

y por lo tanto $c_t\{s\} \neq 0$ para alguna tabla s de tipo μ . Por el Lema 2.7, t' y s son disjuntas.

En el caso en que $\lambda = \mu$, la igualdad de arriba y la segunda parte del Lema 2.7 dice que $L(e_t)$ es múltiplo de e_t para toda tabla t . Si $L \neq 0$ debe haber una tabla t tal que $L(e_t) = x e_t$, $x \neq 0$. El punto (3) de la Observación 2.5 dice que L es multiplicación por x en todo S^λ . \square

El segundo resultado que necesitamos es el que caracteriza cuándo dos particiones de n , λ y μ , admiten tablas t y s de tipo λ y μ respectivamente tales que t' y s sean disjuntas. El Teorema de Gale y Ryser, considerado por muchos matemáticos como una perla de la combinatoria, afirma tales tablas existen si y sólo si $\mu \preceq \lambda$ en el siguiente sentido

$$(\mu_1, \mu_2, \dots) \preceq (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \text{ si y sólo si } \sum_{i=1}^k \mu_i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{ para todo } 1 \leq k \leq n.$$

Por ejemplo, el diagrama de orden las particiones de 6 es

$$(6) - (5,1) - (4,2) \begin{cases} \leftarrow (3,3) \\ \leftarrow (4,1,1) \end{cases} (3,2,1) \begin{cases} \leftarrow (3,1,1) \\ \leftarrow (2,2,2) \end{cases} (2,2,1,1) - (2,1,1,1,1) - (1,1,1,1,1,1)$$

Es claro que \preceq es un orden parcial y que $\mu \preceq \lambda$ implica que $\mu \leq \lambda$ donde \leq es el orden lexicográfico. En particular,

$$\mu \preceq \lambda \text{ y } \lambda \preceq \mu \text{ implican que } \lambda = \mu.$$

Por lo tanto, para probar que $S^\lambda \simeq S^\mu$ si y sólo si $\lambda = \mu$, necesitamos solamente la parte “sólo si” del Teorema de Gale y Ryser.

Teorema 2.12. *Sean λ y μ particiones de n . Existen tablas t y s de tipo λ y μ respectivamente tales que t' y s son disjuntas si y sólo si $\mu \preceq \lambda$. En particular $\mu \preceq \lambda$ si y sólo si $\lambda' \preceq \mu'$.*

Demostración. Hacemos la parte “sólo si”, que es la única que necesitamos. Que t' y s sean disjuntas implica que los elementos de la primera fila de s están en diferentes columnas de t y por lo tanto hay un elemento $\pi_1 \in \mathcal{C}_t$ tal que la primera fila de $\{\pi_1.t\}$ contiene los elementos de la primera fila de $\{s\}$ y en particular $\mu_1 \leq \lambda_1$. Además es claro que $(\pi_1.t)'$ sigue siendo disjunta de s . Esto implica que los elementos de la segunda fila de s están en diferentes columnas de $\pi_1.t$ y por lo tanto hay un elemento $\pi_2 \in \mathcal{C}_{\pi_1.t} = \mathcal{C}_t$ tal que las dos primeras filas de $\{\pi_2\pi_1.t\}$ contienen a los elementos de las dos primeras filas de $\{s\}$ y en particular $\mu_1 + \mu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Así sucesivamente obtenemos que $\mu \preceq \lambda$.

En la literatura hay varias pruebas de la recíproca. En [Kr] hay una demostración completa del teorema que es muy breve. \square

En resumen hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.13. *El conjunto $\{S^\lambda : \lambda \text{ es partición de } n\}$ es un conjunto completo de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de \mathcal{S}_n sobre cualquier cuerpo de característica cero. Más aún*

$$M^\lambda = S^\lambda \oplus \bigoplus_{\mu \succ \lambda} m_{\mu\lambda} S^\mu$$

para ciertos enteros no negativos $m_{\mu\lambda}$.

3. TERCERA PARTE: CARACTERES

3.1. Resultados básicos.

En esta segunda parte estudiaremos los caracteres de \mathcal{S}_n sobre el cuerpo de los complejos. Comenzamos repasando las definiciones y propiedades básicas.

Dada una representación de dimensión finita $T : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ de un grupo G , el *carácter* de T es la función $\phi_{(T,V)} : G \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\phi_{(T,V)}(g) = \text{tr}(T(g))$. Si la representación es irreducible, entonces el carácter se dice *irreducible*. Es claro que los caracteres son *funciones de clases*, es decir que son invariantes por conjugación. Sean

- (1) $\mathcal{F}(G)$ el \mathbb{C} -espacio vectorial de todas las funciones de G a valores complejos.
- (2) $\mathcal{F}_{cl}(G)$ el \mathbb{C} -espacio vectorial de todas las funciones de clase de G a valores complejos.
- (3) $\mathcal{F}_{cl}(G)_{\mathbb{Q}}$ el \mathbb{Q} -espacio vectorial de todas las funciones de clase de G a valores racionales.
- (4) $\mathcal{X}(G)$ el conjunto de todos los caracteres de G .
- (5) $\mathcal{I}(G)$ el conjunto de todos los caracteres irreducibles de G .
- (6) $\mathcal{V}(G)$ el conjunto de todos los caracteres *virtuales*, es decir las funciones de clase que son combinaciones lineales *enteras* de caracteres irreducibles.

