UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE “C”

TRABAJOS DE FÍSICA

Nº 5/11

Guía de Trabajos Prácticos de Laboratorio de Física I para Ciencias Químicas

Diego Forni – Lorenzo Iparraguirre - Daniel Lescano
Oscar Mensio - José Tisera

Editores: Miguel A. Chesta–Ricardo C. Zamar

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

Presentación

Esta Guía ha sido elaborada por un equipo de docentes de FaMAF con experiencia en la asignatura Física para Ciencias Químicas, a partir de la solicitud de esta última Facultad de disponer de un diseño de trabajos experimentales adecuados para la enseñanza de la Física para su Ciclo Básico Común en atención a los requerimientos emergentes de las modificaciones del Plan de Estudios en el momento actual.

Para desarrollar estas guías se ha tenido en cuenta la experiencia acumulada en la realización de Trabajos Prácticos de Laboratorio tanto en la asignatura Física 1 (Planes de Estudios anteriores al 1995), como en la asignatura Laboratorio 1 (Plan 95).

Esa experiencia se ha complementado con aportes teóricos sobre las diversas características, ventajas y desventajas de la enseñanza de la física a través de actividades experimentales, en una serie de reuniones de trabajo que desembocaron en el estudio y la prueba de diversas alternativas, hasta llegar a la presentación final condensada en este trabajo.

Por considerarse que una de las funciones del trabajo experimental es la familiarización de los alumnos con la problemática de los errores experimentales, y que ese es un tema complejo al que los alumnos habrán de acceder a través de un proceso gradual muy cuidadosamente guiado, esta Guía comienza con una capítulo denominado "Medición y Tratamiento de Datos Experimentales", que ha sido también elaborado especialmente para estos alumnos.

Las propuestas de actividades experimentales desarrolladas en esta Guía se consideran además especialmente adecuadas para alumnos de primer año de Física de otras carreras de nivel terciario o universitario.

Autores:
Lic. Lorenzo Iparraguirre (Director coordinador)
Lic. Diego Forni
Lic. Daniel Lescano
Dr. Oscar Mensio
Ing. José Tisera

MEDICIÓN
Y
TRATAMIENTO DE LOS DATOS EXPERIMENTALES

En esta primer parte se presentan de manera simple y accesible los conceptos básicos necesarios para una introducción en la problemática básica de la medición, asociados con las recomendaciones prácticas necesarias para dar los primeros pasos en un laboratorio de Física.

En un Apéndice Matemático al final se presentan algunas demostraciones con cierto grado de elaboración.

MAGNITUD

Todas las cosas que se pueden medir (en general pensamos en propiedades de cuerpos) se denominan **magnitudes físicas**.

El valor de una magnitud física se determina mediante un proceso de medición, ya sea directamente, o bien por medio de cálculos a partir de los valores medidos de otras magnitudes.

Medir una magnitud implica directa o indirectamente una **comparación con algún patrón de referencia**. Dependiendo de la naturaleza de la magnitud que se trate, se define, con ciertos procedimientos adecuados, un patrón de la misma naturaleza, que se denomina **unidad** de la magnitud.

El objetivo de la medición es obtener un número que se llama **valor** de la magnitud, que expresa **el número de veces que la unidad está contenida en la magnitud medida**. Para cada unidad existe un símbolo que la representa, el cual se agrega al valor numérico de la magnitud medida para indicar a qué unidad se refiere.

El tipo o naturaleza de la magnitud que se mide se denomina **dimensión**. Así por ejemplo, si se mide la distancia entre dos puntos y se encuentra que vale 5 metros, se dice que *es una longitud*, o equivalentemente, que su *dimensión* es longitud.

De la misma manera, si a las 11 horas se registró una presión atmosférica de 950 hPa, y una temperatura de 24 ºC, se puede decir que: 11 horas tiene dimensión de tiempo, 950 hPa tiene dimensión de presión, y 24 ºC tiene dimensión de temperatura.

En todos los casos la unidad determina cuál es la dimensión, sin que ambos conceptos sean sinónimos, ya que para cada dimensión siempre hay muchas unidades. Así, hora, minuto, segundo, mes o año, son unidades para la dimensión tiempo, y metro, pie, pulgada, o legua, son unidades para la dimensión longitud, etc.

ERRORES, INCERTEZA, EXACTITUD Y PRECISIÓN.

Uno de las características más notables e importantes de todo proceso de medición, consiste en que si se mide repetidas veces una determinada magnitud con un instrumento adecuado para alcanzar detalles suficientemente finos, el **número obtenido no se repite exactamente**.

Como se podrá verificar experimentalmente innumerables veces, el valor medido de cualquier magnitud sólo se podrá garantizar dentro de cierto **margen de incerteza**. Mediciones más cuidadosas, con mejores instrumentos, dan lugar a resultados con menor margen de incerteza. Pero no existe el instrumento que permita reducir a cero el margen de incerteza en el valor de alguna magnitud física.

Las razones para que diferentes mediciones de una misma magnitud lleven a diferentes resultados dependen básicamente de tres tipos diferentes de acontecimientos, que suelen denominarse:

- Errores groseros.
- Errores sistemáticos.
- Errores accidentales.

Errores groseros.

Son aquéllos que se cometen en general por una falla evidente y grave de procedimiento, como podría ser equivocar el significado de las subdivisiones de una escala, usar un instrumento que no corresponde, confundir un número o un símbolo, distraerse en un momento crítico de la medición, etc.

Si bien puede decirse que inevitablemente *alguna vez* se comete un error de éstos, ellos se caracterizan porque *son los que se pueden evitar* con suficiente cuidado y atención.

Además en general estos errores se pueden detectar, porque cuando se los comete se obtiene algo extraño o absurdo, que no se entiende o que no se puede explicar.

Cuando se llega a la conclusión de que un valor obtenido está afectado por un error grosero, obviamente se descarta completamente dicho valor.

Errores sistemáticos.

Son aquéllos que se producen por algún vicio de procedimiento, o de funcionamiento de algún instrumento, que al no ser detectados afectan sistemáticamente a determinada medición, independientemente del cuidado que se ponga en ella.

Estos errores pueden originarse en algo tan simple como un instrumento mal calibrado, o tan complicado como un problema conceptual de la teoría que se está aplicando, y sólo se ponen de manifiesto al contrastar resultados obtenidos con diferentes métodos, diferentes instrumentos, diferentes operadores, y aún conclusiones de diferentes teorías.

A veces son muy difíciles de detectar, y puede transcurrir mucho tiempo durante el cual se trabaja de determinada manera, introduciendo sistemáticamente determinado error en algún tema científico, hasta que contradicciones con otros resultados, o con determinadas expectativas de la teoría permiten descubrir la fuente de error y corregirla.

Errores accidentales o por azar.

Ésta es la denominación que habitualmente se impone a la inevitable incerteza que afecta a todo número que, obtenido como resultado de un procedimiento experimental, se pretende que represente el valor de alguna propiedad de un cuerpo u objeto.

Es decir, la ciencia da explicaciones y hace predicciones sobre el comportamiento de objetos a través de los valores que tendrán determinadas magnitudes representativas de propiedades, coordenadas, etc., en determinadas circunstancias.

Los valores de estas magnitudes deben ser medidos con procedimientos que la ciencia va determinando, y se acepta como un **hecho incuestionable de la experiencia científica** que el resultado de cualquier medición siempre estará afectado de algún margen de incerteza, de manera que la expresión correcta del resultado de una medición siempre debe ser de la siguiente forma (o equivalente):

$$(X \pm \Delta X) \, U$$

Donde:

- X es el valor numérico de la magnitud, obtenido como resultado de la medición.
- ΔX es la incerteza que afecta al valor X; se interpreta que según la medición efectuada, el valor de X muy probablemente podría estar entre $X - \Delta X$ y $X + \Delta X$.
- U es la unidad que corresponde, o el símbolo de la misma.

Ahora bien, veamos cómo se llega a esto en la práctica.

Supongamos un operador que con determinado instrumento mide determinada magnitud. Al hacerlo obtiene un valor particular: X_1. Para cerciorarse de no estar cometiendo algún error grosero, él repite la medición, y obtiene un valor X_2, parecido, pero no exactamente igual.

En algunos casos puede ocurrir que el segundo resultado sea igual al primero; pero como veremos al avanzar la discusión, eso sólo puede ocurrir si el operador no trata de distinguir detalles suficientemente finos. Dos mediciones de una misma magnitud, siempre muestran alguna diferencia si son suficientemente finas.

Y así sucederá cada vez, **porque es inherente al proceso de medición**, que cada vez que el operador realiza una medición, obtiene un valor particular, X_1 , X_2 , …, X_i , …, todos diferentes entre sí (si todo anda bien, las diferencias son pequeñas).

> Nota: Infinidad de pequeñas perturbaciones al azar.
>
> Un razonamiento ingenuo podría sugerir que si se repite exactamente de la misma manera el mismo procedimiento con los mismos objetos, deben suceder exactamente las mismas cosas, desarrollarse exactamente los mismos movimientos, con exactamente los mismos valores de todas las variables involucradas. Este razonamiento es ingenuo porque nunca se podrán garantizar exactamente las mismas condiciones de partida más allá de cierto margen de incerteza, ni se podrá evitar la influencia de infinidad de perturbaciones imposibles de controlar o detectar por su pequeñez.
>
> Por otra parte la ciencia es una construcción colectiva: no interesa tanto el valor, por ejemplo, de la carga del electrón, que obtiene *un observador aislado*, con un determinado instrumento, sino que interesan todos los valores que pueden obtener *otros observadores*, en otros lugares, con otros instrumentos sujetos a las *mismas especificaciones de construcción y procedimiento*.
>
> De manera que está claro, por la misma naturaleza de construcción colectiva del conocimiento científico, que nunca se podrán especificar ni controlar todas las infinitas fuentes de pequeñas perturbaciones que hacen que los resultados experimentales que se esperan iguales, examinados con suficiente detalle, siempre deban tener pequeñas diferencias entre sí.

De manera que el operador nunca llegará a un número definitivo tal que él pueda decir: “éste es el verdadero valor exacto de X”.

Si todo anda bien, él podrá llegar a asegurar que cualquier medición realizada con cuidado con ese equipo (o con otro del mismo tipo sujeto a las mismas especificaciones) caerá dentro de un intervalo que él determinará de la manera antes enunciada: $X \pm \Delta X$.

El "verdadero valor", exacto, de alguna magnitud física X, sólo es una idealización imposible de determinar experimentalmente, que en general no tiene sentido físico.

Nota: Número exactos y números medidos.

En Matemática existen los números exactos. Cuando en un problema matemático se habla de un cilindro de 3 cm de diámetro, ese valor significa lo mismo que 3,0000..., con infinitos ceros decimales. Para que la calculadora opere con este número, es lo mismo que el operador presione solamente la tecla del número 3, o que lo haga siguiéndola de varios ceros después del punto decimal.

Pero en un taller mecánico un objeto de hierro cilíndrico de 3 cm de diámetro, puede ser un objeto que se va a usar para martillar un clavo, o un eje que debe girar suavemente dentro del buje que lo aloja.

Es claro que el objeto para martillar, puede tener 2 o 3 milímetros de más o de menos, sin que importe especificarlo, y lo mismo será catalogado como de 3 cm de diámetro. Si alguien dice que tiene 3 cm de diámetro, no informa sobre cuántos mm más o menos mide el diámetro, porque probablemente no los midió, dado que no tienen importancia. Puede tener 2 o 3 milímetros de más o menos, sin que importe especificarlo, y lo mismo será catalogado como de 3 cm de diámetro.

Pero el eje que debe entrar exacta y suavemente dentro de su alojamiento debe tener un valor exacto de cm, de mm, y de décimos de mm, es decir que su diámetro debería ser algo como 3,00 cm. Cuántos más ceros le agregue a la derecha de la coma, más perfecta deberán ser la manufactura y la medición del objeto.

Esto significa que en un taller mecánico tanto como en cualquier laboratorio de ciencia, sólo se escriben las cifras que realmente se leen.

No se pueden agregar ceros a la derecha de la coma decimal, a menos que sean cifras leidas. Sólo se agrega un cero si se ha medido que vale cero.

Estas cifras realmente leídas se denominan **cifras significativas** (más delante ampliaremos el tema).

Y un objeto real, cuyo diámetro sea exactamente 3 cm, es decir el número matemático 3, seguido de infinitos ceros, directamente es un objeto que no existe. No tiene ningún sentido pensar que alguna cosa tiene exactamente esa medida – y si por alguna operación de magia pudiese existir, *no podríamos saberlo*, porque no habría forma de medir los infinitos ceros.

De manera que si el operador supusiese que tiene sentido atribuirle un valor "verdadero", X_v, a la magnitud que está midiendo, entonces podría decir que cada valor obtenido, X_i, está afectado de cierto error, $\varepsilon_i = X_i - X_v$.

Este "error", que más bien que un error es una manifestación de la inevitable dispersión de las lecturas inherente a la naturaleza misma del proceso de medición, se denomina habitualmente "error accidental de medición", o "error de medición por azar".

Tal vez sería más correcto denominar, por ejemplo, "desviación experimental", y no error experimental a la diferencia $X_i - X_v$. Pero ahora debemos notar que independientemente del nombre que se le de, *este cálculo en realidad no se puede hacer*, porque **nunca se conocerá** el valor X_v .

De manera que lo que el operador hace es calcular el *valor medio* de todos los X_i obtenidos, y tomarlo como lo mejor que él puede determinar con su medición, en su búsqueda del valor ideal X_v:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \mathbf{L} + X_N}{N}}$$

Una vez calculado este valor medio $\overline{X}$, el operador puede calcular las desviaciones de cada valor X_i respecto de él:

$$\varepsilon_i = X_i - \overline{X}$$

El operador encontrará tanto desviaciones positivas como negativas repartidas al azar, y luego de realizar una gran cantidad de mediciones, encontrará que los valores que obtiene se distribuyen al azar dentro de un intervalo, con mayor concentración cerca del valor medio del intervalo, $\overline{X}$.

Con diversos procedimientos que luego veremos, el operador determinará el ancho ΔX del intervalo tal que todos, o la gran mayoría, de los valores X_i caen entre $\overline{X} - \Delta X$ y $\overline{X} + \Delta X$ (ver figura 1).

Este ancho ΔX es lo que se denomina intervalo de incerteza, y se utiliza para enunciar el resultado de la medición:

$$\boxed{(\overline{X} \pm \Delta X)\ U}$$

Y es una SUPOSICIÓN FUNDAMENTAL de la ciencia que si **otros operadores miden la misma magnitud con otros instrumentos** —*todos libres de errores sistemáticos*— ellos obtendrán a su vez a otros valores X_i', distribuidos en un intervalo de ancho $\Delta X'$ en la vecindad de un valor medio $\overline{X'}$ de manera tal que,

> Tanto el valor $\overline{X}$ estará dentro del intervalo de incerteza de $\overline{X'}$,
>
> como el valor $\overline{X'}$ caerá dentro del intervalo de incerteza de $\overline{X}$.

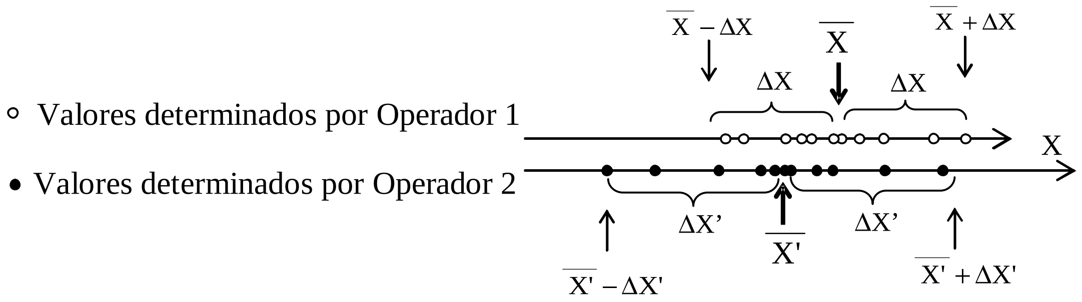


Figura 1. Se muestran dos posibles conjuntos de puntos indicativos de valores medidos de una magnitud X. Se ha adoptado el criterio (en el Apéndice Matemático se mencionan otros criterios posibles) de que el semiancho del intervalo de incerteza se calcula para que <u>todos</u> los valores medidos correspondientes estén dentro de él.

Y es de esperar que al transcurrir el tiempo, con la evolución de las técnicas y de los instrumentos, las sucesivas mediciones de una magnitud con instrumentos cada vez mejores lleven a valores $\overline{X}$ con un intervalo de incerteza ΔX cada vez menor, *tal vez en algunos casos* con $\overline{X}$ aproximándose cada vez más (sin alcanzarlo nunca) a un hipotético valor verdadero X_v.

Exactitud y precisión.

Se denomina **precisión** a la propiedad de los instrumentos de repetir valores muy parecidos al realizar mediciones de una misma magnitud.