Tenemos

$$\mathcal{I}(G) \subset \mathcal{X}(G) \subset \mathcal{V}(G) \subset \mathcal{F}_{cl}(G) \subset \mathcal{F}(G),$$

y en el caso particular $G = \mathcal{S}_n$ el Teorema 2.13 implica que

$$(3.1) \quad \mathcal{I}(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{X}(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{V}(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S}_n)_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{F}(\mathcal{S}_n).$$

En $\mathcal{F}(G)$ se define el producto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}.$$

Es sabido que:

- (1) **Relaciones de Ortogonalidad de Schur.** $\mathcal{I}(G)$ es una base ortonormal de $\mathcal{F}_{cl}(G)$. En particular, si k_i es la cantidad de elementos de la i -ésima clase de conjugación de G y g_i es un representante de ella, entonces

$$\sum_i k_i \phi(g_i) \overline{\psi(g_i)} = \delta_{\phi, \psi} |G|$$

para todo $\phi, \psi \in \mathcal{I}(G)$.

- (2) Sean G_1 y G_2 dos grupos finitos. Dadas $\phi_i \in \mathcal{F}_{cl}(G_i)$, sea $\phi_1 \cdot \phi_2 \in \mathcal{F}_{cl}(G_1 \times G_2)$ definida por $\phi_1 \cdot \phi_2(g_1, g_2) = \phi_1(g_1) \phi_2(g_2)$. Entonces

$$\mathcal{I}(G_1 \times G_2) = \{\chi_1 \cdot \chi_2 : \chi_i \in \mathcal{I}(G_i)\}.$$

En particular $\phi_1 \cdot \phi_2 \in \mathcal{V}(G_1 \times G_2)$ para todo par $\phi_i \in \mathcal{I}(G_i)$.

- (3) Si $\phi \in \mathcal{X}(G)$ entonces $\phi(1) = \dim(V)$ y

$$\sum_{\chi \in \mathcal{I}(G)} \chi(1)^2 = |G|.$$

- (4) Si $\phi \in \mathcal{X}(G)$ entonces $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ si y sólo si $\phi \in \mathcal{I}(G)$.
 (5) Si $\phi \in \mathcal{V}(G)$ entonces $\phi \in \mathcal{X}(G)$ si y sólo si $\langle \phi, \chi \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para todo $\chi \in \mathcal{I}(G)$. En particular $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ si y sólo si ϕ o $-\phi$ está en $\mathcal{I}(G)$.
 (6) Si T es la representación de permutación obtenida por una acción en E , entonces $\phi_T(g)$ es la cantidad de puntos fijos de g en E .
 (7) **Restricción e Inducción de funciones de clase.** Sea H un subgrupo de G . Si $\phi \in \mathcal{F}_{cl}(G)$ entonces la restricción $\phi|_H \in \mathcal{F}_{cl}(H)$. Al revés, si $\phi \in \mathcal{F}_{cl}(H)$, y definimos

$$\phi|_H^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \tilde{\phi}(xgx^{-1})$$

donde $\tilde{\phi}$ es la extensión de ϕ a todo G definida por cero en el complemento de H ; entonces $\phi|_H^G(g) \in \mathcal{F}_{cl}(G)$. Si $\phi \in \mathcal{X}(G)$ es el carácter de T entonces $\phi|_H$ es el carácter de $T|_H$. Análogamente, si $\phi \in \mathcal{X}(H)$ es el carácter de T entonces $\phi|_H^G(g)$ es el carácter de la representación inducida por T a G .

- (8) **Ley de reciprocidad de Frobenius.** Sea H un subgrupo de G y sean $\phi \in \mathcal{F}_{cl}(G)$, $\psi \in \mathcal{F}_{cl}(H)$. Entonces

$$\langle \phi, \psi|_H^G \rangle_G = \langle \phi|_H, \psi \rangle_H.$$

3.2. Caracteres de \mathcal{S}_n : El anillo de Littlewood-Richardson $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.

El hecho de que los grupos \mathcal{S}_n , variando n , estén canónicamente contenidos unos dentro de otros permite definir el siguiente anillo graduado conmutativo.

Convengamos que $\mathcal{V}(\mathcal{S}_0)$ sea \mathbb{Z} y sea

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{V}(\mathcal{S}_n).$$

Definimos ahora la siguiente multiplicación en $\mathcal{V}(\mathcal{S})$. Si $\phi \in \mathcal{V}(\mathcal{S}_i)$, $\psi \in \mathcal{V}(\mathcal{S}_j)$ entonces, de acuerdo al punto (2) de la sección anterior, $\phi \cdot \psi \in \mathcal{V}(\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j)$. Sea

$$\phi\psi = (\phi \cdot \psi)|^{\mathcal{S}_{i+j}} \in \mathcal{V}(\mathcal{S}_{i+j}),$$

donde la inducción se hace considerando a $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ como el subgrupo de \mathcal{S}_{i+j} que permuta los primeros i números entre sí y los últimos j números entre sí. Este producto es asociativo, distributivo y conmutativo como consecuencia de las propiedades de los caracteres descriptas en

la sección anterior y de propiedades básicas de \mathcal{S}_n . El anillo $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ se llama *anillo de Littlewood-Richardson*. De acuerdo a las inclusiones descritas en (3.1) $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ es subanillo de $\mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S}_n)_{\mathbb{Q}}$ que se define de manera análoga.

A continuación enunciaremos dos teoremas que caracterizan la estructura de los anillos $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ y $\mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}}$.

Para cada n , sea $1_n \in \mathcal{I}(\mathcal{S}_n)$ el carácter trivial, es decir la función constantemente 1. Para cada partición λ de n sea $\psi_{M^\lambda} \in \mathcal{X}(\mathcal{S}_n)$ el carácter de la representación de permutación M^λ

Teorema 3.1. *Las funciones ψ_{M^λ} , variando λ , junto con el $1 \in \mathcal{V}(\mathcal{S}_0)$, son base del \mathbb{Z} -módulo $\mathcal{V}(\mathcal{S})$. Además, si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, entonces*

$$\psi_{M^\lambda} = 1_{\lambda_1} 1_{\lambda_2} \dots 1_{\lambda_r}.$$

Demostración. La base canónica del \mathbb{Z} -módulo $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ es $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ (relaciones de ortogonalidad de Schur y definición de $\mathcal{V}(\mathcal{S})$). El Teorema 2.13 dice que la matriz que relaciona los caracteres ψ_{M^λ} y los caracteres irreducibles es triangular superior con 1's en la diagonal. Por lo tanto los caracteres ψ_{M^λ} son base del \mathbb{Z} -módulo $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.

La fórmula enunciada es consecuencia inmediata de la definición de producto en $\mathcal{V}(\mathcal{S})$, del Teorema 2.3 y del punto (7) de la sección anterior. \square

El producto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \phi(\sigma) \overline{\psi(\sigma)}.$$

del \mathbb{C} -espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathcal{S}_n)$ queda, de acuerdo al Teorema 1.2,

$$(3.2) \quad \langle \phi, \psi \rangle = \sum_{\mu \text{ partición de } n} \frac{1}{z(\mu)} \phi(\sigma_\mu) \psi(\sigma_\mu), \quad \phi, \psi \in \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S}_n)_{\mathbb{Q}},$$

donde σ_μ es un representante de la clase de conjugación de tipo μ en \mathcal{S}_n y si $\mu = [1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}]$

$$z(\mu) = 1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \dots n^{r_n} r_n!.$$

Declarando ortogonales a $\mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S}_n)_{\mathbb{Q}}$ y $\mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S}_m)_{\mathbb{Q}}$, con $n \neq m$, obtenemos un producto interno en el \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}}$ en el que $\cup_n \mathcal{I}(\mathcal{S}_n)$ es una base ortonormal (relaciones de ortogonalidad de Schur). Otra base ortogonal es la formada por las funciones características $\varphi_\lambda \in \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S}_n)_{\mathbb{Q}}$ de las clases de equivalencia (φ_λ es la función que vale 1 en la clase de tipo λ y 0 en las restantes). No forman base ortonormal pues

$$(3.3) \quad \langle \varphi_\lambda, \varphi_\lambda \rangle = \frac{1}{z(\lambda)}.$$

Sean $\lambda = [1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}]$ y $\mu = [1^{s_1} 2^{s_2} \dots m^{s_m}]$ particiones de n y m respectivamente y sea $\lambda \cup \mu = [1^{r_1+s_1} 2^{r_2+s_2} \dots]$ la *unión* de λ y μ . Observar que $\lambda \cup \mu$ es partición de $n+m$ y que se puede definir alternativamente como $\lambda \cup \mu = (\lambda' + \mu)'$. Además, si ν una partición de $n+m$ entonces, considerando $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m \subset \mathcal{S}_{n+m}$, $\varphi_\nu|_{\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m} = 0$ salvo que $\nu = \lambda \cup \mu$, con λ y μ particiones de n y m respectivamente, en cuyo caso $\varphi_\nu|_{\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m} = \varphi_\lambda \cdot \varphi_\mu$.

Teorema 3.2. *Sean λ y μ particiones de n y m respectivamente. Entonces*

$$\varphi_\lambda \varphi_\mu = \frac{z(\lambda \cup \mu)}{z(\lambda)z(\mu)} \varphi_{\lambda \cup \mu}.$$

Demostración. Por la identidad (3.3) sabemos que

$$\varphi_\lambda \varphi_\mu = \sum_{\substack{\nu \text{ partición} \\ \text{de } n+m}} z(\nu) \langle \varphi_\lambda \varphi_\mu, \varphi_\nu \rangle \varphi_\nu.$$

Utilizando la Ley de Reciprocidad de Frobenius (ver (8) de la sección anterior) y lo mencionado antes del teorema sobre la restricción de las funciones características, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda \varphi_\mu &= \sum_{\substack{\nu \text{ partición} \\ \text{de } n+m}} z(\nu) \langle (\varphi_\lambda \cdot \varphi_\mu)|_{\mathcal{S}_{n+m}}, \varphi_\nu \rangle \varphi_\nu \\ &= \sum_{\substack{\nu \text{ partición} \\ \text{de } n+m}} z(\nu) \langle \varphi_\lambda \cdot \varphi_\mu, \varphi_\nu |_{\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m} \rangle_{\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m} \varphi_\nu \\ &= \frac{z(\lambda \cup \mu)}{z(\lambda)z(\mu)} \varphi_{\lambda \cup \mu} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

El teorema principal de esta segunda parte de las notas establece que el anillo $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ es isomorfo al anillo de funciones simétricas con coeficientes en \mathbb{Z} . Demostraremos este teorema en la Sección 3.5. Ahora dedicaremos las próximas dos secciones a describir el anillo de funciones simétricas.

3.3. Polinomios simétricos en d variables.

El grupo simétrico \mathcal{S}_d actúa en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]$ permutando las variables. Sea

$$\Lambda_d = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]^{\mathcal{S}_d}$$

el anillo de polinomios invariantes bajo esta acción. Intencionalmente hemos cambiado por d la letra n que veníamos utilizando para indicar al grupo \mathcal{S}_n . Esto se debe a que en la próxima sección perderá relevancia la cantidad de variables.

El anillo Λ_d es graduado:

$$\Lambda_d = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_d^n$$

donde Λ_d^n son los polinomios homogéneos simétricos de grado n .

Para $k = 0, \dots, d$ el k -ésimo *polinomio simétrico elemental* E_k es

$$E_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

En otras palabras, los polinomios simétricos elementales son los que aparecen cuando desarrollamos

$$(1+x_1X)(1+x_2X) \dots (1+x_dX) = \sum_{k=0}^d E_k X^k = 1 + (x_1 + \dots + x_d)X + \dots + (x_1 \dots x_d)X^d.$$

El siguiente teorema es básico en la teoría de polinomios simétricos, ver por ejemplo en [La].