De manera que un instrumento es más preciso que otro si produce valores con un menor intervalo ΔX de dispersión, al medir la misma magnitud.

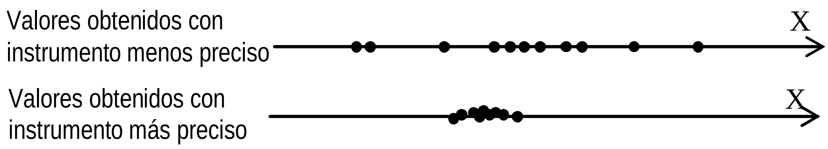


Figura 2. Ilustración típica de dos conjuntos de resultados de la medición de X obtenidos con instrumentos de diferente precisión.

La precisión es una cualidad importante de un instrumento, pero no la única.

Se denomina **exactitud** a la propiedad de dar valores muy cercanos al que se considera valor verdadero — denominando así ahora al valor obtenido combinando todos los otros instrumentos de buena calidad que se utilizan para comparación.

Se espera de los instrumentos que sean todo lo precisos y exactos que sea posible.

La cualidad de preciso se determina fácilmente repitiendo varias veces una medición: si se repiten los valores con suficiente aproximación estamos ante un instrumento preciso.

Pero no podremos saber si es exacto hasta que recurramos a patrones de calibración, o hasta que comparemos su lectura con la que arrojan otros instrumentos especialmente calibrados con dichos patrones.

Un instrumento poco preciso no puede ser muy exacto, y obliga a muchas repeticiones para obtener un buen promedio de valores.

Un instrumento preciso que no es exacto está afectado de algún error sistemático, y hasta que eso se descubra y se remedie puede generar graves errores pues induce a una confianza excesiva en resultados que en algún momento se descubrirá que son erróneos.

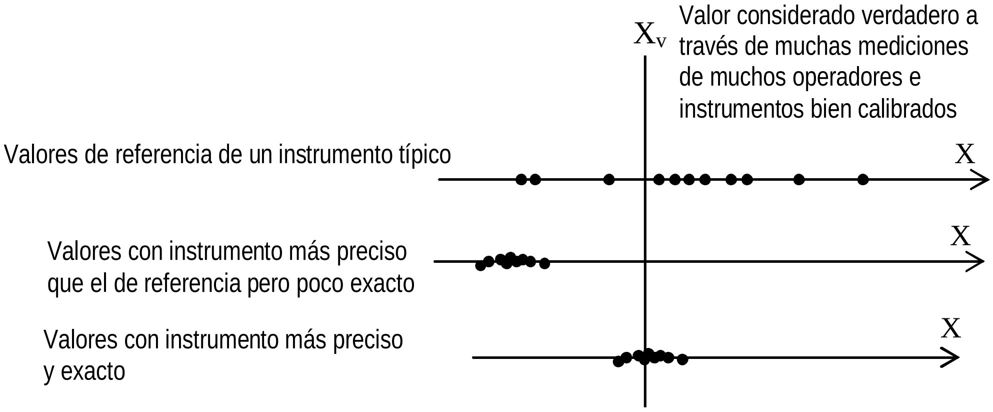


Figura 3. Ilustración típica de resultados de la medición de X obtenidos con instrumentos de diferente precisión y exactitud.

Apreciación del instrumento

Se denomina *apreciación* de un instrumento a la **menor variación de la cantidad medida que puede detectar**, lo que en la práctica suele ser lo mismo que la *menor subdivisión de la escala*.

La finura de la subdivisión de la escala de los buenos instrumentos no suele ser caprichosa, sino que el fabricante dentro de lo posible subdivide la escala en función de la precisión y la exactitud del instrumento para que se obtenga el mejor aprovechamiento del mismo.

En función de eso es que la apreciación del instrumento es un buen punto de partida para comenzar a definir el intervalo de incerteza que afectará a una medición, como veremos seguidamente al analizar algunos ejemplos prácticos.

A continuación se desarrollan los detalles prácticos más importantes de estos temas, analizando los diferentes tipos de mediciones que se hallarán en los trabajos de laboratorio de Física. Las ideas básicas que se presentarán se generalizan directamente luego a cualquier otro tipo de medición.

MEDICIÓN DE LONGITUDES.

Una regla común o cinta métrica, utilizada para medir longitudes, suele estar graduada en cm, y tener indicadas las subdivisiones en mm.

En este caso la apreciación A es 1 mm, y si la cinta es de buena calidad, la comparación con algún patrón de buena calidad nunca debería diferir en una fracción apreciable de esta subdivisión, es decir que la diferencia debería ser bastante menor que 1 mm.

Instrumentos más precisos, como el calibre o vernier, cuentan con una graduación accesoria que permite leer décimas de mm. En ese caso A = 0,1 mm.

Ejemplo 1: medición aparentemente exacta

Éste es el caso más fácil, en el que se mide una longitud bien definida, a la cual la cinta métrica pueda superponerse muy exactamente, sin problemas para establecer coincidencias en los extremos.

Como punto de partida *el operador siempre debe desconfiar de todo*: desconfía de la escala y la compara con otras. Cuando se siente satisfecho de la calidad de la misma, examina el objeto a medir para detectar si tiene irregularidades, si es blando, si se deforma, si se tuerce, si se encoge etc. Cualquier problema detectado determinará que se decidan otros criterios para calcular la incerteza – lo cual no corresponde en este momento inicial.

Si todo está en orden, entonces se puede proseguir como se indica.

En este caso se hace coincidir el origen de la escala con un extremo del objeto, y se lee la división de la escala en la cual cae el otro extremo (figura 4).

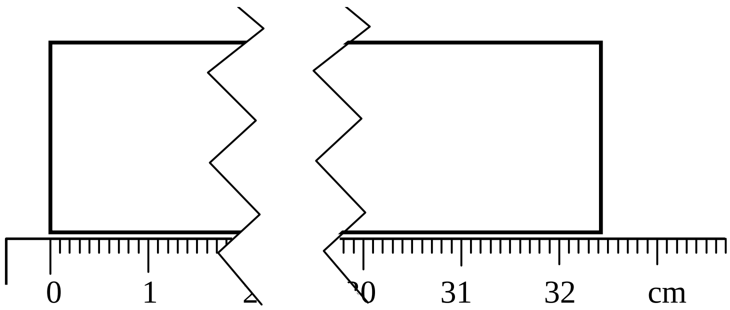


Figura 4. Medición de la longitud de un objeto bien derfinido que no presenta problemas para superponerle la escala.

Se considera que al repetir la medición se llegará indudablemente al mismo valor, es decir no habrá incerteza en las cifras leídas.

Es decir, si por ejemplo el operador lee L = 32,4 cm, está diciendo que con un extremo del objeto en el cero, el otro cae entre el 32,4 y el 32,5, y dadas las características del objeto él se atreve a afirmar que cualquier otro operador que mida el mismo objeto con una cinta de buena calidad, si lo hace con cuidado encontrará exactamente eso mismo sin posibilidad de duda. Él mismo repite la operación varias veces para cerciorarse, y la hace repetir por un amigo, y a pesar de las pequeñas variaciones individuales, el extremo del objeto nunca se observa fuera del intervalo entre 32,4 y 32,5.

En estas condiciones está claro que el valor es 32,4 cm, y que está afectado por la incerteza en todos los decimales que corresponderían a las subdivisiones más finas, que no existen, es decir, todas las fracciones de mm: tanto podría medir 32,43 como 32,48, o 32,476, o cualquier otra colección de decimales que se nos ocurriese que estuviese entre 32,4 y 32,5.

Esto podría ser expresado diciendo:

$$L = (32{,}45 \pm 0{,}05)\ \text{cm}$$

De manera que éste es el criterio usual para este tipo de mediciones:

Criterio 1:

Se toma la **incerteza igual a la mitad de la apreciación**:

$$L = \text{valor leído} \pm \frac{A}{2}$$

Ahora bien, dado que esto implica la incomodidad de expresar un valor intermedio entre las graduaciones (leo 32,4 pero debo escribir 32,45), y dado que muchas veces no existe tanta seguridad de que todos los observadores van a coincidir exactamente en la subdivisión que se lee, es posible un segundo criterio, un poco más laxo.

Criterio 2.

Se toma la **incerteza igual a la apreciación**.

$$L = \text{valor leído} \pm A$$

Para nuestro ejemplo, esto sería: L = (32,4 ± 0,1) cm. Menos preciso pero más simple.

Criterio 3

En algunos casos especiales el operador considera que puede subdividir mentalmente la escala un poco más, y estimar una cifra decimal más. En este caso se está considerando que **la incerteza es alguna fracción de A**.

Por ejemplo, en el caso antes expuesto, en el que el valor medido está entre el 32,4 y el 32, 5, el operador podría considerar que él distingue con seguridad que el valor está antes de la mitad del intervalo, como si la escala estuviese graduada cada ½ mm. En ese caso él podría decir que L vale 32,42 o 32,43, por ejemplo, con una incerteza de ± 0,03 cm, o algunos valores parecidos.

Este criterio, de considerar la incerteza menor que ½A sólo debe utilizarse en casos especiales, cuando haya justificación para ello, y no se recomienda en general.

Ejemplo 2: medición con problemas de paralaje o similares

Este tipo de medición, muy frecuente, es aquél en el cual hay problemas para ubicar la cinta métrica exactamente sobre el objeto, y alguno, o ambos, de los extremos queda separado de la cinta, siendo necesario leer el valor correspondiente desde cierta distancia, y tomando ciertos recaudos.

Cuando se debe leer sobre una escala la ubicación de un objeto que está a cierta distancia delante de ella (o detrás), se tiene el problema de que observadores ubicados en diferentes lugares, verán diferentes ubicaciones del objeto sobre la escala, fenómeno que se conoce con el nombre de **"paralaje"** (figura 5). Al leer la subdivisión de la escala sobre la que ve coincidir el extremo del objeto, el observador, si no advierte que está ubicado inapropiadamente, podrá enunciar un valor incorrecto.

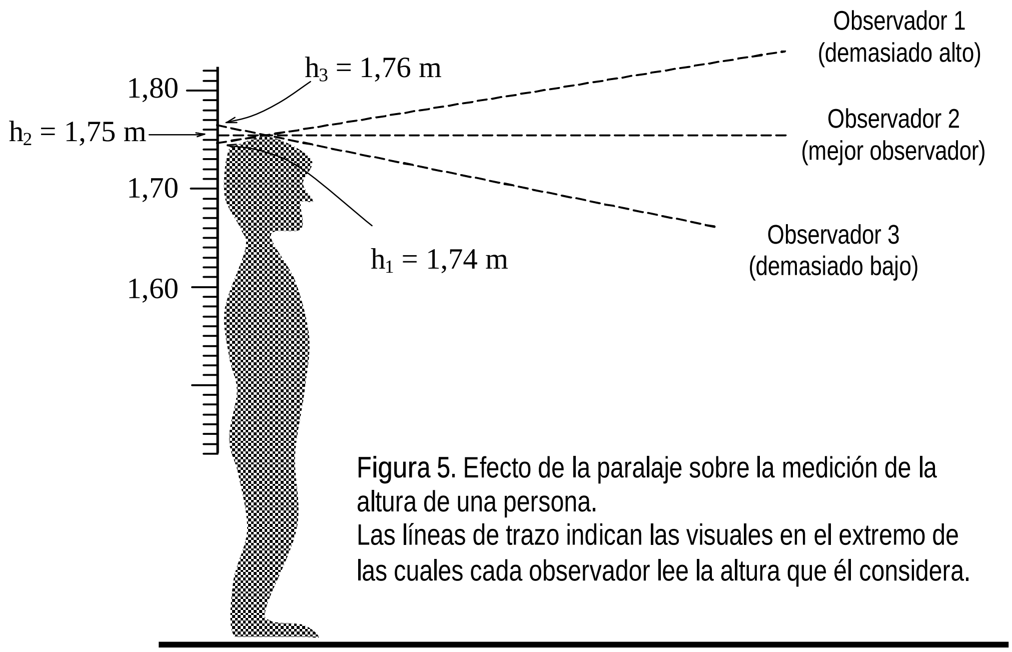


Figura 5. Efecto de la paralaje sobre la medición de la altura de una persona.
Las líneas de trazo indican las visuales en el extremo de las cuales cada observador lee la altura que él considera.

Como puede advertirse en la figura 5, para leer la división de la escala que corresponde a la longitud de un objeto, el observador deberá ubicarse con la visual lo más perpendicularmente posible a la escala. Cualquier desviación de la perpendicular repercutirá en una variación del valor que debe leerse. Esta variación será proporcional a la separación entre el objeto y la escala, y podrá afectar a un extremo del objeto o a ambos, según sea el caso.

De manera que el operador ya no podrá considerar que la incerteza es A, o A/2, sino que deberá establecer algún criterio que dependerá del caso. Por ejemplo el observador puede moverse en torno a la posición de lectura que considera correcta, y determinar en cuántas subdivisiones de la escala se modifica su lectura cuando él se aparta (hasta cierta distancia prudente) de la posición ideal. Enunciando que estas subdivisiones de la escala constituyen el intervalo de incerteza, él podrá garantizar que cualquier observador que no se aparte de la posición de lectura ideal más allá del margen prudente que él consideró, va a leer valores dentro de ese intervalo de incerteza.

Así por ejemplo al determinar la longitud de un péndulo, que debe tomarse desde el centro de oscilación hasta el *centro del objeto* suspendido, ya no se tiene la posibilidad de superponer una cinta métrica sobre un dibujo plano, y es necesario considerar este error. Así es posible que, tomando todos los cuidados posibles, con una cinta de apreciación 1 mm, el operador considere que puede garantizar la longitud dentro de una incerteza del orden de ± 2 mm.

Vale aclarar que el error de paralaje no sólo afecta a las mediciones de longitud, sino también a todas las lecturas de un indicador de aguja sobre una escala.

Un método que ayuda a disminuir esta incerteza es colocar la escala de medición pegada a un espejo, de manera que la lectura debe hacerse mientras se ve el objeto cuya posición se mide superpuesto con su imagen. Esto garantiza que la visual es perpendicular a la escala. Las escalas de muchos instrumentos de aguja de buena calidad tienen incorporado este espejo, y la lectura debe efectuarse cuando la aguja se ve superpuesta con su imagen.

MEDICIÓN DE TIEMPOS

La medición de la duración de un intervalo de tiempo implica la coincidencia de un instante inicial con una lectura de tiempo en un reloj (puede ser cero si se dispara un cronómetro en ese instante), y la coincidencia del instante final con otra lectura de tiempo.

En reloj común de aguja (analógico), la apreciación puede ser 1 segundo, mientras que en un cronómetro de aguja puede ser 0,2 s. Por otra parte actualmente son muy comunes los relojes digitales con apreciación 1 minuto, y los cronómetros digitales con apreciación 0,01 s.

Nuevamente hay que deshacerse de la idea ingenua de que estos instrumentos son exactos, sin incerteza. La posibilidad de leer un número en un visor elimina la dificultad de decidir sobre qué división de una escala se ve un objeto, pero los relojes no marchan todos exactamente al mismo ritmo, y aunque esto no introduzca diferencias detectables en el curso de un experimento, es claro que el operador tiene cierto "tiempo de reacción" que introduce demoras y variaciones en los procesos de iniciar y detener el cronómetro.

> Nota:
>
> El tiempo de reacción es el tiempo que una persona demora en darse cuenta, pensar y actuar en respuesta a una situación; por ejemplo, activar y detener el cronómetro. Este hecho introduce un error en la medición del tiempo que supera ampliamente a la apreciación del instrumento para nuestro caso.

Medición de un intervalo de tiempo.

De manera que, suponiendo que se utiliza un buen cronómetro, de A = 0,01 s, para medir la duración de un intervalo de tiempo, de ningún modo se podrá suponer que ése es el valor de la incerteza, porque eso equivaldría a afirmar que si el operador (el mismo u otro) repite el experimento, debe volver a obtener exactamente el mismo número coincidiendo hasta las centésimas. Basta con un par de pruebas para convencerse definitivamente de que eso no es así.

Con un instrumento de *tanta precisión*, resulta que los que determinan la incerteza son el tiempo de reacción humano, y/o la naturaleza del experimento.

Para determinar la incerteza en estos casos no queda más remedio que realizar un gran número N de mediciones sucesivas (al menos 10), repitiendo el proceso idénticamente, y a partir de los valores registrados t_i , determinar el valor medio $\overline{t}$, y el semiancho Δt de la zona en la que caen todos (o determinado porcentaje grande) de los valores registrados (como en la figura 1).

En el Apéndice Matemático hay una expresión analítica que permite obtener la incerteza Δt, a partir de criterios estadísticos. Se la denomina "desviación cuadrática media", o "desviación estándar".

Medición de períodos de oscilaciones

En el caso en que se debe determinar el período T de un fenómeno oscilatorio, es decir un intervalo de tiempo que se repite periódicamente de manera idéntica, se puede disminuir mucho la incerteza si se mide, de la manera indicada en el párrafo anterior, un intervalo consistente en un número grande N_T de períodos sucesivos.