Teorema 3.3. *Los polinomios E_1, \dots, E_d son algebraicamente independientes. Más aún, Λ_d es isomorfo al anillo de polinomios $\mathbb{Z}[E_1, \dots, E_d]$.*

Dado que E_k es homogéneo de grado k , tenemos que

$$E_\lambda = E_{\lambda_1} \dots E_{\lambda_r}$$

es homogéneo de grado n para toda partición λ de n en la que la primera parte no supere d . El teorema anterior nos dice que estos polinomios E_λ son base del \mathbb{Z} -módulo Λ_d^n .

Las particiones λ de n con primer parte menor o igual a d son las traspuestas de las particiones de n en r partes no nulas con $r \leq d$. Hay varias bases famosas del \mathbb{Z} -módulo Λ_d^n parametrizadas por las particiones de n en r partes no nulas con $r \leq d$. Probablemente las más famosas son:

- (1) La que acabamos de describir: los *polinomios simétricos elementales* E_λ .
- (2) Los *polinomios simétricos monomiales* M_λ definidos como la suma de todos los monomios distintos que resultan de permutar el monomio $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d}$.
- (3) Los *polinomios simétricos completos* $H_\lambda = H_{\lambda_1} \dots H_{\lambda_d}$, donde H_k es la suma de todos los monomios de grado k .
- (4) Los *polinomios simétricos de Newton* $P_\lambda = P_{\lambda_1} \dots P_{\lambda_d}$, donde $P_k = x_1^k + \dots + x_d^k$ es la suma de todas las potencias de grado k . En rigor de verdad, estos polinomios son base del \mathbb{Q} -espacio vectorial $\Lambda_d^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, es decir polinomios simétricos con coeficientes racionales.
- (5) Los *polinomios simétricos de Schur* S_λ que son el cociente de los siguientes determinantes de Vandermonde. Dada una partición λ con $r \leq d$ partes no nulas sea A_λ la matriz $d \times d$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1} & x_2^{\lambda_1} & \dots & x_d^{\lambda_1} \\ x_1^{\lambda_2} & x_2^{\lambda_2} & \dots & x_d^{\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_d} & x_2^{\lambda_d} & \dots & x_d^{\lambda_d} \end{pmatrix}$$

($\lambda_j = 0$ para $r < j \leq d$) y sea $\rho = \rho(d)$ la partición $(d-1, d-2, \dots, 2, 1, 0)$. Es claro que $\det A_{\lambda+\rho}$ es cero si $x_i = x_j$ y por lo tanto $\det A_{\lambda+\rho}$, como polinomio, es divisible por $\det A_\rho = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$. Sea

$$S_\lambda = \frac{\det A_{\lambda+\rho}}{\det A_\rho}.$$

S_λ es simétrico pues es cociente de dos polinomios antisimétricos.

Observación 3.4. Una propiedad importante de todos los polinomios que acabamos de definir es que si λ es una partición y Q_λ es uno de los polinomios mencionados que está definido para d y $d+1$ variables, entonces $Q_\lambda(x_1, \dots, x_d) = Q_\lambda(x_1, \dots, x_d, 0)$.

En la siguiente tabla mostramos las diferentes bases de Λ_3^4 (o $\Lambda_3^4 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$).

λ	E_λ	M_λ	H_λ	P_λ	S_λ
$[4^1]$	$(x_1+x_2+x_3)^4$	$x_1^4+x_2^4+x_3^4$	$x_1^4+x_2^4+x_3^4+$ $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1^3x_3+$ $x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+$ $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+$ $x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$	$x_1^4+x_2^4+x_3^4$	$x_1^4+x_2^4+x_3^4+$ $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1^3x_3+$ $x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+$ $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+$ $x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$
$[1^1 3^1]$	$(x_1+x_2+x_3)^2 \times$ $(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$	$x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1^3x_3+$ $x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3$	$(x_1^3+x_2^3+x_3^3+$ $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+$ $x_1x_2^3+x_2^2x_3+x_2x_3^2+$ $x_1x_2x_3)(x_1+x_2+x_3)$	$(x_1^3+x_2^3+x_3^3) \times$ $(x_1+x_2+x_3)$	$x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1^3x_3+$ $x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+$ $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+$ $2(x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2)$
$[2^2]$	$(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2$	$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$	$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+$ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2$	$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$	$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+$ $x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$
$[1^2 2^1]$	$x_1x_2x_3 \times$ $(x_1+x_2+x_3)$	$x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$	$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+$ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ $\times (x_1+x_2+x_3)^2$	$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ $\times (x_1+x_2+x_3)^2$	$x_1x_2x_3 \times$ $(x_1+x_2+x_3)$

Observar que la partición $[1^4]$ fue omitida por tener más de tres partes. Puede resultar más práctico ver esta tabla eligiendo una base y escribiendo las restantes en coordenadas con respecto a ella. En la siguiente tabla elegimos la base correspondiente a los polinomios M .

λ	E_λ	M_λ	H_λ	P_λ	S_λ
$[4^1]$	(1, 4, 6, 12)	$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$	(1, 1, 1, 1)	(1, 0, 0, 0)	(1, 1, 1, 1)
$[1^1 3^1]$	(0, 1, 2, 5)	$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3$	(1, 2, 2, 3)	(1, 1, 0, 0)	(0, 1, 1, 2)
$[2^2]$	(0, 0, 1, 2)	$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$	(1, 2, 3, 4)	(1, 0, 2, 0)	(0, 0, 1, 1)
$[1^2 2^1]$	(0, 0, 0, 1)	$x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2$	(1, 3, 4, 7)	(1, 2, 2, 2)	(0, 0, 0, 1)

3.4. El anillo de funciones simétricas Λ .

Un hecho fundamental en la teoría de polinomios simétricos es que la cantidad de variables no tiene tanta relevancia. Las bases del \mathbb{Z} -módulo Λ_d^n están parametrizadas por las particiones de n con a lo sumo d partes no nulas. Por este motivo, si fijamos n , a medida que d crece se van incorporando nuevos polinomios hasta que $d = n$. De ahí en adelante, la cantidad de polinomios se estabiliza. Además, al agregarse una nueva variable, los polinomios de las distintas bases “cambian poco” en el sentido descrito por la Observación 3.4.