En este caso, dado que la naturaleza del fenómeno garantiza que los sucesivos períodos son todos de idéntica duración, si se mide N veces un intervalo que contenga N_T de ellos (cuya duración deberá ser $t = N_T\ T$), luego, a partir de los valores t_i se puede determinar el valor medio $\bar{t}$ con la correspondiente incerteza Δt como de describió en el punto anterior.

Dado que el intervalo medido es una sucesión de N_T períodos idénticos, está claro que dividiendo $\bar{t}$ por N_T se tendrá el período T, y dividiendo Δt por N_T se tendrá la correspondiente incerteza en el valor de T:

$$T = \frac{\bar{t}}{N_T} \pm \frac{\Delta t}{N_T}$$

Hay experimentos que se controlan automáticamente, sin intervención humana. En estos casos las incertezas pueden reducirse mucho más que 0,01 s, pero no eliminarse. No nos ocuparemos aquí de ellos.

MEDICIÓN DE MASAS O PESOS

Masa y peso son dos conceptos bien distintos, pero que en la práctica se determinan con el mismo aparato, la balanza, haciendo intervenir explícita o implícitamente el campo gravitatorio según la relación $P = m\,g$.

La balanza es el nombre general para instrumentos muy diferentes, tales que todos ellos determinan la masa a partir de mecanismos sensibles al peso del objeto.

Y según el tipo de balanza que se utilice, y la precisión que se desee alcanzar, la determinación de la masa de un cuerpo podría requerir de un conjunto complicado de operaciones y correcciones. Pero en nuestro caso ignoraremos las posibles complicaciones, porque nos bastará con utilizar una balanza digital cuyas exactitud y precisión serán muy superiores a lo que necesitamos.

Sólo tendremos en cuenta las siguientes recomendaciones básicas.

Medición de la masa con balanza digital

En la balanza digital es posible determinar la masa colocando el cuerpo sobre el platillo y simplemente leyendo el visor. La incerteza se considerará la unidad de la última cifra que registre el visor.

Medición del peso con la balanza digital

La balanza digital podría estar calibrada para medir directamente el peso, que es aquello a lo que es directamente sensible. Pero dado que siempre están calibradas para medir la masa, si se desea conocer el peso se debe conocer el campo gravitatorio, g , del lugar, y aplicarse la relación

$$P = m\,g$$

Esto se denomina "medición indirecta": P se *calcula* a partir de valores de otras variables (m y g en este caso), que son los que se miden realmente.

En este caso no vamos a medir el campo gravitatorio, sino que, para Córdoba podremos tomar $g = (9{,}79 \pm 0{,}01)$ N/kg.

Conociendo las incertezas Δm y Δg en las variables que se midieron directamente, para determinar la incerteza que afecta al peso, debemos aplicar una fórmula que corresponde, en este caso, al producto de variables medidas directamente (ver más adelante, "incerteza en mediciones indirectas").

Sobre la balanza digital vale saber que.

1) Estas balanzas son sensibles al peso del objeto, y por lo tanto su indicación depende de la gravedad del lugar, y de la horizontalidad de la superficie sobre la que se apoya. Pero al instalarse la balanza en un determinado lugar, se la somete a un proceso de calibración que tiene en cuenta el valor particular de g en el lugar, y a una regulación se su horizontalidad. Una balanza fabricada y calibrada en el lugar A, no garantiza todas sus cifras en otro lugar B, hasta que se la calibre especialmente allí.

2) Deben ser tratadas con suavidad. Los objetos deben depositarse sin golpear sobre el platillo. Y tienen cierta capacidad máxima de peso que no debe ser superada.

3) Si se quisiera hacer una determinación muy exacta, podría ser necesario considerar una corrección que tenga en cuenta el empuje hidrostático que el cuerpo recibe del aire circundante – no es nuestro caso.

Medición del peso (y de cualquier fuerza) con dinamómetro de resorte

Dispondremos de dinamómetros de resorte para medir fuerzas en general.

Estos dinamómetros tienen en general una apreciación de 0,05 N, y un rango máximo de aproximadamente 6 N.

Hay que tener en cuenta las siguientes cuatro cosas importantes con estos dinamómetros.

1) Calibración del cero.

En el extremo posterior estos instrumentos tienen una corredera que se puede ajustar en la posición que se elija para que el instrumento marque cero cuando no se le aplica fuerza.

Este ajuste es necesario porque el peso de las partes del dinamómetro afecta a la indicación de diferente manera según la inclinación que se de al instrumento para medir fuerzas verticales, horizontales, o de distinto grado de oblicuidad.

De manera que para medir fuerzas horizontales, previamente se debe colocar horizontal el intrumento, y, sin aplicarle fuerzas, regular la corredera hasta que marque cero.

Cuando se vaya a cambiar para medir una fuerza vertical, nuevamente se regula el cero con el instrumento vertical sin fuerzas. Etc.

Vale notar que la lectura puede efectuarse tanto con una marca que tiene hecha a tal efecto la cubierta del dinamómetro, como también con el borde mismo de la cubierta. Cualquiera de ambas sirve para determinar el valor leído, pero hay que tener cuidado de no confundirse. La referencia que se use para calibrar el cero es la misma que debe usarse para todas las lecturas.

2) Considerar la paralaje.

La separación entre la cubierta y la escala que está pegada sobre el cilindro deslizante, da lugar a problemas de paralaje en el momento de leer los valores. Debe cuidarse la ubicación desde la cual se lee.

3) Evitar atascamientos

El cilindro deslizante que registra el estiramiento del resorte suele atascarse levemente por problemas de rozamiento. Esto aumenta si no se alinea bien la cubierta con el cilindro deslizante. En el momento de hacer una lectura se debe mover levemente la cubierta exterior para asegurar que está bien alineada, mientras se le dan unas golpecitos suaves para liberar posibles atascamientos.

4) Incerteza

Siendo la apreciación A = 0,05 N, siguiendo el Criterio 1 de medición de longitudes, deberíamos definir el intervalo de incerteza como ± 0,025 N. Pero bastan unas pocas pruebas para poner de manifiesto que el instrumento no tiene tanta precisión, y en general se encuentra acertado utilizar el Criterio 2, y establecer las lecturas de fuerza con un intervalo *no menor que* ± 0,05 N.

Teniendo en cuenta estas recomendaciones, el peso se lee directamente, con la precaución de calibrar previamente el cero del dinamómetro para mediciones verticales.

Medición de la masa con el dinamómetro

Si se mide directamente el peso de un cuerpo con el dinamómetro, su masa se determina indirectamente con la expresión:

$$m = \frac{P}{g}$$

En este caso la incerteza Δm se obtiene a partir de la fórmula para la correspondiente medición indirecta (incerteza del *cociente* de valores medidos directamente).

MEDICIONES INDIRECTAS

Cuando una cantidad X se determina a través de una fórmula en la cual intervienen otras cantidades a, b, c,…, etc., cada una de las cuales se mide directamente con algún instrumento, decimos que a, b, c,…, etc., son resultado de **mediciones directas**, mientras que X = f(a, b, c,…) es resultado de una **medición indirecta.**

Por ejemplo:

a) Si determinamos la superficie de un rectángulo: S = a b, midiendo sus lados a y b, y luego multiplicándolos, podemos decir que hemos medido directamente sus lados, e indirectamente su superficie.

b) Si determinamos la densidad de un líquido: δ = masa / volumen, midiendo directamente su masa en una balanza, su volumen en una pipeta, y luego dividimos ambos, entonces su densidad resulta medida indirectamente. Pero si determinamos la densidad del mismo líquido con un densímetro, entonces la habremos medido directamente.

Incerteza en mediciones indirectas - Propagación.

Cuando se determina una magnitud X que es función de otras magnitudes a, b, …, etc., que se miden directamente con incertezas Δa, Δb, …, etc., se dice que estas incertezas se **propagan** según expresiones que veremos ahora, determinando la incerteza ΔX.

La forma en que se propagan las incertezas depende, por supuesto, de las relaciones entre las variables, y aquí veremos las expresiones necesarias para la mayoría de los casos prácticos que nos interesan. Vale aclarar que éstos contituyen los cálculos más simples y rudimentarios, válidos solamente para los casos típicos en los que el intervalo de incerteza es una fracción pequeña del valor de la variable. Existen teorías más sofisticadas y precisas, que no veremos aquí.

Suma y resta de variables medidas directamente

Tanto en el caso X = a + b, como en el caso X = a – b, se puede demostrar fácilmente que:

$$\boxed{\Delta X = \Delta a + \Delta b}$$

Es decir, tanto para la suma como la resta, la incerteza del resultado es la suma de las incertezas de los sumandos.

Producto y cociente de variables medidas directamente

Para estos casos es útil definir la incerteza "relativa", que se obtiene dividiendo la incerteza por el valor absoluto de la variable, y la simbolizaremos con la letra delta minúscula (δ):

$$\delta X = \frac{\Delta X}{|X|}; \qquad \delta a = \frac{\Delta a}{|a|}; \qquad \delta b = \frac{\Delta b}{|b|}; \qquad \text{etc.}$$

Tanto para el producto, X = a b , como para el cociente, X = a / b , puede mostrarse que, mientras las incerteza relativa sea pequeña (la incerteza de cada número pequeña comparada con el número), se cumplirá δX = δa + δb, es decir:

$$\boxed{\frac{\Delta X}{|X|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}}$$

Es decir, tanto para un cociente como para un producto, tendremos que, sumando las incertezas relativas se obtiene la incerteza relativa del resultado, y luego, si se desea calcular la incerteza ΔX (que podríamos denominar "absoluta"), se multiplica por el valor absoluto de X:

$$\boxed{\Delta X = |X|\ \delta X}$$

Variable medida directamente que se eleva a una potencia

El caso $X = a^n$ se puede tomar como un caso de producto: X = a·a·a·…a, n veces.

De manera que según la regla del producto debemos sumar n veces la incerteza relativa de a, para obtener la incerteza relativa de X: δX = n δa. Es decir:

$$\boxed{\frac{\Delta X}{|X|} = n\frac{\Delta a}{|a|}}$$

La expresión también es válida si n es un número fraccionario. De manera que cubre el caso tanto de potencias como de raíces.

En una medición directa las cifras significativas son las que se leen. En una medición indirecta se realizan cálculos en los cuales se fabrican muchas cifras (tantas como muestre la calculadora). Lo que permite decidir cuántas de esas cifras son significativas y deben escribirse, es el conocimiento de la incerteza (absoluta) de un resultado

Veamos dos ejemplos resueltos para revisar estos conceptos, e introducirnos más en el tema **cifras significativas**.

Ejemplo 1

El peso de un cuerpo medido con el dinamómetro de resorte de que se dispone en los prácticos resulta P = (1,52 ± 0,05) N.

Calcular la masa de dicho cuerpo.

Resolución.

Aplicamos $m = \dfrac{P}{g}$, con el valor de g antes mencionado (g = (9,79 ± 0,01) N/kg).

$$m = \frac{1{,}52}{9{,}79} = 0{,}15526\ldots \text{ kg}$$

La calculadora nos muestra 9 decimales (y podría mostrar más), pero es claro que sólo algunos tienen significado y deben ser registrados. Para saber cuáles son debemos calcular la incerteza. Para calcular la incerteza no interesa conocer muchas cifras porque la incerteza siempre es un número aproximado, y lo podemos redondear a sólo una cifra significativa.

Aplicamos la incerteza del cociente o producto, para lo cual debemos calcular los valores relativos:

$\delta P = \dfrac{0{,}05}{1{,}52} = 0{,}033 \cong 0{,}03$; $\delta g = \dfrac{0{,}01}{9{,}79} = 0{,}001$;

Entonces $\delta m = 0{,}033 + 0{,}001 = 0{,}034 \cong 0{,}03$ (vemos que la incerteza en g prácticamente no influye en este caso)

Ahora podemos calcular la incerteza absoluta en m: $\Delta m = 0{,}03 \times 0{,}15 = 0{,}0045 = 0{,}005$ kg

(Notar que si hubiésemos conservado más cifras, hubiésemos trabajado con $\Delta m = 0{,}034 \times 0{,}15526 = 0{,}00527$, y de todas maneras hubiésemos redondeado a $\Delta m \cong 0{,}005$ kg)

Con esto podemos decidir cuáles son las cifras de m que tienen significado. Evidentemente los submúltiplos de gramo no tienen significado aquí:

$$m = (0{,}155 \pm 0{,}005) \text{ kg} = (155 \pm 5) \text{ g}.$$

Ejemplo 2

Supongamos que este cuerpo cuya masa hemos determinado en el Ejemplo 1, viaja a una velocidad v = (5,53 ± 0,05) m/s.

Calcular su energía cinética con la correspondiente incerteza.

Resolución

Debemos aplicar $E_c = \dfrac{m\,v^2}{2}$

$$E_c = \frac{0{,}155 \times 5{,}53^2}{2} = 2{,}37002\ldots \text{ J}$$

Veamos la incerteza para conocer cuáles cifras se deben conservar. Tenemos productos y cocientes (incluida la potenciación), y corresponde sumar todos los errores relativos.

$\delta m = 0{,}03$; $\delta v = \dfrac{0{,}05}{5{,}53} = 0{,}009 \cong 0{,}01$; el número 2 es un factor exacto, sin incerteza ($\delta 2 = 0$).

$\delta E_c = 0{,}03 + 2 \times 0{,}01 = 0{,}05$

Entonces $\Delta E_c = 0{,}05 \times 2{,}37 = 0{,}118 \cong 0{,}1$

De manera que sólo el primer decimal de E_c tiene sentido, y debemos redondear $2{,}37 \to 2{,}4$.

Es decir:

$$E_c = (2{,}4 \pm 0{,}1)\ \text{J}$$

Notar que si quisiéramos conservar un decimal más, diríamos: $E_c = (2{,}37 \pm 0{,}12)$ J.

Nuestro primer resultado dice que E_c puede estar entre 2,3 y 2,5. El resultado con un decimal más dice que E_c puede estar entre 2,25 y 2,49. Vemos que los dos resultados dicen esencialmente lo mismo, y esto significa que no ganamos nada agregando un decimal – y que agregando decimales que en realidad carecen de significado sólo se obtiene una falsa sensación de precisión.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

Se denominan **cifras significativas** a aquellas que tienen realmente algún significado experimental, o sea, las que el operador juzga seguras más una que se puede estimar con cierto grado de aproximación.

Y sólo se escriben para expresar valores experimentales **las cifras significativas**, más los ceros que se pueden agregar a la izquierda de estas cifras, cuando son necesarios para ubicar la coma decimal.

El dígito "0" (cero), puede o no ser cifra significativa, dependiendo de la ubicación en el número.

Por ejemplo si 10,06 mL es la lectura de un volumen en una bureta, ambos son ceros medidos y por lo tanto son cifras significativas. Ese número contiene cuatro cifras significativas, y aunque se lo exprese como 0,01006 L el número de cifras significativas sigue siendo cuatro, ya que el cero agregado a la izquierda del 1, sólo tiene la función de ubicar la coma decimal.

Es decir que siempre se pueden agregar ceros a la izquierda de un número para modificar la ubicación de la coma decimal, y ellos no se cuentan como cifras significativas.

En cambio para ubicar la coma decimal **no deben escribirse ceros a la derecha** de las cifras significativas. Para modificar la ubicación de la coma en estos casos, **se debe recurrir a la notación exponencial**.

Por ejemplo si se desea expresar en miligramos la masa m = 24,0 g. Este número ha sido escrito por alguien que indica que ha medido 24 gramos y 0 decigramos – y no ha medido nada más: **no sabe si hay o no hay** centigramos ni miligramos más allá de lo indicado.

Ahora bien, para expresar este número en mg hay que multiplicar por 1000, lo cual, matemáticamente, debería ser 24000. Pero experimentalmente el número escrito así sería una indicación de que se han leído tres ceros: decigramos, centigramos y miligramos, lo cual es falso. Como los dos últimos ceros que agregaríamos en realidad no han sido leídos, no son significativos, y **no deben ser escritos**.

El número deberá escribirse conservando las cifras significativas, que son las que indican lo que ha sido medido. Sería correcto escribirlo como $2{,}40\times10^4$ mg, o 240×10^2 mg, o de cualquier manera equivalente que tenga sólo las tres cifras significativas originales.

Reglas prácticas para la escritura de resultado experimentales

I.- Cuando se escribe el resultado de una medición en la forma ($X \pm \Delta X$), las dos cantidades, tanto X como ΔX se expresan con la misma unidad y estructura decimal (el mismo número de decimales después de la coma).

Por ejemplo, si X = 2,324 kg, y ΔX = 5 g, se escribe (2,324 ± 0,005) kg, o bien (2324 ± 5) g, pero no se escribe (2,324 kg ± 5 g)

II.- Un número que expresa un intervalo de incerteza, se considera en sí mismo suficientemente incierto como para que deba expresarse con sólo 1 cifra significativa – excepcionalmente con 2.

Esto, junto con la regla I, dice que debe partirse del conocimiento de la incerteza, para determinar las cifras que deben escribirse de un resultado.

Por ejemplo, si en el ejemplo anterior, X = 2,324 kg, hubiese sido ΔX = 50 g, deberíamos haber tomado ΔX = 0,05 kg, o bien, 5×10^1 g, para tener una sola cifra en la incerteza. Según la regla I esto significa que X debería haberse escrito con sólo dos cifras decimales después de la coma:

$$(2{,}32 \pm 0{,}05)\ \text{kg}\ , \qquad \text{o bien} \qquad (232 \pm 5)\times10^1\ \text{g}$$

III.- Cuando un número es resultado de un cálculo o de una medición indirecta, es necesario descartar cifras para retener sólo las significativas. En stos casos se procede al **redondeo**.

Para redondear se debe incrementar en una unidad la última cifra que se retiene si la cifra que se descarta es 5 o mayor; en caso contrario, la cifra que se retiene no cambia.

Por ejemplo en el ejemplo anterior 2,324 se redondea a 2,32 , pero si hubiera sido 2,328 se hubiera redondeado a 2,33.

En sumas y restas, conviene redondear el resultado <u>después</u> de la operación matemática (es decir, sin redondear los sumandos individuales), y luego mantener tantos decimales como el número que tiene menos decimales.

$$50{,}1 + 1{,}36 + 0{,}518 = 51{,}978 = 52{,}0$$

Esto es un truco práctico que muchas veces equivale a aplicar la regla de la incerteza de la suma.

IV.- Todo resultado experimental debe expresarse con su incerteza. Cuando se omita la indicación del intervalo de incerteza, se sobreentenderá que éste es ± una unidad de la última cifra escrita.

V.- Los números enteros, o constantes naturales tales como π y e (base de los logaritmos naturales) para los cuales se conocen tantas cifras decimales como se desee, se pueden considerar

sin incerteza, a condición de que se los escriba con **suficientes decimales** como para que la unidad de la última cifra escrita constituya una variación tan pequeña que no influya en la incerteza del resultado que se calcula.

VI.- La incerteza relativa multiplicada por 100 constituye lo que se denomina "**incerteza porcentual**", que viene a ser una forma de abreviar "incerteza relativa porcentual".

El significado de cualquier porcentaje es reemplazar, en una fracción o relación, cuánto correspondería a un denominador igual a 100.

Todas las reglas establecidas para la incerteza relativa, valen para la relativa porcentual.

Por ejemplo:

"Para el producto de variables medidas directamente, la *incerteza porcentual* del resultado es igual a la suma de las *incertezas porcentuales* de los factores."

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Indique cuántas cifras significativas hay en cada uno de los números siguientes, suponiendo que están correctamente escritos.

a) 107,870

b) 1,0080

c) 22,400

d) 0,0010

e) 100000,00

f) $1{,}780\times10^{-5}$

g) $6{,}023\times10^{23}$

2.- Redondee cada número a la cantidad de cifras significativas que se indica.

a) 1,2367 a cuatro cifras.

b) 123,84 a cuatro cifras.

c) 0,1352 a tres cifras.

d) 2,398 a tres cifras.

e) 2,0051 a tres cifras.

f) 12389 a tres cifras

3.- Escriba cada respuesta con la cantidad correcta de cifras significativas:

a) 1,021 + 2,69 =

b) 12,3 – 1,63 =

c) $4{,}34 \times 9{,}2$ =

d) 0,06020 / 2,113 =

4. - Se pesó por adición una sustancia. El peso de la tara fue igual a 30,0000

± 0,0001 g. El peso del conjunto tara-sustancia fue igual a 30,2000

± 0,0001 g.

a) Exprese el peso de la sustancia con su incerteza.

b) ¿Cuál es la incerteza relativa % de la pesada de la sustancia?

5. - Para medir volúmenes con una bureta se efectúan dos lecturas, cada una de ellas afectada de un error de ± 0,01 mL. ¿Cuál será el volumen mínimo a medir, si se desea un error relativo porcentual no mayor que

0,1% ?.

6.- Se midieron las aristas a, b y c de un prisma rectangular de cobre, y sus valores son:

a = (0,220 ± 0.002) m

b = (0,350 ± 0.002) m

c = (1,020 ± 0.002) m

a) Calcule el volumen del prisma con su incerteza. Expréselo con el número correcto de cifras significativas.

b) ¿Cuál de las aristas debería medirse con mayor precisión para disminuir la incerteza en el volumen del prisma?

7.- Determinando las incertezas que sean necesarias exprese los resultados de las siguientes operaciones con el número correcto de cifras significativas.

a) 9,23 (±0,03) + 4,21 (±0,02) – 3,26 (±0,06) =

b) 91,3 (±0,1) × 40,3 (±0,2) / 21,1 (±0,2) =

RESPUESTAS

1.- a) 6 ; b) 5 ; c) 5 ; d) 2 ; e) 8 ; f) 4 ; g) 4 .

2.- a) 1,237 ; b) 123,8 ; c) 0,135 ; d) 2,40 ; e) 2,01 ; f) 124×10^2.

3.- a) 3,71 ; b) 10,7 ; c) 39,9 ; d) 0,02849. (Nota: para cada uno es necesario calcular la incerteza del resultado aplicando la regla que corresponda, y luego se puede decidir cuáles cifras son significativas para retenerlas)

4.- a) (0,2000 ± 0,0002) g ; b) 0,1 %.

5.- 20 mL

6.- a) V = (0,078 ± 0,001) m^3. b) La arista a es la que introduce mayor error relativo, y es, por ello, la que debería medirse con más precisión.

7.- a) 10,2 ; b) 174.

APÉNDICE MATEMÁTICO

VALOR MEDIO Y DISPERSIÓN DE UNA SERIE DE LECTURAS

Valor medio

Supondremos para simplificar este tratamiento que se mide una magnitud para la cual tiene sentido definir un valor verdadero X_v, el cual sin embargo en la práctica no se puede llegar a conocer exactamente. Y supondremos que las mediciones se realizan con instrumentos libres de errores sistemáticos.

Como ya se ha dicho, nunca se debe efectuar una única lectura de un valor medido, porque con una única lectura, entre otras cosas, no se puede descartar que inadvertidamente se haya cometido algún error grosero. En general una vez que se ha realizado la primer lectura, X_1, sólo se puede decir que el valor verdadero de la magnitud que se está midiendo, tiene cierta probabilidad de parecerse en algo a ése; o sea que prácticamente no se puede decir mucho.

Una segunda lectura arrojará un valor X_2. Si éste es injustificadamente diferente del anterior, se sabrá que en alguno se ha cometido un error grosero, y se deberán repetir las mediciones tomando las debidas precauciones para continuar el proceso. Pero si éste es suficientemente parecido al anterior, podremos afirmar que no se ha cometido un error grosero, y ya se tendrá un punto de partida para comenzar a decir algo de la incerteza.

Obviamente, para mejorar la calidad del valor obtenido, se puede proceder a realizar muchas mediciones, y eso es lo que supondremos aquí.

Cuando se realizan N lecturas del valor de una misma magnitud, se obtienen N valores X_i , en general todos diferentes, y si las diferencias son aceptables y se puede descartar un error grosero, se considera que el número más adecuado para representar al hipotético valor verdadero buscado X_v, es el denominado *valor medio*, o *promedio aritmético*, $\overline{X}$, que se calcula con la expresión ya presentada:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}} \tag{1}$$

Con la notación matemática usual, utilizando el símbolo $\sum$ para indicar "sumatoria", se escribe $\sum X_i$ para indicar que se deben sumar los elementos X_i para todos los valores sucesivos de i, comenzando en el primer valor i = 1, y terminando en el último, i = N.

Con este símbolo la expresión (1) queda:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{N} \tag{1'}$$

O equivalentemente:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum X_i \tag{1''}$$

Por ejemplo, para un caso en que se realizan 5 lecturas, se tendría N = 5 y el promedio sería:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$$

Dados entonces N valores medidos en condiciones equivalentes, todos con pequeñas diferencias entre sí, consideraremos que lo mejor que podemos enunciar como resultado de nuestra medición es el valor medio $\overline{X}$, calculado según estas expresiones. Y como ya se ha dicho, se espera que el valor verdadero (ideal desconocido) esté suficientemente cercano a este valor medio, dentro de cierto intervalo de incerteza que ahora trataremos de determinar.

Dispersión de las lecturas

Podemos calcular cuánto se aparta cada valor del valor medio encontrado, definiendo la desviación ε_i de cada lectura:

$$\varepsilon_i = X_i - \overline{X} \tag{2}$$

Si conociésemos el valor verdadero calcularíamos las desviaciones con respecto a él. Pero ya hemos dicho que X_v es un ideal inalcanzable, por lo cual debemos conformarnos por reemplazarlo por $\overline{X}$.

A medida que realizamos más y más mediciones con el mismo instrumento (y eso incluye las posibles mediciones de otros operadores en otros laboratorios, que utilizan instrumentos similares), una vez superada una instancia inicial de adiestramiento, las mediciones continúan dispersándose dentro del cierto intervalo, que resulta así característico del proceso de medición con el instrumental utilizado.

Para conocer este intervalo de incerteza característico del intrumento utilizado, deberíamos calcular cuánto se apartan en promedio los valores X_i respecto del valor $\overline{X}$.

Pero si para hacer esto intentamos calcular el valor medio de las desviaciones ε_i nos encontramos con algo muy interesante:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon} &= \frac{\sum \varepsilon_i}{N} = \\
&= \frac{1}{N}\left((X_1 - \overline{X}) + (X_2 - \overline{X}) + (X_3 - \overline{X}) + \mathbf{L}\right) \\
&= \frac{1}{N}\left((X_1 + X_2 + X_3 + \mathbf{L}) - (\overline{X} + \overline{X} + \overline{X} + \mathbf{L})\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(X_1 + X_2 + X_3 + \mathbf{L}\right) - \frac{1}{N}\left(\overline{X} + \overline{X} + \overline{X} + \mathbf{L}\right)
\end{aligned}$$

Dado que en el segundo término hay N sumandos iguales a $\overline{X}$, queda claro que al dividir por N queda simplemente $\overline{X}$. Pero el primer término es exactamente $\overline{X}$ según (1) o (1’’), de manera que <u>siempre</u> tendremos

$$\bar{\varepsilon} = 0$$

Esto significa 2 cosas:

1) Dado un conjunto de valores $X_{i,}$, el valor medio (definido por (1)), es aquél que anula el promedio de las desviaciones. Es decir, con respecto al valor medio, los valores individuales siempre estarán repartidos entre positivos y negativos de manera tal de que se anule la desviación media.

2) No podremos obtener información sobre el apartamiento promedio de los valores individuales respecto de $\overline{X}$ calculando $\bar{\varepsilon}$, ya que éste siempre dará cero.

Dado entonces que necesitamos información sobre el apartamiento promedio de los X_i respecto de $\overline{X}$, pero no la podemos obtener promediando los ε_i porque al sumarlos siempre se anularán los términos positivos con los negativos, podemos intentarlo elevando las desviaciones al cuadrado, para que así sean positivas todas las contribuciones.

Para ello planteamos el cálculo:

$$\frac{\sum \varepsilon_i^2}{N}$$

Esto nos dará una cantidad positiva que indicará el *valor medio del cuadrado de las desviaciones*. La cantidad que nosotros buscamos, por lo tanto, se puede obtener tomando la raíz cuadrada de esta expresión, y se denomina "***desviación cuadrática media***", σ:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{N}}} \qquad (3)$$

Ejemplo:

Supongamos un ejemplo con muy pocos valores leídos para poder seguir el proceso de cada número.

Supongamos que se tienen los siguientes 5 valores de X_i : 8, 9, 10, 11, 12, y se desea calcular:

a) El valor medio

b) Las desviaciones $\varepsilon_i = X_i - \overline{X}$

c) El valor medio y el valor medio cuadrático de las desviaciones.

e) Interpretar los resultados obtenidos

d) Hacer los cálculos con la calculadora.

Desarrollo

a) $$\overline{X} = \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10.$$

b) Las desviaciones son: –2, –1, 0, 1, 2.

c) Es evidente que si sumamos estos valores para calcular $\overline{\varepsilon}$ dará cero (como corresponde). Pero si calculamos la desviación cuadrática media tendremos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(4+1+0+1+4)}{5}} \cong 1{,}4$$

e) Tenemos valores dispersados simétricamente a ambos lados del número 10, que es el valor medio. Sin tener en cuenta si los valores están a la derecha o a la izquierda de $\overline{X}$ porque eso no importa para calcular el σ, vemos que hay dos valores más alejados de $\overline{X}$ (a distancia = 2), dos más cerca (a distancia = 1), y uno exactamente en el centro (distancia = 0). Esperamos que σ indique aproximadamente el valor promedio de estas distancias, o sea, estimativamente, un número entre 1 y 2. De acuerdo con esto el valor 1,4 es muy razonable.

d) Para utilizar la calculadora debemos colocarla en modo “estadístico”. Una vez en este modo, simplemente ingresamos los 5 valores, y luego, apretando alguna tecla, generalmente indicada con $\overline{x}$, se obtiene en el visor el valor medio, 10; y apretando otra, generalmente indicada con σ_n, se obtiene el valor 1,414213… Lógicamente, por ser indicativo de una incerteza, el valor de σ se redondea a 1 o 2 cifras.

Es fácil ver que cuanto más parecidos sean entre sí todos los valores X_i, menores serán (en valor absoluto) las desviaciones ε_i, y menor será σ. De manera que un valor más pequeño de σ indica lecturas de más precisión, y viceversa.

Por otra parte, existe una Teoría de Probabilidades que permite prever que, si se realiza un número N suficientemente grande de mediciones *equivalentes,* todas afectadas por factores que las desvían ***absolutamente al azar*** en torno a un valor X_v (conocido o no), entonces:

1) No podrá definirse un intervalo dentro del cual se encuentren ***todos*** los valores medidos, pero sí intervalos dentro de los cuales cae determinado porcentaje de los mismos.

En particular, aproximadamente:

El 70 % de los valores estarán dentro del intervalo entre $\overline{X} - \sigma$ y $\overline{X} + \sigma$.

El 95 % de los valores estarán dentro del intervalo entre $\overline{X} - 2\sigma$ y $\overline{X} + 2\sigma$.

El 99,7 % de los valores estarán dentro del intervalo entre $\overline{X} - 3\sigma$ y $\overline{X} + 3\sigma$.

Etc.

2) El valor medio $\overline{X}$ de las N lecturas tendrá aproximadamente

Un 70 % de probabilidades de estar dentro del intervalo entre $X_v - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ y $X_v + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

Un 95 % de probabilidades de estar dentro del intervalo entre $X_v - 2\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ y $X_v + 2\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

Un 99,7 % de probabilidades de estar dentro del intervalo entre $X_v - 3\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ y $X_v + 3\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

Etc.

Si bien las predicciones de esta Teoría sólo serían exactas para números N infinitamente grandes, en la práctica se las considera aceptables para $N \geq 10$ (incluso a veces se tienen 5 lecturas y ya se aplican, un poco burdamente, estas ideas). Ésta es una razón para repetir las mediciones varias veces y no quedarse con dos o tres valores.

Lo que más nos sirve de esta Teoría, en la práctica, es su aplicabilidad a los casos en que se tiene un conjunto de alrededor de una decena de lecturas con su dispersión al azar debida a factores imponderables, ya que, luego de calcular su valor medio $\overline{X}$, podremos calcular su dispersión cuadrática media σ, y enunciar el intervalo de incerteza como:

$$\Delta X \cong 3\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cong \sigma \qquad (4)$$

Expresión en la cual se ha tomado $N \cong 10$, y se ha tenido en cuenta que para el cálculo de un intervalo de incerteza no tiene sentido una gran precisión: basta con una sola cifra significativa – a lo sumo dos.

De esta manera el resultado $\overline{X} \pm \sigma$ indica un intervalo dentro del cual es de esperar (si no hay errores sistemáticos) que esté el valor X_v buscado con más de un 99 % de probabilidades.

Nota:

Si el valor de N es mucho más grande que 10, aunque no se pretenda precisión, la simplificación (4) debe sustituirse por el cálculo correspondiente:

$$\Delta X = 3\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad (4')$$

De esta manera, dado que σ en general depende del instrumento pero no de la cantidad de lecturas, tenemos que midiendo un número N suficientemente grande de veces, se puede obtener un intervalo de incerteza mucho menor que σ.

Pero si resulta que $\sigma/\sqrt{N}$ es menor, o mucho menor, *que la apreciación del instrumento*, entonces ya no debemos aplicar esta teoría, porque entonces la limitación en la exactitud no proviene de la dispersión al azar de los valores, sino de otras limitaciones del instrumento o equipo.

Por ejemplo en el caso extremo en que todos los valores leídos son iguales, tenemos $\sigma = 0$: no hay dispersión. Eso no significa que el resultado es exacto, sino sólo que es exacto hasta la cifra (significativa) leída. La incerteza, por ello, deberá establecerse, a falta de otro criterio, al menos como una unidad, o media unidad, de esa cifra (que sería en general la apreciación del instrumento).