Esto nos lleva a considerar un nuevo anillo, el de las funciones simétricas, que no sólo hace más transparentes los resultados referidos a polinomios simétricos, sino que además es un anillo muy importante que está relacionado con varias áreas de la matemática.

Sea Λ^n el \mathbb{Z} -módulo

$$\Lambda^n = \{f = (f_1, f_2, \dots) : f_d \in \Lambda_d^n \text{ y } f_{d+1}(x_1, \dots, x_d, 0) = f_d(x_1, \dots, x_d)\}.$$

Ésta es la definición formal, pero conviene pensar a Λ^n como el conjunto de “funciones” simétricas en las (infinitas) variables x_1, x_2, \dots , homogéneas de grado n y con coeficientes enteros. Por ejemplo $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ denota a

$$(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \dots)$$

y es la única, salvo escalar, función simétrica homogénea de grado 1.

Utilizando la Observación 3.4, podemos extender la notación que teníamos para los polinomios simétricos a las funciones simétricas de la siguiente manera. Si λ es una partición de n y Q_λ es un polinomio simétrico de los que habíamos definido, ahora Q_λ será la única función en Λ^n que se proyecta a $Q_\lambda(x_1, \dots, x_d)$ para todo d que tenga sentido. Por ejemplo

$$\begin{aligned} M_{(2,1)} &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1^2 x_4 + x_1 x_4^2 + \dots \\ &= (0, M_{(2,1)}(x_1, x_2), M_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3), M_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4), \dots) \end{aligned}$$

Resulta así que el \mathbb{Z} -módulo Λ^n tiene como base cualquiera de las cuatro mencionadas anteriormente: E , M , H y S parametrizadas por todas las particiones de n , sin restricciones en la cantidad de partes no nulas (los polinomios P son base de $\Lambda^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$). Siempre consideraremos estas bases ordenadas lexicográficamente de mayor a menor.

Finalmente definimos en $\Lambda = \bigoplus \Lambda^n$ la estructura de anillo (graduado) dada por la multiplicación de funciones. Aquí hace falta verificar la buena definición del producto. En términos generales

$$\Lambda = \varprojlim_d \Lambda_d$$

es el límite inverso, en la categoría de anillos graduados, con respecto a las proyecciones correspondientes a evaluar en cero la última coordenada. Este anillo se conoce con el nombre de *anillo de funciones simétricas*.

Este anillo ha sido y es muy estudiado. Resumimos a continuación algunas de sus propiedades sin dar demostraciones. Hay numerosa bibliografía que trata este tema y contiene las pruebas. Para demostraciones concisas se puede consultar [FH] o [Go]. Para un tratamiento más extensivo ver [Ma] o [Fu].

- (1) Sea $K = K(n)$ la matriz que tiene en sus filas las coordenadas de la base de Schur S de Λ^n con respecto a la base M , es decir

$$S_\lambda = \sum_{\mu \text{ partición de } n} K_{\lambda\mu} M_\mu$$

se llama *matriz de Kostka* y sus elementos $K_{\lambda\mu}$ se llaman *números de Kostka*. Por ejemplo

$$K(4) = \begin{matrix} & [4^1] & [1^1 3^1] & [2^2] & [1^2 2^1] & [1^4] \\ \begin{matrix} [4^1] \\ [1^1 3^1] \\ [2^2] \\ [1^2 2^1] \\ [1^4] \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix}, \quad K(4)^{-1} = \begin{matrix} & [4^1] & [1^1 3^1] & [2^2] & [1^2 2^1] & [1^4] \\ \begin{matrix} [4^1] \\ [1^1 3^1] \\ [2^2] \\ [1^2 2^1] \\ [1^4] \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix}.$$

Observar que los vectores de la columna S de la tabla de la sección anterior corresponden al bloque superior izquierdo 4×4 de $K(4)$. Otros ejemplos son

$$K(5) = \begin{matrix} & [5^1] & [1^1 4^1] & [2^1 3^1] & [1^2 3^1] & [1^1 2^2] & [1^3 2^1] & [1^5] \\ \begin{matrix} [5^1] \\ [1^1 4^1] \\ [2^1 3^1] \\ [1^2 3^1] \\ [1^1 2^2] \\ [1^3 2^1] \\ [1^5] \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix},$$

$$K(6) = \begin{matrix} & [6^1] & [1^1 5^1] & [2^1 4^1] & [1^2 4^1] & [3^2] & [1^1 2^1 3^1] & [1^3 3^1] & [2^3] & [1^2 2^2] & [1^4 2^1] & [1^6] \\ \begin{matrix} [6^1] \\ [1^1 5^1] \\ [2^1 4^1] \\ [1^2 4^1] \\ [3^2] \\ [1^1 2^1 3^1] \\ [1^3 3^1] \\ [2^3] \\ [1^2 2^2] \\ [1^4 2^1] \\ [1^6] \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix}.$$

- (2) De la definición de los polinomios M se deduce que para cualquier función simétrica f la coordenada μ de f en la base M es el coeficiente que f tiene en el monomio $x^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots$. En particular $K_{\lambda\mu}$ es el coeficiente que S_λ tiene en el monomio x^μ . Se obtiene que $K_{\lambda\lambda} = 1$ y $K_{\lambda\mu} = 0$ si $\mu > \lambda$, es decir que K es siempre triangular superior con 1's en la diagonal (recordar que el orden de la base es de mayor a menor).
- (3) Los números de Kostka se pueden calcular combinatoriamente: $K_{\lambda\mu}$ es la cantidad de formas en que se puede completar el diagrama de λ con μ_1 1's, μ_2 2's, etc., de modo que las filas sean débilmente crecientes y las columnas sean fuertemente crecientes. Por ejemplo, si $\lambda = [2^1 3^1] = (3, 2)$ y $\mu = [1^3 2^1] = (2, 1, 1, 1)$ tenemos que $K_{\lambda\mu} = 3$ pues

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

son las 3 formas de llenar el diagrama con dos 1's, un 2, un 3 y un 4 de la manera establecida. Queda como ejercicio verificar los dos ceros que aparecen en $K(6)$ arriba de la diagonal.