Una condición parecida es la que resulta cuando se pretende realizar un número N muy grande de mediciones para disminuir la incerteza. En estos casos también hay que considerar que el intervalo $\sigma/\sqrt{N}$ tiene significado estadístico basado en la suposición de que han actuado *todos los imponderables posibles sobre todos los factores que se relacionan con la magnitud medida*, y eso no sucede cuando se utiliza siempre el mismo instrumento. De manera que si se mide con determinado equipo o instrumento, no se debe pensar que se podrá disminuir la incerteza más allá de ciertos valores característicos de ese equipo, por más que se aumente N.

Propagación de incertezas en mediciones indirectas.

Las fórmulas que hemos presentado en la sección de propagación de incertezas se pueden justificar de manera simple a partir de expresiones elementales del cálculo diferencial.

Estos cálculos que mostraremos aquí permiten además calcular la propagación de incertezas en el caso de otras funciones cualesquiera que se puedan presentar.

La expresión básica de la que se parte para esto es la definición de “función derivada”, que afirma que:

Dada la función $F(x)$, se tiene que para un incremento Δx suficientemente pequeño de la variable independiente, la variable dependiente sufre el correspondiente incremento pequeño ΔF, tal que el cociente $\Delta F/\Delta x$, se aproxima tanto como se quiera al valor de la denominada *función derivada* $F'(x)$, a condición de hacer el incremento Δx suficientemente pequeño.

Es decir, lo que nos interesa aplicar es que, dada la función F(x), se puede calcular la función derivada F'(x) con ciertas técnicas relativamente simples que aquí supondremos conocidas, y una vez hecho esto se tendrá que esta función se puede igualar con el cociente de los incrementos:

$$F'(x) \cong \frac{\Delta F}{\Delta x} \tag{5}$$

Y esto nos dice, que dada cierta variación posible pequeña de la variable x, podemos calcular la variación correspondiente de la variable F, si conocemos la derivada de la función que las relaciona, según la expresión:

$$\Delta F \cong F'(x)\,\Delta x \tag{6}$$

Y lo que interesa es que esta expresión se puede generalizar (justificados por los correspondientes teoremas matemáticos que aquí no interesan) para una función que depende de varias variables $F(x_1, x_2, \ldots)$.

Para este caso denominamos $F'(x_i)$ a la derivada de F con respecto a la variable x_i (es decir consideramos que ella es la única variable, y todas las demás x_j se mantienen constantes), y escribimos:

$$\Delta F \cong F'(x_1)\,\Delta x_1 + F'(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots \tag{6'}$$

Si ahora pretendemos calcular la incerteza de una magnitud F que depende de otras x_1, x_2, …, que se miden directamente con incertezas Δx_1, Δx_2, …, podemos aplicar dos ideas básicas:

1) Suponemos que las incertezas son relativamente pequeñas, y por eso valen estas expresiones para variaciones dentro del margen de incerteza.

2) La incerteza en la magnitud F debe ser aproximadamente lo mismo que lo que ella puede variar suponiendo que todas las variables x_i varían al azar dentro de sus intervalos (pequeños) de incerteza.

Ahora bien, lo que varía F cuando las variables x_i sufren variaciones Δx_i (que pueden tener signo positivo o negativo) está dado por (6'): $\Delta F \cong F'(x_1)\,\Delta x_1 + F'(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots$.

En esta expresión, según sea el signo de cada Δx_i , las contribuciones de algunos términos pueden sumarse o restarse con la de otros, y si nosotros queremos determinar todo lo que puede variar F cuando las variables x_i toman todas las variaciones al azar posibles dentro de su intervalo de incerteza, debemos considerar la posibilidad de que los signos de los incrementos sean tales que todos los términos sumen positivamente, o negativamente.

Por esto es que podemos adoptar la expresión (6') en la cual consideramos que:

- Todos los incrementos Δ son intervalos de incerteza (por lo tanto, positivos)
- Todas las derivadas se toman con su valor absoluto para que todas las contribuciones se sumen:

$$\boxed{\Delta F \cong |F'(x_1)|\,\Delta x_1 + |F'(x_2)|\,\Delta x_2 + \ldots} \tag{7}$$

La Teoría de Probabilidades permite hallar expresiones más refinadas, frente a las cuales ésta es sólo una burda aproximación que en general arroja valores excesivamente grandes de ΔF (nos da el máximo valor posible que podría tomar ΔF); pero es más simple y será suficiente para nuestras necesidades.

Ahora veamos cómo se obtienen de (7) las expresiones que ya tenemos para la propagación de errores.

Suma y resta de variables medidas directamente

Comencemos considerando el caso $F = x_1 + x_2$.

Para este caso si consideramos que la única variable es x_1 (x_2 se considera una constante), tenemos:

$F'(x_1) = 1$. Y de la misma manera, $F'(x_2) = 1$.

De manera que la aplicación de (7) da:

$$\boxed{\Delta F = \Delta x_1 + \Delta x_2} \tag{8}$$

Si tuviésemos la resta: $F = x_1 - x_2$, tendríamos $F'(x_1) = 1$, y $F'(x_2) = -1$. Al aplicar (7) debemos tomar el valor absoluto de las F', de manera que volveremos a obtener lo mismo: $\Delta F = \Delta x_1 + \Delta x_2$

Es más, podríamos considerar el caso general $F = A\,x_1 + B\,x_2$, donde A y B son constantes de cualquier signo.

En este caso tenemos $F'(x_1) = A$, y $F'(x_2) = B$.

De manera que la aplicación de (7) da:

$$\boxed{\Delta F = |A|\,\Delta x_1 + |B|\,\Delta x_2} \tag{8'}$$

Si A y B valen ±1, tenemos los casos anteriores, de suma y resta.

Producto y cociente de variables medidas directamente

Consideremos ahora $F = x_1\,x_2$.

Tendremos: $F'(x_1) = x_2$; $F'(x_2) = x_1$

Aplicamos (7):

$$\Delta F = |x_2|\,\Delta x_1 + |x_1|\,\Delta x_2$$

Si dividimos esto por $|F|$, es decir por $|x_1\,x_2|$, nos queda la expresión habitual:

$$\boxed{\frac{\Delta F}{|F|} = \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|}} \tag{9}$$

Consideremos ahora $F = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Tendremos: $F'(x_1) = \dfrac{1}{x_2}$; $F'(x_2) = x_1 \dfrac{-1}{x_2^2} = \dfrac{-x_1}{x_2^2}$

Aplicamos (7):

$$\Delta F = \left|\frac{1}{x_2}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{x_1}{x_2^2}\right| \Delta x_2$$

Dividimos esto por $|F|$, es decir por $|x_1/x_2|$, y nos queda nuevamente la expresión (9).

Variable medida directamente que se eleva a una potencia

Para el caso $F = x^n$, tenemos $F' = n\, x^{n-1} = n\, F / x$, de manera que se obtiene fácilmente lo esperado, para cualquier valor entero o no, positivo o no, de n:

$$\boxed{\frac{\Delta F}{|F|} = |n| \frac{\Delta x_1}{|x_1|}} \qquad (10)$$

De manera que vemos que, conociendo las técnicas de derivación podemos encontrar la expresión correspondiente a cualquiera de los casos típicos antes vistos, así como resolver nuevas situaciones para cualquier caso.

Trabajo Práctico de Laboratorio Nº 1:

FUERZAS Y EQUILIBRIO

1. Objetivos

- Ilustrar la naturaleza vectorial de las fuerzas (principio de superposición).
- Comprobar que la suma de las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo en reposo es nula (condición de equilibrio estático).
- Ejercitar prácticamente formas gráficas y analíticas de sumar los vectores fuerza.
- Ejercitar el concepto de fuerza equilibrante de un sistema.
- Verificar algunas propiedades elementales del rozamiento y familiarizarse con ellas.
- Visualizar en el nivel concreto los distintos elementos que intervienen en el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que desliza sobre un plano inclinado.
- Tomar contacto con nociones elementales sobre incertezas y errores de medición.
- Desarrollar criterios para decidir el grado de verificación experimental del equilibrio de las fuerzas.

2. Equipo y materiales

3 dinamómetros,

3 soportes de anclaje adecuados para sujetar los dinamómetros,

transportador (u hoja de circunferencia graduada), regla, escuadra,

1 aro metálico, hilo, cinta adhesiva.

1 plano inclinado consistente en una madera lisa de 60 cm $\times$ 20 cm, con bloques de apoyo que permitan ubicarla de manera firme con un ángulo de alrededor de 20 o 30 grados respecto de la horizontal

1 cuerpo prismático de superficies lisas, aproximadamente 400 g de masa, y relación aproximada 1:2:3 entre los lados

3. Descripción general y planteos básicos

Dado un sistema o conjunto de fuerzas $\vec{F}_i$ actuando sobre un cuerpo, se define la fuerza resultante $\vec{R}$ como la suma vectorial de todas ellas:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = \sum \vec{F}_i$$

Este vector es fundamental para determinar las características del movimiento del cuerpo, a través de los Principios de la Dinámica.

En particular hay una situación especial, denominada de “equilibrio de fuerzas” en la cual el resultado de esta suma vectorial es un vector completamente nulo: $\vec{R} = \vec{0}$.

Esta situación especial debe verificarse tanto en los casos en que el cuerpo permanece en reposo, como en los casos en que el movimiento es rectilíneo y uniforme. En este trabajo práctico estudiaremos esta situación de equilibrio de fuerzas para casos de cuerpo en reposo.

Para ello elaboraremos dos situaciones experimentales que corresponden a cuerpos en equilibrio estático, en cada uno mediremos las magnitudes y direcciones de las fuerzas responsables de ese equilibrio, y procederemos a comprobar la relaciones debidas entre ellas por más de un método, como se describirá en cada caso más adelante.

Las dos situaciones experimentales que se plantearán son:

Primera Parte: Equilibrio de tres fuerzas horizontales.

En esta primera parte se estudia el equilibrio de las fuerzas con las que tres cuerdas dispuestas horizontalmente sobre una mesa tiran de un anillo o anudamiento central. La **magnitud** de cada $\vec{F}_i$ está indicada por un dinamómetro sujeto a cada cuerda, la **dirección** de cada $\vec{F}_i$ se traza sobre un papel siguiendo la dirección de la cuerda correspondiente, y con esos elementos se procede a las verificaciones que se describen más adelante.

Segunda Parte: Equilibrio en un plano inclinado.

En esta segunda parte se examina el equilibrio de las fuerzas que actúan cuando se consigue que un cuerpo se mantenga sin caer ni deslizar hacia arriba por un plano inclinado, en ciertas condiciones de rozamiento y de inclinación del mismo. Adecuadas mediciones con el dinamómetro permiten determinar todas las fuerzas intervinientes, y verificar el cumplimiento de la condición de equilibrio correspondiente.

En la situación que se plantea en la Primera Parte se procede a un trabajo más completo con los vectores, tendiente a revisar exhaustivamente los procedimientos analíticos y gráficos para la suma vectorial, que se describen resumidamente a continuación.

Métodos de COMPROBACIÓN DE RESULTANTE NULA:

I. Método gráfico: representamos gráficamente las $\vec{F}_i$, y comprobamos que $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ verificando que el POLÍGONO VECTORIAL que representa esa suma sea CERRADO.

II. Método analítico: descomponemos las $\vec{F}_i$ en sus componentes *(x, y)*, y las sumamos (teniendo en cuenta sus signos), para verificar si las componentes de la resultante son nulas, es decir, si $R_x = 0$, y $R_y = 0$ (siendo $R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$, y $R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$).

Debido a los errores introducidos inevitablemente en las distintas mediciones (ángulos, fuerzas, longitudes, errores de graficación y numéricos, etc.), es de esperar que obtengamos como resultante un valor de pequeño, pero no nulo. Un análisis comparativo entre la magnitud de la $\vec{R}$ obtenida y las de las fuerzas $\vec{F}_i$ medidas, nos permitirá concluir en cuán buena aproximación se verifica (o no) la condición de resultante nula.

Otro enfoque del equilibrio completamente equivalente, y que también ejercitaremos, surge de considerarlo como el balance entre dos fuerzas contrapuestas de igual módulo, donde una de ellas es la resultante parcial de todas las $\vec{F}_i$ menos una, y la otra es la $\vec{F}_i$ restante, que recibe el nombre de **equilibrante** de las demás (ver teórico).

En el caso de tres fuerzas, cuando la resultante (de las tres) es nula, la resultante parcial de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, es decir,

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

debe estar equilibrada por $\vec{F}_3$, en el sentido de ser un vector de igual módulo y sentido opuesto:

$$\vec{R}_{12} = -\vec{F}_3 .$$

Entonces, el examen del equilibrio desde este punto de vista, pasa por comprobar las condiciones de igualdad de módulos y sentidos antiparalelos de los vectores $\vec{R}_{12}$ y $\vec{F}_3$; esto es, deberíamos tener

$$R_{12} = F_3 \; ; \quad y \quad A = 180^{o}$$

donde A es el ángulo entre estos dos vectores.

Por razones prácticas, para esta confrontación proponemos hallar estos vectores GRÁFICAMENTE, y luego decidir si se verifica suficientemente el equilibrio entre ellos por medio de los cálculos del grado porcentual de **Discrepancia en módulo y en ángulo** (*D(M) y D(A)*) , de acuerdo a las siguientes fórmulas (arbitrarias pero razonables):

$$D(M) = \frac{|R_{12} - F_3|}{F_3} \times 100 \quad ; \quad D(A) = \frac{|A - 180|}{180} \times 100$$

El criterio en este práctico considerará como válidas, es decir, consistentes con la predicción teórica de $\vec{R}_{12} = -\vec{F}_3$, las determinaciones de $\vec{R}_{12}$ y $\vec{F}_3$ que según estas fórmulas, no discrepen en más del 10%.

En la Segunda Parte de este práctico se considera suficiente proceder a las composiciones gráficas de los vectores intervinientes, a fin de verificar los equilibrios correspondientes, como se verá oportunamente.

4. Procedimiento

PRIMERA PARTE: EQUILIBRIO DE TRES FUERZAS HORIZONTALES.

1. Análisis de los instrumentos.

Encuentre la apreciación de los dinamómetros (la fuerza mínima que permiten medir) y despliegue su escala para conocer su alcance (o fuerza máxima que permiten medir); controle la calibración de cada uno suspendiéndole un peso conocido, revise la calibración del valor 0 y corríjala si es necesario, para trabajar horizontalmente.

2. Preparación general de la situación.

Disponga las tres cuerdas anudadas al aro central por uno de sus extremos y a los ganchos de los dinamómetros por su otro extremo. El conjunto se dispone sobre una mesa, y se tensionan los dinamómetros sujetándolos a 3 soportes de anclaje, los cuales pueden acomodarse y ajustarse en distintos puntos sobre los bordes de la mesa.

Deslice y ajuste los anclajes de los dinamómetros sobre los bordes de la mesa de forma tal que las cuerdas queden firmemente tensionadas en forma aproximada de “Y”; todos los dinamómetros deben quedar tensionados con valores más o menos grandes de fuerza (ninguna de las fuerzas debería ser muy pequeña comparada con las demás), paralelos al plano de la mesa, y a la mínima distancia por encima de la misma (es decir, en lo posible, que queden apoyados sobre la mesa).

3. Sensibilidad del equilibrio.

Una vez que el nudo central permanezca estático, coloque un papel debajo y marque con un punto la posición del nudo; analice cuán confiable es el equilibrio allí, realizando pequeños apartamientos laterales sobre el nudo, soltando y marcando (si son distintas) las nuevas posiciones de equilibrio. Si es necesario, cambie a una disposición de elementos en que esta dispersión de puntos sea mínima y manténgala en lo que sigue. También tome nota de en qué cantidad puede Ud. (haciendo pequeñas fuerzas) modificar la medición de cada dinamómetro sin alterar el aparente equilibrio. Esta cantidad da idea de la incerteza ΔF en la magnitud de la fuerza. Discuta cómo estimar la incerteza $\Delta\theta$ en las direcciones que forman las cuerdas.

4. Sistema de coordenadas.

Tome una hoja de papel cuadriculado, marque en ella un origen (centrado respecto de la hoja) y trace dos ejes coordenados *x* e *y*. Sus resultados dependen del cuidado conque marca puntos y traza rectas, así que utilice lápiz de trazo fino y dibuje líneas finas.

Luego coloque la hoja sobre la mesa, y mirando perpendicularmente desde arriba (para evitar errores de paralaje), haga coincidir el origen con el punto de aplicación de las fuerzas (el centro del aro) y una de las cuerdas con la mitad inferior del eje y (a esta cuerda se le asignará el número 3). Asegure la hoja en esa posición, ya que será usada para representar las direcciones de las fuerzas que actúan a lo largo de las cuerdas. Para esto, haga una pequeña marca circular cerca de los bordes de la hoja, justo debajo de las cuerdas que no coinciden con los ejes.