- (4) Los números de Kostka también aparecen en las coordenadas de la base H con respecto a la base de Schur. Más precisamente

$$H_\lambda = \sum_{\mu \text{ partición de } n} K_{\mu\lambda} S_\mu.$$

Observar que aquí la matriz está traspuesta. En analogía a lo dicho en (2), si μ es partición de n en d partes y f es una función simétrica entonces la coordenada μ de f en la base de Schur S es el coeficiente que $\det(A_{\rho(d)})f_d$ tiene en el monomio $x^{\mu+\rho(d)}$, donde f_d es la proyección de f a polinomio simétrico en d variables. En particular, si λ y μ son particiones de n , entonces $K_{\mu\lambda}$ es el coeficiente del polinomio $\det(A_{\rho(n)})H_\lambda$ en el monomio $x^{\mu+\rho(n)}$.

- (5) Inclusive también se obtiene a partir de K la matriz cuyas filas son las coordenadas de la base E en la base M . Si $J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz que tiene todas sus entradas 0 salvo todos 1's en la "antidiagonal", entonces $K^t J K$ es matriz cuyas filas son las coordenadas de la base E en la base M .
- (6) Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda$ la forma bilineal en Λ (o el producto interno en $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$) tal que las funciones de Schur son ortonormales. Entonces resulta que las bases M y H son duales entre sí, es decir $\langle H_\lambda, M_\mu \rangle_\Lambda = \delta_{\lambda\mu}$. Este resultado se deduce sin dificultades de (1) y (4). Además

$$(3.4) \quad \langle P_\lambda, P_\mu \rangle_\Lambda = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \neq \mu; \\ z(\lambda) = 1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \dots n^{r_n} r_n!, & \text{si } \lambda = \mu = [1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}]. \end{cases}$$

- (7) Sea $C = C(n)$ la matriz cuyas filas son las coordenadas de la base P en la base de Schur, es decir

$$P_\mu = \sum_{\lambda \text{ partición de } n} C_{\mu\lambda} S_\lambda.$$

Esta matriz tiene coeficientes en \mathbb{Z} pero su inversa tiene coeficientes racionales no enteros. Más precisamente, como S es base ortonormal y P es ortogonal la identidad (3.4) implica que $C C^t$ es la matriz diagonal cuyas entradas son los números $z(\lambda)$, es decir que

$$S_\lambda = \sum_{\mu \text{ partición de } n} \frac{C_{\mu\lambda}}{z(\lambda)} P_\mu.$$

De acuerdo a lo dicho en (4), $C(n)_{\lambda\mu}$ es el coeficiente del polinomio $\det(A_{\rho(n)})P_\lambda$ en el monomio $x^{\mu+\rho(n)}$. Por ejemplo

$$C(4) = \begin{matrix} & [4^1] & [1^1 3^1] & [2^2] & [1^2 2^1] & [1^4] \\ \begin{matrix} [4^1] \\ [1^1 3^1] \\ [2^2] \\ [1^2 2^1] \\ [1^4] \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{matrix} \end{matrix}, \quad C(4)^{-1} = \begin{matrix} & [4^1] & [1^1 3^1] & [2^2] & [1^2 2^1] & [1^4] \\ \begin{matrix} [4^1] \\ [1^1 3^1] \\ [2^2] \\ [1^2 2^1] \\ [1^4] \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{matrix} \end{matrix}$$

y

	$[6^1]$	$[1^1 5^1]$	$[2^1 4^1]$	$[1^2 4^1]$	$[3^2]$	$[1^1 2^1 3^1]$	$[1^3 3^1]$	$[2^3]$	$[1^2 2^2]$	$[1^4 2^1]$	$[1^6]$
$[6^1]$	1	-1	0	1	0	0	-1	0	0	1	-1
$[1^1 5^1]$	1	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	1
$[2^1 4^1]$	1	-1	1	0	-1	0	0	-1	1	-1	1
$[1^2 4^1]$	1	1	-1	0	-1	0	0	1	1	-1	-1
$[3^2]$	1	-1	0	1	2	-2	1	2	0	-1	1
$[1^1 2^1 3^1]$	1	0	0	-1	1	0	1	-1	0	0	-1
$[1^3 3^1]$	1	2	0	1	-1	-2	1	-1	0	2	1
$[2^3]$	1	-1	3	-2	-3	0	2	3	-3	1	-1
$[1^2 2^2]$	1	1	1	-2	1	0	-2	1	1	1	1
$[1^4 2^1]$	1	3	3	2	1	0	-2	-1	-3	-3	-1
$[1^6]$	1	5	9	10	5	16	10	5	9	5	1

(8) Las coordenadas de $H_{[n^1]}$ en la base P son

$$H_{[n^1]} = \sum_{\mu \text{ partición de } n} \frac{1}{z(\mu)} P_{\mu}.$$

Esta sería la primera fila de la matriz cuyas filas son las coordenadas de la base H en la base P . Es claro que esta matriz, al igual que las demás matrices de coordenadas que no hemos mencionado, se obtienen a partir de las ya mencionadas.