5. Medición y registro de las fuerzas

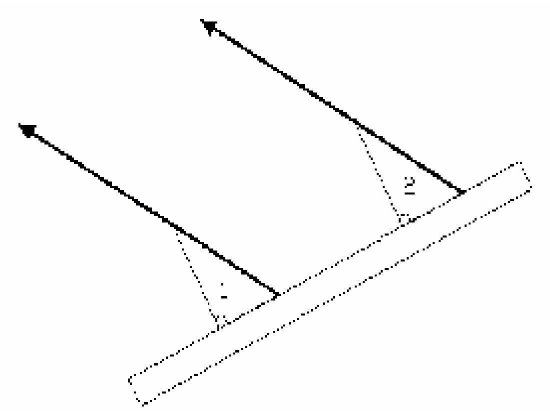
Lea en la escala de cada dinamómetro los valores de las intensidades de las fuerzas, y regístrelos como F_1, F_2 y F_3 (para lo cual Ud. habrá enumerado previamente las cuerdas) en el informe de resultados al final del práctico.

Retire el papel. Dibuje en trazo fino y muy suave líneas desde el origen a las marcas en los bordes. Estas líneas, junto con el eje y, cumplen una sola función, que es la de indicar las **direcciones de acción de los vectores fuerza**. Las longitudes de estas líneas (l_1, l_2, l_3) no dan ninguna información sobre el módulo o magnitud de las fuerzas, sólo los dinamómetros indican las magnitudes de los vectores.

De acuerdo a los valores de intensidad medidos, elija una escala para que los dibujos sean tan grandes como la hoja lo permita (por ejemplo 1N:4cm) y consigne su valor en la hoja. Sobre las rectas l_1, l_2 y l_3 dibuje en trazo firme los vectores $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, y $\vec{F}_3$, de forma tal que las longitudes de las flechas (medidas sobre la regla) se correspondan, en la escala que Ud. tomó, con las intensidades medidas en los dinamómetros.

6. Composición gráfica

Para sumar las fuerzas con este método, construya sobre la hoja el polígono que resulte de redibujar un vector "a continuación" del anterior (en cualquier orden). Una forma fácil de asegurar que un vector sea **trasladado paralelamente a sí mismo** es con ayuda de regla y escuadra, como se muestra en la figura: un vector dado pasa de la posi-



ción 1 a la posición 2 manteniendo su dirección, para lo cual se afirma la regla, y se desliza la escuadra a lo largo de la misma, mientras uno de sus lados se halla sobre el vector a trasladar (en general habrá que combinar con una traslación a lo largo de la recta de acción del vector).

Obtenga la resultante de $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$ dibujando el vector que va desde el punto de partida del primer vector hasta el punto final del último vector en la suma. Indíquelo en el gráfico como $\vec{R}$, mida su longitud y convierta esta longitud a unidades de fuerza para obtener la magnitud R; determine la dirección de $\vec{R}$ midiendo con el transportador el ángulo que forma el vector con el eje *x*. Complete la Hoja Informe con estos resultados. Realice el cálculo de los cocientes R/F_i allí pedido para cada fuerza, y comente sobre la calidad del resultado según la pequeñez de estos cocientes.

7. Método analítico

Encuentre las componentes de cada fuerza a lo largo de los ejes midiendo con el transportador los ángulos θ_i que cada vector graficado $\vec{F}_i$ forma con el eje *x*, y calculando de acuerdo a las fórmulas

$F_{1x} = F_1 \cos\theta_1$; $F_{1y} = F_1 \operatorname{sen}\theta_1$;

$F_{2x} = F_2 \cos\theta_2$; $F_{2y} = F_2 \operatorname{sen}\theta_1$;

$F_{3x} = F_3 \cos\theta_3$; $F_{3y} = F_3 \operatorname{sen}\theta_3$;

Antes de seguir dibuje con cuidado en la hoja las componentes de las tres fuerzas (proyectando los vectores) y verifique que los valores coincidan con los calculados. De haber discrepancias revise los valores de los ángulos, la corrección de las proyecciones, etc. hasta que se logre el acuerdo debido.

Luego calcule las componentes de la resultante mediante las ecuaciones

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \quad ; \quad R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

y analice hasta qué punto logra verificar experimentalmente el resultado teórico

$$R_x = 0 \;\; ; \;\; R_y = 0 \; .$$

Complete la Hoja Informe con estos resultados, comparando con el resultado obtenido gráficamente según se pide allí.

8. Método de la equilibrante

Sobre la hoja con los vectores obtenga $\vec{R}_{12}$ sumando gráficamente $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (por razones prácticas nos limitaremos aquí al procedimiento gráfico). Utilice la escala para obtener los módulos en unidades de fuerza. Compare con $\vec{F}_3$, y calcule las discrepancias mencionadas en la descripción general.

Complete la Hoja Informe con estos resultados, y las conclusiones sobre la conveniencia de uno u otro método.

SEGUNDA PARTE: EQUILIBRIO EN UN PLANO INCLINADO.

1. Ubicación del plano inclinado

Se ubica la plataforma lisa con un extremo sobre la mesa y el otro en el soporte a alguna altura tal que la inclinación sea insuficiente para producir el deslizamiento del cuerpo prismático (hacia la parte baja). Es decir que este cuerpo debe quedar con seguridad en reposo al dejarlo apoyado sobre esta superficie. Fíjelo en la posición elegida de manera que quede firme.

Determine la inclinación del plano midiendo las alturas y separación de dos puntos cercanos a los extremos, y aplicando nociones trigonométricas básicas. Verifique con el transportador y registre todos los valores en la hoja informe.

2. Medición de fuerzas

Con el dinamómetro determine el peso del cuerpo prismático (recuerde calibrar adecuadamente el cero). Registre el valor.

Luego coloque el cuerpo sobre el plano. En todos los casos utilice un trozo de hilo para tirar del cuerpo, de manera de poder controlar el paralelismo entre el hilo y el plano (cuide también la alineación del dinamómetro con el hilo).

Haga varias pruebas apoyando distintas caras del cuerpo sobre el plano, y midiendo la fuerza necesaria para producir un deslizamiento lento **hacia la parte alta del plano** (no olvide calibrar previamente el dinamómetro para medir en esta posición). Se requerirá un poco de práctica para lograr un movimiento uniforme y libre de tirones – debe recordarse que sólo así será válido el planteo del equilibrio de fuerzas.

Después de hacer algunos deslizamientos de prueba con cada cara, hasta lograr que los valores se repitan dentro de la apreciación del dinamómetro, registre los valores de estas fuerzas para cada cara.

A continuación repita todo el procedimiento pero tirando del cuerpo para producir el deslizamiento **hacia la parte baja del plano** (recuerde calibrar nuevamente el dinamómetro para medir de esta forma).

Si usted ha medido con suficiente cuidado, sus registros deberán mostrar que la fuerza para arrastrar el cuerpo hacia arriba o abajo, no depende de la superficie del cuerpo que se haya apoyado sobre el plano. Si las diferentes superficies tuvieran diferente terminación o recubrimiento, esto podría determinar diferencias en el rozamiento; pero como se ha cuidado de que no haya diferencias de este tipo, sus mediciones le deberán permitir enunciar que la fuerza de rozamiento no depende de la extensión de la superficie de contacto entre los cuerpos que rozan.

3. Realización de los diagramas vectoriales.

Ahora deberá usted realizar un diagrama vectorial con las fuerzas que han actuado en cada uno de los casos diferentes que se han registrado:

1. Cuerpo en reposo sobre el plano sin aplicación de fuerzas por el agente externo.
2. Cuerpo deslizando lentamente por la acción del agente externo tirando hacia la parte alta del plano.
3. Cuerpo deslizando lentamente por la acción del agente externo tirando hacia la parte baja del plano.

En cada caso se cuenta con el valor medido de la fuerza peso, y de la fuerza del agente externo paralela al plano (en un caso hacia la parte alta y en otro hacia la parte baja del plano), y se cuenta con la teoría que dice que si el cuerpo está en reposo, tanto como si se mueve a velocidad constante, el **conjunto de todas las fuerzas actuantes sobre el cuerpo debe estar en equilibrio**.

En esta Segunda Parte del trabajo práctico, NO SE ESPERA QUE USTED VERIFIQUE EL EQUILIBRIO de las fuerzas, sino que,

suponiendo que dicho equilibrio se verifica, CONSTRUYA LOS DIAGRAMAS VECTORIALES correspondientes a cada una de las tres situaciones, mostrando:

- La fuerza peso del cuerpo
- La reacción normal del plano sobre el cuerpo
- La fuerza del agente externo sobre el cuerpo
- La fuerza de rozamiento del plano sobre el cuerpo

En cada diagrama vectorial deben estar dibujados estos vectores con una escala adecuada, y cada uno con su módulo indicado, obtenido a partir del gráfico a escala, o directamente de las mediciones, según corresponda.

4. Análisis físico

Finalmente usted deberá explicar

a) Si la fuerza de rozamiento depende de la extensión de la superficie de contacto o no, y cómo lo verifica.

b) Si la fuerza de rozamiento depende de la fuerza normal que aplasta una superficie contra la otra o no, y cómo lo verifica.

c) Si la fuerza de rozamiento encontrada en su experimento fue mayor, menor o igual, cuando el cuerpo deslizaba hacia abajo, cuando deslizaba hacia arriba, o cuando estaba en reposo, y por qué eso es lógico o correcto.

HOJA DE INFORME T.P.L. Nº 1

PARTE 1:

EQUILIBRIO DE TRES FUERZAS HORIZONTALES

1.- MÓDULOS Y ÁNGULOS DE LAS FUERZAS

Módulos indicados por los dinamómetros, y ángulos tomados de la hoja de trabajo que se adjunta.

F_1 = ... ± . . . . α_1 = ... ± . . . .

F_2 = ... ± . . . . α_2 = ... ± . . . .

F_3 = ... ± . . . . α_3 = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene las incertezas. . . . .

. . . .

. . . .

2.- RESULTANTE OBTENIDA GRÁFICAMENTE

R = ... α_R = ...

Cocientes para evaluar calidad (se esperan inferiores al 5 %).

$\frac{R}{F_1}$ = Relación porcentual = ... %

$\frac{R}{F_2}$ = Relación porcentual = ... %

$\frac{R}{F_3}$ = Relación porcentual = ... %

3.- OBTENCIÓN ANALÍTICA DE LA RESULTANTE

Valores obtenidos analíticamente a partir de los módulos y ángulos registrados en 1), y ya comparados y compatibilizados con los dibujados en la Hoja de Trabajo:

F_{1x} = ... F_{1y} = ...

F_{2x} = ... F_{2y} = ...

F_{3x} = ... F_{3y} = ...

Resultante obtenida

$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$ = ... $R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$ = ...

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ = ... $\alpha_R = \mathrm{arctg}(R_y / R_x)$ = ...

Comentario sobre la comparación con resultado gráfico: . . . .

. . . .

. . . .

4.- MÉTODO DE LA EQUILIBRANTE

Módulo y ángulo de $\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, obtenido gráficamente (A es el ángulo con $\vec{F}_3$)

R_{12} = ... A = ...

Discrepancias:

$$D(M) = \frac{|R_{12} - F_3|}{F_3} \times 100$$ = ...

$$D(A) = \frac{|A - 180|}{180} \times 100$$ = ...

COMENTARIOS FINALES:

Se sugiere considerar al menos los siguientes aspectos:

- Ventajas y desventajas de los métodos gráficos comparados con los analíticos
- Ventajas y desventajas de analizar el equilibrio verificando la suma nula de las fuerzas intervinientes, comparado con el método de la equilibrante

PARTE 2:

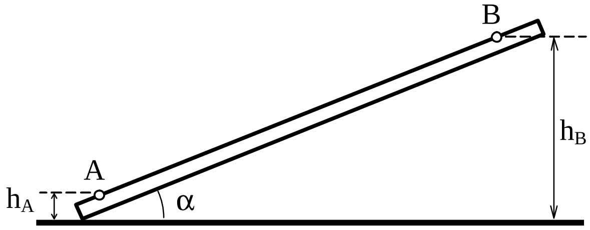
EQUILIBRIO EN UN PLANO INCLINADO

1.- INCLINACIÓN DEL PLANO

Por medio de las alturas de dos puntos elegidos, A y B.

Valores medidos

AB = ... ± . . . .



h_A = ... ± . . . .

h_B = ... ± . . . .

Inclinación determinada trigonométricamente:

α = ...

Valor indicado por el transportador (debe diferir en menos de 1º)

α = ...

Determinación final:

α = ... ± 0,5º

2.- PESO DEL CUERPO

P = ... ± . . . .

3.- FUERZA PARA ARRASTRAR EL CUERPO HACIA ARRIBA

Se registra para cada cara de apoyo. Se debe ensayar varias veces hasta lograr que se repitan los valores, antes de registrar éstos.

Valores medidos (N)

Cara 1	Cara 2	Cara 3

RESULTADO ÚNICO: F = ... ± . . . .

Indique cómo obtuvo la incerteza . . ..

. . . .

. . . .

3.- FUERZA PARA ARRASTRAR EL CUERPO HACIA ABAJO

Se registra para cada cara de apoyo. Se repite procedimiento.

Valores medidos (N)

Cara 1	Cara 2	Cara 3

RESULTADO ÚNICO: F’ = ... ± . . . .

4.- ELABORACIÓN DE LOS RESULTADOS.

4.1. CUERPO EN REPOSO SOBRE EL PLANO

Realice un diagrama vectorial a escala en hoja aparte (papel milimetrado o cuadriculado), mostrando las fuerzas actuantes sobre el cuerpo en el caso del cuerpo en reposo, y mostrando la correspondiente composición vectorial.

Obtenga de este diagrama los valores de:

REACCIÓN NORMAL DEL PLANO: R_N = ...

COMPONENTE TANGENCIAL DEL PESO: P_T = ...

FUERZA DE ROZAMIENTO: F_{roce} = ...

Calcule analíticamente las componente del peso, y compare con los valores correspondientes determinados gráficamente:

$P_T = P \operatorname{sen}\alpha =$ . . . .

$P_N = P \cos\alpha =$ . . . .

Comentarios sobre la comparación: . . . .

. . . .

. . . .

4.2. CUERPO ARRASTRADO SOBRE EL PLANO HACIA ARRIBA

Realice un diagrama vectorial a escala en hoja aparte (papel milimetrado o cuadriculado), mostrando las fuerzas actuantes sobre el cuerpo en este caso, y mostrando la correspondiente composición vectorial.

Obtenga de este diagrama los valores de:

REACCIÓN NORMAL DEL PLANO: $R_N =$ . . . .

COMPONENTE TANGENCIAL DEL PESO: $P_T =$ . . . .

FUERZA DE ROZAMIENTO: $F_{roce} =$ . . . .

4.3. CUERPO ARRASTRADO SOBRE EL PLANO HACIA ABAJO

Realice un diagrama vectorial a escala en hoja aparte (papel milimetrado o cuadriculado), mostrando las fuerzas actuantes sobre el cuerpo en este caso, y mostrando la correspondiente composición vectorial.

Obtenga de este diagrama los valores de:

REACCIÓN NORMAL DEL PLANO: $R_N =$ . . . .

COMPONENTE TANGENCIAL DEL PESO: $P_T =$ . . . .

FUERZA DE ROZAMIENTO: $F'_{roce} =$ . . . .

4.4.- ANÁLISIS FÍSICO

a) Explique si a igualdad de otras condiciones la fuerza de rozamiento depende o no de la extensión de la superficie de contacto.

Luego explique, con todos los detalles relevantes (incluya esquemas si es necesario), si eso ha sido verificado, o si podría haber sido verificado, en este trabajo.

b) Explique si a igualdad de otras condiciones, la fuerza de rozamiento depende o no de la fuerza normal que aplasta una superficie contra la otra.

Luego explique, con todos los detalles relevantes (incluya esquemas si es necesario), si eso ha sido verificado, o si podría haber sido verificado, en este trabajo.

c) Explique con todos los detalles relevantes (incluya esquemas si es necesario), si la fuerza de rozamiento encontrada en este trabajo, ha sido mayor, menor, o igual, cuando el cuerpo fue arrastrado hacia arriba, o cuando fue arrastrado hacia abajo, o cuando el cuerpo estuvo en reposo. Explique si esos resultados fueron lógicos o correctos y por qué.

Trabajo Práctico de Laboratorio nº 2

FUERZAS ELÁSTICAS Y OSCILACIONES

1. Objetivos

- Ejercitar el análisis, la medición, y el control, de diversas características de movimientos oscilatorios simples.
- Medir constantes elásticas de resortes y determinar su efecto sobre el período de oscilaciones elásticas de cuerpos suspendidos de los mismos.
- Comprobar que la fuerza neta hacia la posición de equilibrio en las oscilaciones de un péndulo es proporcional a la elongación, de la misma manera que en oscilaciones masa-resorte (para pequeñas amplitudes en el caso del péndulo).
- Avanzar gradualmente en el cálculo de incertezas en la medición de diversas variables involucradas.
- Desarrollar procedimientos y habilidades para interpretación de tablas y gráficos, y su aprovechamiento para encontrar o mostrar relaciones funcionales entre las magnitudes medidas.