(9) Hasta aquí, todas estas propiedades son lineales del \mathbb{Z} -módulo Λ . Algunas propiedades del anillo Λ son

a. Los conjuntos $\{E_1, E_2, E_3, \dots\}$ y $\{H_1, H_2, H_3, \dots\}$ son algebraicamente independientes sobre \mathbb{Z} y

$$\Lambda = \mathbb{Z}[E_1, E_2, E_3, \dots] = \mathbb{Z}[H_1, H_2, H_3, \dots].$$

b. Las expresiones algebraicas de las funciones de Schur en términos de E y H están dadas por las famosas identidades de Giambelli:

$$S_{\lambda} = \det(H_{\lambda_i+j-i}) = \det(E_{\mu_i+j-i})$$

donde $\mu = \lambda'$. Por ejemplo, en 3 variables

$$\begin{aligned}
 S_{[1^1 3^1]} &= \begin{vmatrix} x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + \\ x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3 + \\ x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + \\ 2(x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_3 & H_4 \\ H_0 & H_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + & x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \\ x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + & x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + \\ x_1 x_2^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3 + & x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3 + \\ x_1 x_2^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3 + & x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + \\ x_1 x_2 x_3 & x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 \\ 1 & x_1 + x_2 + x_3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} E_2 & E_3 & E_4 \\ E_0 & E_1 & E_2 \\ 0 & E_0 & E_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 & x_1 x_2 x_3 & 0 \\ 1 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ 0 & 1 & x_1 + x_2 + x_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

c. Es claro que $P_{\lambda} P_{\mu} = P_{\lambda \cup \mu}$ y $H_{\lambda} H_{\mu} = H_{\lambda \cup \mu}$. Por otro lado, los coeficientes de estructura en la base de Schur

$$S_{\lambda} S_{\mu} = \sum_{\nu \text{ partición de } n+m} c_{\lambda \mu}^{\nu} S_{\nu}$$

son los famosos números de Littlewood-Richardson.

3.5. El isomorfismo de anillos $\mathcal{V}(\mathcal{S}) \simeq \Lambda$.

El *mapa característico*

$$\text{ch} : \mathcal{V}(\mathcal{S}) \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

es la función $\text{ch} = \bigoplus_{n \geq 0} \text{ch}_n$ donde para cada n definimos

$$\text{ch}_n : \mathcal{V}(\mathcal{S}_n) \rightarrow \Lambda^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

por

$$\text{ch}_n(\phi) = \sum_{\mu \text{ partición de } n} \frac{1}{z(\mu)} \phi(\sigma_\mu) P_\mu$$

donde σ_μ es un representante de la clase de conjugación de tipo μ en \mathcal{S}_n . Por ejemplo, el punto (8) de la sección anterior implica que la imagen del carácter trivial de \mathcal{S}_n es la función simétrica completa de grado n , es decir

$$\text{ch}_n(1_n) = \sum_{\mu \text{ partición de } n} \frac{1}{z(\mu)} P_\mu = H_{[n^1]}.$$

Observemos que en la definición del mapa ch “participan” dos familias de grupos simétricos: la familia $\{\mathcal{S}_n : n \geq 0\}$ la cual define el anillo graduado de caracteres virtuales $\bigoplus \mathcal{V}(\mathcal{S}_n)$ y cuyo parámetro n corresponde al grado, y la familia $\{\mathcal{S}_d : d \geq 0\}$ la cual está oculta en las infinitas variables del anillo Λ y cuyo parámetro d solamente aparece cuando convertimos en polinomio de d variables a una función simétrica.

El mapa característico se puede extender a

$$\text{ch} : \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

con la misma definición y se obtiene que ch aplicado a las funciones características de las clases de conjugación da

$$\text{ch}(\varphi_\lambda) = \frac{1}{z(\lambda)} P_\lambda.$$

Recordemos que en el Teorema 3.2 dice que

$$\varphi_\lambda \varphi_\mu = \frac{z(\lambda \cup \mu)}{z(\lambda)z(\mu)} \varphi_{\lambda \cup \mu}$$

mientras que el punto (9)c dice que $P_\lambda P_\mu = P_{\lambda \cup \mu}$. Como las funciones características φ_λ son base del \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}}$ y las funciones P_λ son base del \mathbb{Q} -espacio vectorial $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ obtenemos que $\text{ch} : \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es un isomorfismo de anillos.

Más aún, $\mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}}$ y $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tienen sus respectivos productos internos: el dado por la fórmula (3.2) y el descrito en el punto (6) de la sección anterior. Las identidades (3.3) y (3.4) implican que $\text{ch} : \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es una isometría. Finalmente obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *El mapa característico $\text{ch} : \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es un isomorfismo de anillos isométrico y su restricción*

$$\text{ch} : \mathcal{V}(\mathcal{S}) \rightarrow \Lambda$$

también es un isomorfismo de anillos tal que $\text{ch}(\psi_{M^\lambda}) = H_\lambda$.

Demostración. Sólo resta ver que $\text{ch}(\mathcal{V}(\mathcal{S})) = \Lambda$. Dado $\text{ch}_n(1_n) = H_{[n^1]}$ y que $\text{ch} : \mathcal{F}_{cl}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es isomorfismo de los anillos, el Teorema 3.1 implica que

$$\text{ch}(\psi_{M^\lambda}) = H_\lambda$$

para toda partición λ . Sabemos que las funciones H son base del \mathbb{Z} -módulo Λ y el Teorema 3.1 dice que los caracteres ψ_{M^λ} son base del \mathbb{Z} -módulo $\mathcal{V}(\mathcal{S})$. \square

A partir de este teorema podemos traducir a $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ todos los resultados conocidos para Λ enunciados en la sección anterior. El principal es

Corolario 3.6. *Sea χ_λ el carácter del módulo de Specht S^λ entonces $\text{ch}(\chi_\lambda) = S_\lambda$. En particular, la tabla de caracteres $\chi_\lambda(\sigma_\mu)$ de \mathcal{S}_n es $C(n)_{\mu\lambda}$.*

Demostración. El punto (4) de la sección anterior, junto con el (2), dicen que

$$H_\lambda = S_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} S_\mu.$$

El Teorema 2.13 y el teorema anterior implican que

$$H_\lambda = \text{ch}(\chi_\lambda) + \sum_{\mu > \lambda} m_{\mu\lambda} \text{ch}(\chi_\lambda).$$

Además sabemos que $\text{ch}(\chi_\lambda)$ y S_λ son bases ortonormales de Λ . Aplicando el hecho general que a continuación enunciamos, obtenemos que $\text{ch}(\chi_\lambda) = S_\lambda$ para toda partición λ . Si $\{\epsilon_i\}$ y $\{\epsilon'_i\}$ son bases ortonormales tales que para ciertos escalares

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon'_1 \\ \epsilon_2 + a_{12}\epsilon_1 &= \epsilon'_2 + a'_{12}\epsilon'_1 \\ \epsilon_3 + a_{13}\epsilon_1 + a_{23}\epsilon_2 &= \epsilon'_3 + a'_{13}\epsilon'_1 + a'_{23}\epsilon'_2 \end{aligned}$$

etc., entonces $\epsilon_i = \epsilon'_i$ para todo i (y $a_{ij} = a'_{ij}$ para todo i, j).

Para demostrar que $\chi_\lambda(\sigma_\mu) = C(n)_{\mu\lambda}$ observemos que, por definición de ch , el coeficiente de $\text{ch}(\chi_\lambda) = S_\lambda$ como combinación de los polinomios P es $\frac{\chi_\lambda(\sigma_\mu)}{z(\nu)}$. Por otro lado, el punto (7) de la sección anterior dice que este coeficiente es $\frac{C_{\mu\lambda}}{z(\lambda)}$. \square

3.6. Algunas fórmulas famosas.

Fórmula de Frobenius para χ_λ . Sean λ y μ particiones de n y $\rho = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$, entonces

$$\chi_\lambda(\sigma_\mu) = \text{coeficiente del polinomio } \det(A_\rho)P_\mu \text{ en el monomio } x^{\lambda+\rho}.$$

(si λ tiene d partes no nulas entonces da igual (y es más práctico computacionalmente) usar $\rho = (d-1, d-2, \dots, 1, 0)$). Este resultado se deduce del punto (7) de la sección anterior.

Fórmula de Frobenius para $\dim S^\lambda$. Sea λ una partición de n en d partes no nulas y sea $\rho = (d-1, d-2, \dots, 1, 0)$, entonces

$$\dim S^\lambda = \text{coeficiente del polinomio } \det(A_\rho)(x_1 + \dots + x_d)^n \text{ en el monomio } x^{\lambda+\rho}.$$

Esto es consecuencia de que $\dim S^\lambda = \chi_\lambda(1)$ y de que el 1 está en la clase de tipo $\mu = (n)$. Es relativamente sencillo deducir de esta fórmula (ver [FH]) que

$$\dim S^\lambda = \frac{n!}{\nu_1! \dots \nu_d!} \prod_{i < j} (\nu_i - \nu_j), \quad \nu = \lambda + \rho.$$

La “Hook Length Formula” para $\dim S^\lambda$. Sea λ una partición de n y para cada (i, j) definimos h_{ij} como la longitud del codo que tiene vértice en el cuadrado (i, j) del diagrama de λ y se extiende hacia la derecha y hacia abajo. En el siguiente ejemplo hemos rellenado el diagrama con los valores h_{ij} .



Se deduce con facilidad de la formula de Frobenius (ver [Go]) que

$$\dim S^\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}}.$$

La descomposición de M^λ en irreducibles. El Corolario 3.6 y el punto (4) de la sección anterior dice que los números de Kostka $K_{\mu\lambda}$ son los mismos que los $m_{\mu\lambda}$ del Teorema 2.13. Por lo tanto

$$M^\lambda = S^\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} S^\mu.$$

La fórmula del determinante de los caracteres irreducibles. Recordemos que 1_n es el carácter de la representación trivial de \mathcal{S}_n para todo $n \geq 1$ y convengamos que $1_n = 0$ para $n \leq 0$. Como consecuencia del punto (9)b obtenemos si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ entonces

$$\chi_\lambda = \det(1_{\lambda_i+j-i}) = \begin{vmatrix} 1_{\lambda_1} & 1_{\lambda_1+1} & \cdots & 1_{\lambda_1+d-1} \\ 1_{\lambda_2-1} & 1_{\lambda_2} & \cdots & 1_{\lambda_2+d-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1_{\lambda_d-d+1} & 1_{\lambda_d-d+2} & \cdots & 1_{\lambda_d} \end{vmatrix}.$$

REFERENCIAS

- [CR] Curtis C. and Reiner I., *Representation theory of finite groups and associative algebras.*, Wiley Classics Library. New York etc.: John Wiley & Sons Ltd. (1988).
- [Fu] Fulton, W., *Young Tableaux*, Cambridge University Press, Lond. Math. Soc. Student Texts **No. 35** (1997).
- [FH] Fulton W. and Harris J., *Representation theory. A first course.*, Graduate Texts in Mathematics. **No. 129**, New York etc.: Springer-Verlag (1991).
- [Go] Goldschmidt, D., *Group characters, symmetric functions, and the Hecke algebra*, University Lecture Series. 4. Providence, RI: American Mathematical Society (1993).
- [Ja] James, G., *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics. **No. 682**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag (1978).
- [Kr] Krause, M., *A simple proof of the Gale-Ryser theorem*, Am. Math. Mon. 103 **No. 4**, 335-337 (1996).
- [La] Lang, S., *Algebra. 3rd ed.*, Reading, MA: Addison Wesley, (1993).
- [Ma] Macdonald, I.G., *Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd ed.*, Oxford Science Publications. Oxford: Clarendon Press, (1998).

CIEM - FAMAF, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA.
E-mail address: cagliero@famaf.unc.edu.ar