2. Equipo y Materiales requeridos

Caja de pesas y portapesas.

Tres resortes de diferente constante elástica k. (aproximadamente 2N/m , 5N/m y 15N/m).

Soporte diseñado para colgar el resorte.

Péndulo (masa esférica de acero para atar a un hilo).

Dinamómetro.

Balanza de 200 g de alcance.

Cinta métrica, transportador y cronómetro.

Hilo y tijeritas.

3. Descripción general y planteos básicos

Si la fuerza neta actúa siempre hacia la posición de equilibrio de un cuerpo, el movimiento del mismo es repetitivo, u oscilatorio, hacia delante y hacia atrás alrededor de esta posición. Cuando la magnitud de esta fuerza es proporcional al desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio, el movimiento oscilatorio es especial y se denomina *armónico*.

Casos de interés son el sistema masa-resorte, el péndulo simple, las vibraciones de átomos en moléculas o en un sólido, etc.

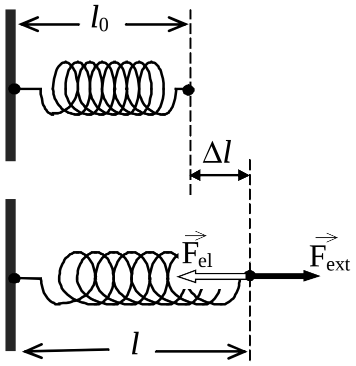
Para el caso de un resorte cuya ***longitud de equilibio***, es decir longitud en ausencia de fuerza, es l_0, y que se estira (o comprime) hasta una longitud l bajo la acción de una fuerza de módulo F, se tiene la siguiente expresión matemática, denominada "ley de fuerza elástica", o "ley de Hooke":

$$F = k\,|\Delta l|$$

Donde:

$\Delta l = l - l_0$ es la deformación del resorte, que es lo mismo que la *elongación* o desplazamiento de su extremo desde su posición de equilibrio, y k es una constante de proporcionalidad llamada *constante elástica*.

Por *Acción y Reacción* F es tanto el módulo de la fuerza $\vec{F}_{ext}$ que un agente externo aplica al resorte para deformarlo, en el mismo sentido de la deformación (vector lleno en la figura), como el de la fuerza elástica $\vec{F}_{el}$, con que el resorte reacciona sobre el agente, cuyo sentido es opuesto al anterior, hacia la posición de equilibrio (vector hueco en la figura).



En un sistema de referencia con el origen en la posición de equilibrio, tenemos que x(t) es directamente igual a la elongación $l - l_0$, y para una oscilación armónica es una función del tipo:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega\, t)$$

Donde:

ω es la frecuencia angular del movimiento ($\omega = 2\,\pi / T$).

Por razones teóricas (para ampliar el tema consultar el Apunte de Clases Teóricas) ω debe relacionarse con la masa del cuerpo, y la constante elástica del resorte según la expresión:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

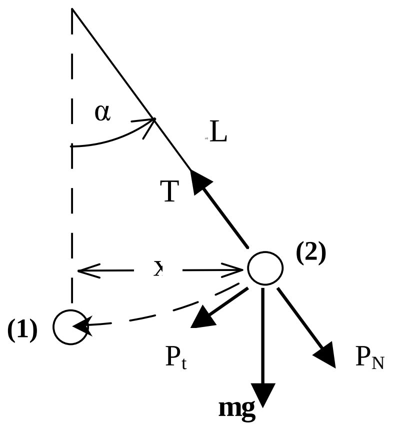
Aplicando la relación entre período y frecuencia angular $T = 2\,\pi / \omega$, se obtiene la expresión para el período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El caso del péndulo.

El péndulo simple o *ideal* está constituido por un masa puntual suspendida de un punto fijo mediante un hilo fino, sin peso e inextensible de longitud L que oscila barriendo pequeños ángulos.

Cuando el hilo forma un ángulo α con la vertical (Posición (2) de la figura) la fuerza tangencial neta que actúa sobre el cuerpo es la componente tangencial del peso, $P_t = m\,g\,\text{sen}\alpha$ (g es el valor del campo gravitatorio), que tiende a llevarla a su posición de equilibrio (Posición (1) de la figura).



Si α es pequeño, el arco tiende a confundirse con el eje x, de manera que tenemos un movimiento casi rectilíneo bajo una fuerza tangencial cuyo valor absoluto, dado que senα = x / L, es:

$$P_t = \frac{mg}{L}\, x$$

Esto nos dice que podemos considerar un caso de movimiento casi rectilíneo bajo la acción de una fuerza neta tangencial de tipo elástico, llamando fuerza de tipo elástico a la que es proporcional a la elongación y orientada hacia la posición de equilibrio, aunque no sea aplicada por un resorte.

De manera que esperamos un movimiento armónico con un valor de la frecuencia angular ω igual a la que ocurriría en las oscilaciones masa-resorte, con un resorte cuya constante elástica fuera $k = \frac{mg}{L}$ (es claro que aquí no hay tal resorte, k es simplemente la constante de proporcionalidad entre el valor absoluto de la fuerza tangencial y el desplazamiento desde la posición de equilibrio).

De manera que aplicando la relación de las oscilaciones elásticas $\omega^2 = k/m$, para este caso se obtiene $\omega^2 = g / L$, lo que significa, para el período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Que es una de las conocidas leyes del péndulo.

En este trabajo realizaremos experiencias que nos permitirán explorar las variables de las que depende el período T de varios movimientos oscilatorios, y comprobaremos que la relación entre la fuerza que actúa sobre el cuerpo y su elongación, es la ley de la fuerza elástica tanto en el caso del sistema masa-resorte, como en el caso del péndulo.

En la primera parte del práctico trabajaremos con el sistema masa-resorte y en la segunda con el péndulo simple.

4. Procedimiento

PARTE 1. LAS OSCILACIONES DEL SISTEMA RESORTE - MASA

El resorte es un ejemplo típico en el que se verifica la ecuación $F = k\,|\Delta l|$.

Primero trataremos de verificar esta relación lineal entre fuerza y desplazamiento para obtener luego el valor experimental de la constante de proporcionalidad k.

Luego haremos oscilar un cuerpo suspendido del resorte, y entonces exploraremos como influyen las distintas variables (masa, amplitud, y constante elástica) sobre el período de oscilación, T, y por último vamos a determinar experimentalmente la relación entre dicho período de oscilación y la masa del cuerpo.

1. Obtención de la constante elástica del resorte.

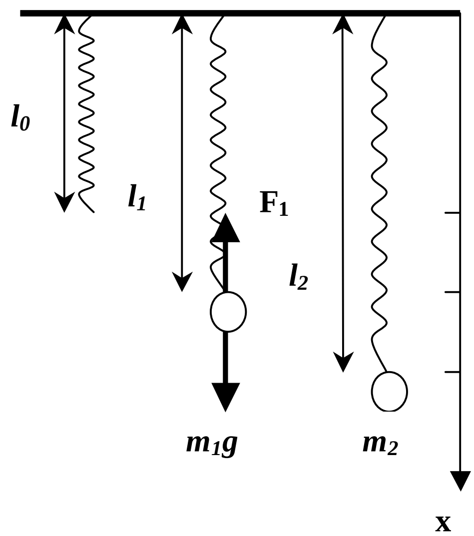
Primero se seleccionan los tres resortes que forman parte de los elementos para la realización del práctico por sus características propias, que observamos al tratar de estirarlos haciendo fuerza con nuestras manos. Los denominamos blando, semiduro, y duro, a los efectos de la interpretación de los resultados de nuestra tarea.

Primero trabajamos con el resorte semiduro. Lo extendemos sobre una mesa horizontal, medimos su extensión y luego obtenemos, usando la balanza electrónica, su masa. Estos valores deben ser anotados en la Hoja de Informe del Práctico.

Colgamos al resorte del soporte y verificamos que su extensión ha variado por efecto de su propia masa que es afectada por el campo gravitatorio.

A la extensión del resorte colgando del soporte la fijamos como la longitud inicial l_0 de equilibrio (sin cuerpo suspendido).

Ahora anexamos el platillo considerándolo como el primer cuerpo, de masa m_1. Su peso estirará al resorte hacia una nueva longitud de equilibrio.



Entonces la fuerza F_1 que hace el resorte sobre el platillo es la equilibrante del peso del mismo y por lo tanto $F_1 = m_1\,g$; y la nueva longitud del resorte será $l_1 > l_0$. Continuamos agregando masas de 10 a 20 gramos al platillo sin retirar las previas y asociando a estas cargas F_i las correspondientes longitudes de equilibrio l_i . Debemos definir un rango para la carga final de manera tal que las sucesivas longitudes l_i sean bien distinguibles unas de otras, sin que al final se llegue a deformar al resorte de manera permanente. Estos datos deben ser reunidos en la tabla impresa en la Hoja de Informe.

Continuamos registrando así las longitudes para las sucesivas cargas hasta completar el registro en la tabla de valores experimentales.

Usando estos datos realizamos un gráfico de F versus Δl .

¿Se verifica una relación lineal entre fuerza y estiramiento? Si es así obtenga k de ella.

2. Oscilaciones exploratorias para determinar cualitativamente cómo influyen las distintas variables (masa, amplitud y constante elástica) sobre el período de oscilación.

1. Dependencia del período con k.

Ahora trabajaremos sucesivamente con los tres resortes de diferente constante elástica, y con cada uno de ellos debemos realizar lo siguiente.

Colgamos el resorte del soporte y luego anexamos el platillo con una carga de masa de 30 ó 40 gramos. Desplazamos la masa de su posición de equilibrio unos 3 ó 4 cm. aproximadamente poniéndola a oscilar. Medimos el tiempo t igual a 10 períodos de oscilación T. Luego obtenemos T = (t/10). Recuerde que debemos repetir esta experiencia para los tres resortes: blando, semiduro y duro, y expresar los resultados en la Hoja de Informe. En su informe deberá hacer los comentarios pertinentes a la variación o no del período de oscilación, dejando fijo el valor de la masa y de la amplitud inicial de oscilación para distintos resortes (variación de k).

Recuerde también que para estimar la incerteza es necesario realizar varias veces la medición de cualquier magnitud – en este caso del intervalo de diez períodos.

Se puede considerar que el tiempo de reacción del operador introduce una incerteza Δt igual a la desviación cuadrática media de una serie de 10 lecturas del intervalo de interés (que es el conjunto de 10 períodos consecutivos), y que esa cantidad se puede determinar una sola vez para todas las lecturas de tiempos.

De manera que para comenzar a medir los períodos, con el primero de ellos se hará una serie de diez mediciones del mismo conjunto de oscilaciones (10 oscilaciones), que se registrarán y se utilizarán para calcular su desviación cuadrática media. Luego este valor se utilizará como valor estimado de la incerteza Δt de la medición de cualquier intervalo de tiempo de este Trabajo Práctico.

2. Dependencia del período con amplitudes de oscilación: Elegimos el resorte semiduro, cargado con la masa del procedimiento anterior y medimos el tiempo t correspondiente a diez períodos para distintas amplitudes iniciales de oscilación y luego calculamos T. Defina un rango de pequeñas amplitudes entre 0 y 7,0 cm. y obtenga al menos cinco valores de período versus amplitud. Exprese sus resultados en una tabla. Observando los valores tabulados comente, en la Hoja de Informe y para el rango de trabajo, si existe o no una dependencia del período sobre la amplitud de oscilación.

3. Dependencia del período con la masa: Fijamos una posición inicial l_0 del resorte semiduro, con el platillo anexado y agregamos una carga inicial de 20 gramos. Medimos el período de oscilación para pequeñas amplitudes siguiendo el procedimiento que realizamos anteriormente. Ahora vamos agregando de a 10 ó 20 gramos y repitiendo la operación anterior, hasta completar al menos 8 ó 10 valores experimentales. Exprese sus valores en la tabla. Tras el análisis de estos resultados experimentales deberá explicar cualitativamente como se modifica el período de oscilación de una masa anexada a un resorte cuando ésta aumenta.

3. Relación entre T^2 y la masa del cuerpo suspendido.

Elevando al cuadrado la expresión para el período dada en la descripción inicial tenemos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}\, m$$

Esto expresa una relación de proporcionalidad entre T^2 y m, que puede verificarse de manera gráfica con facilidad.

Para ello complete la columna T^2 en la tabla de la Hoja Informe, y luego confeccione un gráfico T^2 versus m.

Compruebe la relación lineal entre T^2 y m ; luego obtenga de ella el valor de la pendiente de la gráfica ($4\pi^2 / k$), y de ella obtenga la constante elástica k (trabaje en unidades del SIU).

Compare con el valor medido en el punto anterior.

Realice sus comentarios en el Informe.

PARTE 2. OSCILACIONES DEL PÉNDULO SIMPLE

1. Oscilaciones exploratorias para determinar cualitativamente cómo influyen las distintas variables (masa, amplitud y longitud del péndulo) sobre el período.

Trabajamos con un procedimiento similar al que utilizamos con el resorte. Primero armamos el péndulo con aproximadamente 70 cm. de hilo y la esfera de acero de aproximadamente 100 gramos. *La longitud* L *debe determinarse desde el centro de oscilación al centro de la esfera*.

1. Influencia de la amplitud sobre el período.

El valor máximo que alcanza el ángulo entre el hilo y la vertical en cada oscilación se llama amplitud angular de la oscilación.

Según la fórmula del período, no debe depender de la amplitud de las oscilaciones. Pero en realidad la fórmula mencionada, como se vio, se obtiene como aproximación si la amplitud es pequeña. De manera que esperamos que no se detecte variación del período con la amplitud sólo mientras ésta sea pequeña; pero debemos investigar lo que sucede en el rango desde 0° hasta prácticamente un ángulo recto.

Mediremos cuidadosamente la amplitud angular inicial θ usando el transportador antes de lanzar a oscilar el péndulo, una vez iniciado el movimiento medimos un tiempo de oscilación igual a diez períodos y obtenemos $T = (t/10)$. De ser posible repetimos la operación para cada ángulo y obtenemos un promedio para T. Luego procedemos a graficar estos valores cómo T versus θ y a determinar el rango donde el período no varía, a ese intervalo de ángulos lo llamaremos “intervalo de ángulos pequeños”. Debemos tener cuidado al hacer oscilar el péndulo a amplitudes crecientes de manera tal que se conserve el plano de oscilación y la masa no gire alrededor de la vertical. Además debemos preguntarnos sobre la desviación que se produce para amplitudes grandes de oscilación y comentar en el informe al respecto.

2. Influencia de la longitud sobre el período.

Seguimos la pista sobre la influencia de la longitud del péndulo. Podemos iniciar nuestras mediciones con un trozo de hilo de un metro aproximadamente y luego ir enrollándolo. Para cada longitud medimos $T = (t/10)$ y lo tabulamos en la Hoja de Registro. La lectura de la tabla debe verificar que el período aumenta si la longitud del péndulo aumenta.

3. Influencia de la masa sobre el período.

Por último construimos un péndulo con hilo y el platillo portapesas cargado con una masa inicial de 20 gramos, haciendo oscilar este péndulo, medimos T para distintos valores de masa que obtenemos agregando al platillo pesitas de 10 o 20 gramos. No debemos olvidar que la longitud L debe determinarse desde el centro de oscilación al centro de la masa.

Recoja sus resultados en tablas, grafique y verifique que T no depende de la masa.

2. Relación entre T^2 y la longitud del péndulo.

Elevando al cuadrado la expresión para el período dada en la descripción inicial tenemos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

Esto expresa una relación de proporcionalidad entre T^2 y L, que puede verificarse de manera gráfica con facilidad, de la misma manera que hicimos con las oscilaciones masa-resorte.

Para ello complete la columna T^2 en la tabla de la Hoja Informe, y luego confeccione un gráfico T^2 versus m.

Compruebe la relación lineal entre T^2 y L , y obtenga del gráfico el valor numérico de la pendiente de la recta T^2 versus L. Luego obtenga de ella el valor de g y verifique que sea el valor debido.

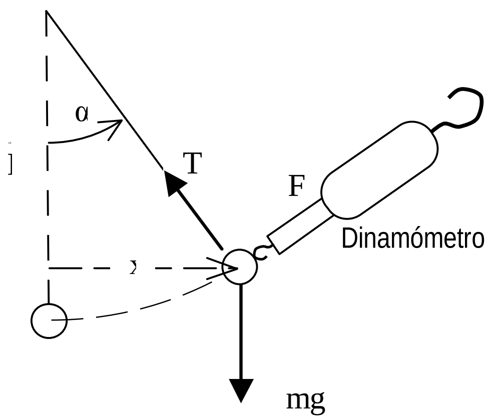
Si el péndulo oscilara sobre la superficie lunar ¿su período sería mayor, igual o menor que en la Tierra? ¿Porqué?

3. Comportamiento elástico de la fuerza necesaria para apartar al péndulo de su posición de equilibrio.

Amerita medir la fuerza F para apartar el péndulo de la posición de equilibrio, de modo tal que F sea la equilibrante de la componente tangencial del peso, fuerza impulsora del movimiento armónico, y ver si puede esperarse un comportamiento elástico.

Para esto armamos el péndulo con la esfera de hierro de 100 gramos de masa y de aproximadamente 70 cm de longitud (el mismo que usó anteriormente).

Trabajando con la cinta métrica y el dinamómetro medimos los valores de fuerza correspondientes a desplazamientos de la masa de su posición de equilibrio en el rango de pequeños ángulos, como se ilustra. No debemos olvidar que el dinamómetro está calibrado para la posición vertical y ahora lo utilizamos oblicuamente, por lo tanto debemos modificar adecuadamente la calibración, y prever cierto error en los resultados. También hay que cuidar de ubicar al dinamómetro sobre la dirección tangencial a la trayectoria del péndulo.



Reunimos entre 5 u 8 datos en una tabla y construimos un gráfico de F versus x.

¿Puede decir que la relación es de proporcionalidad directa?

Si es así obtenga la constante de proporcionalidad entre F y la elongación x.

Aplicando la idea de que esta esfera debería oscilar como si estuviera sujeta al extremo de un resorte de constante elástica k* igual a la constante de proporcionalidad recién hallada, encuentre el período aplicando la fórmula del resorte:

$$T^* = 2\pi\sqrt{m/k^*}$$

Y compare con el valor medido anteriormente. Tenga en cuenta que no se espera mucha exactitud en este valor.

HOJA DE INFORME T.P.L. Nº 2

PARTE 1.

LAS OSCILACIONES DEL SISTEMA MASA-RESORTE

MEDICIÓN de la MASA DEL RESORTE SEMIDURO

m = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .
. . . .

MEDICIÓN de la EXTENSIÓN DEL RESORTE SEMIDURO SOBRE LA MESA

l_{0H} = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .
. . . .

MEDICIÓN de la EXTENSIÓN DEL RESORTE SEMIDURO COLGADO DEL SOPORTE

l_0 = ... ± . . . .

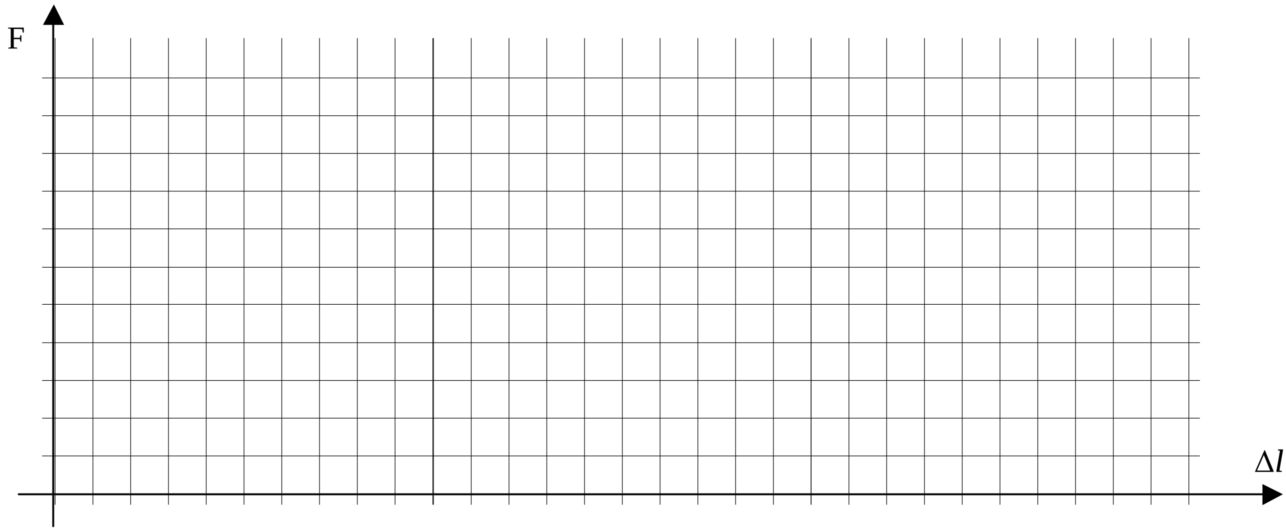
Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .
. . . .

TABLA PARA LAS MEDICIONES DE ESTIRAMIENTO DEL RESORTE vs. MASA

N	m_i [kg]	Inc(m) [kg]	F_i [N]	Inc(F_i) [N]	l_i [m]	Inc(l_i) [m]	$\Delta l_i = (l_i - l_0)$ [m]	Inc(Δl_i) [m]
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								

DETERMINACIÓN DE LA CONSTANTE ELÁSTICA.

Representación gráfica de fuerza en función de desplazamiento



Valor de la constante elástica k = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene del gráfico el valor de k y como estima su incerteza. ¿Es nula la ordenada al origen? . . . .

. . . .

. . . .

DEPENDENCIA DEL PERÍODO T CON LA DUREZA DEL RESORTE

Determinación de la incerteza Δt debida al tiempo de reacción.

Se adoptará Δt igual a la desviación estándar del siguiente registro de 10 mediciones de un intervalo de 10 períodos:

Valor medio: $t = \frac{\sum t_i}{10}$ = ...   Desviación estándar: σ = ...

RESORTE	t [seg]	T = (t/10) [seg]	Inc(T) [seg]
BLANDO			
SEMIDURO			
DURO			

Valores utilizados en la experiencia: m = ... y amplitud de oscilación . . . .

Comentario . . . .
. . . .
. . . .

DEPENDENCIA DEL PERÍODO T CON LA AMPLITUD DE OSCILACIÓN A

N	A [m]	Inc(A) [m]	t [seg]	T = (t/10) [seg]	Inc(T) [seg]
1					
2					
3					
4					
5					

Valores utilizados en la experiencia: m = ... y resorte de cte. k = ...
Comentario . . . .
. . . .
. . . .

DEPENDENCIA DEL PERÍODO T CON LA MASA

N	$m_{parcial}$ [kg]	Inc(m_p) [kg]	m_{total} [kg]	Inc(m_t) [kg]	t [seg]	T = (t /10) [seg]	Inc(T) [seg]	T^2 [seg^2]	Inc(T^2) [seg^2]
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

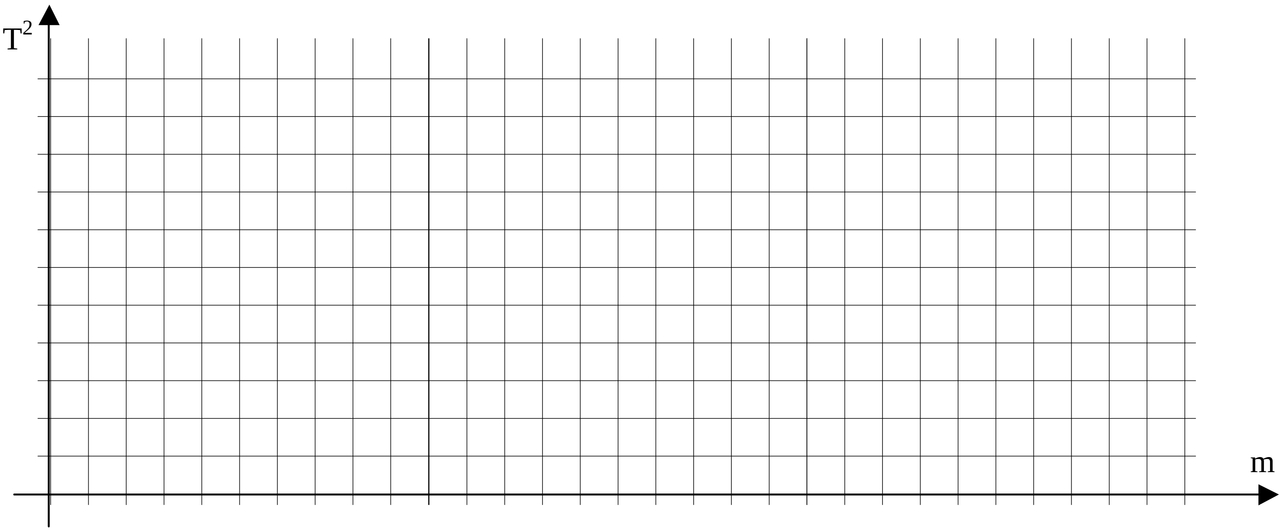
Valores utilizados en la experiencia: Amplitud A = ... y resorte de cte. k = ...

Comentario . . . .

. . . .

. . . .

Representación gráfica de T^2 versus m



Valor de la constante elástica k = ... ± . . . .

Realice comentarios sobre la relación T^2 versus m. Indique cómo obtiene del gráfico el valor de k, cómo estima su incerteza y compare con los valores obtenidos anteriormente. . . . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

PARTE 2.

OSCILACIONES DEL PÉNDULO SIMPLE

CONSTRUCIÓN DEL PÉNDULO SIMPLE

Longitud del hilo: L = ... ± . . . . . Masa de la esfera: m = ... ± . . . . .

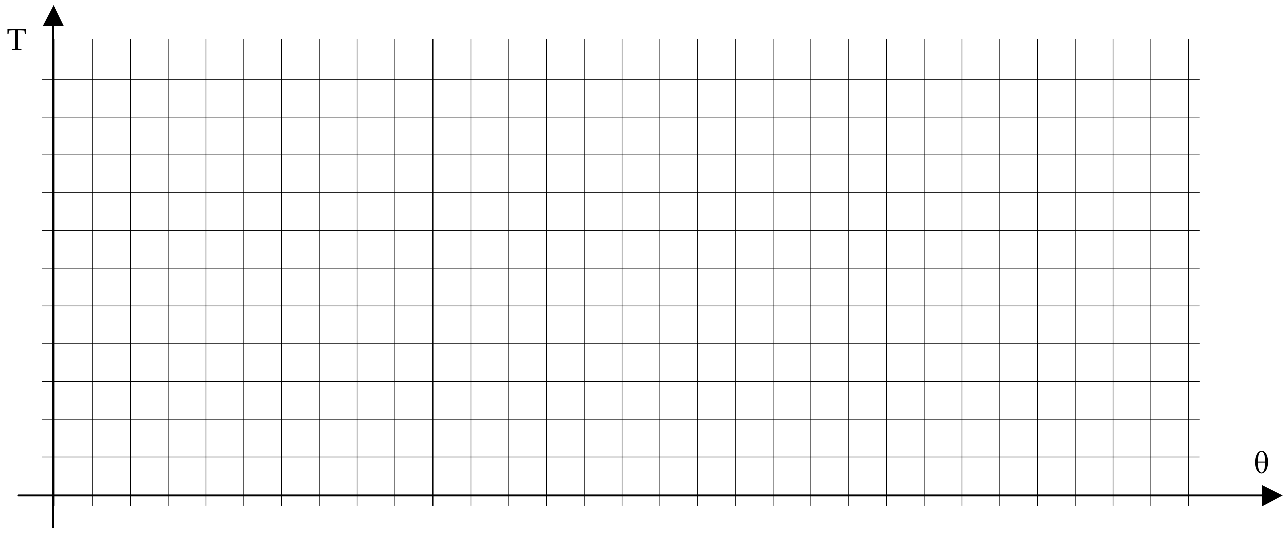
Indique cómo obtiene la incerteza para ambos casos. . . . .

.. . .

INFLUENCIA DE LA AMPLITUD DE OSCILACIÓN SOBRE EL PERÍODO

N	θ [°]	Inc(θ) [°]	t [seg]	T = (t/10) [seg]	Inc(T) [seg]
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Representación gráfica de T versus θ



Intervalo de ángulos pequeños . . . .

Comentario . . . .

. . . .

. . . .

INFLUENCIA DE LA LONGITUD DEL PÉNDULO SOBRE EL PERÍODO

N	L [m]	Inc(L) [m]	t [seg]	T = (t/10) [seg]	Inc(T) [seg]	T^2 [seg]	$Inc(T)^2$ [seg]
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Comentario . . . .

. . . .

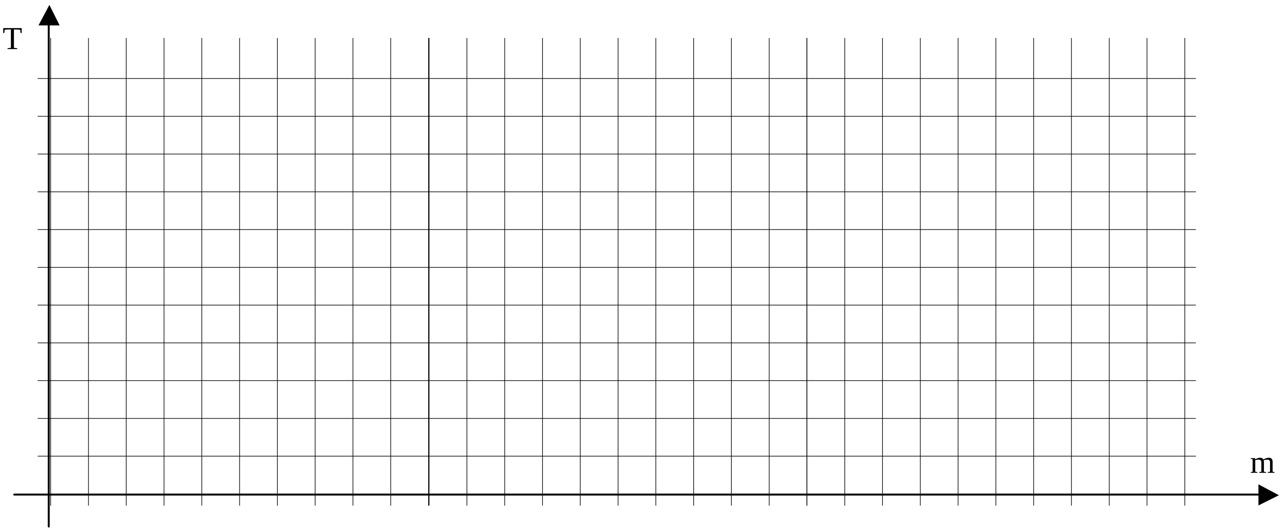
. . . .

DEPENDENCIA DEL PERÍODO T CON LA MASA

N	$m_{parcial}$ [kg]	$Inc(m_p)$ [kg]	m_{total} [kg]	$Inc(m_t)$ [kg]	t [seg]	T = (t/10) [seg]	Inc(T) [seg]
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

9							
10							

Representación gráfica de T versus m



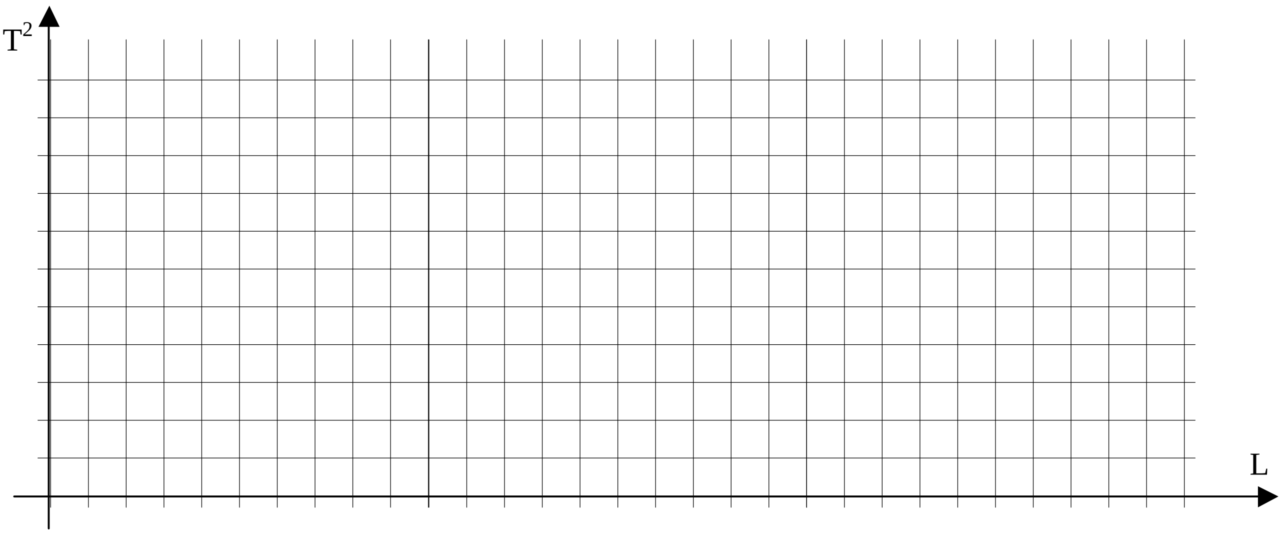
Comentario . . . .

. . . .

. . . .

RELACIÓN ENTRE T^2 Y LA LONGITUD L DEL PÉNDULO.

Representación gráfica de T^2 versus L



Valor obtenido de la aceleración de la gravedad   g = ... ± . . . .

Comentario . . . .

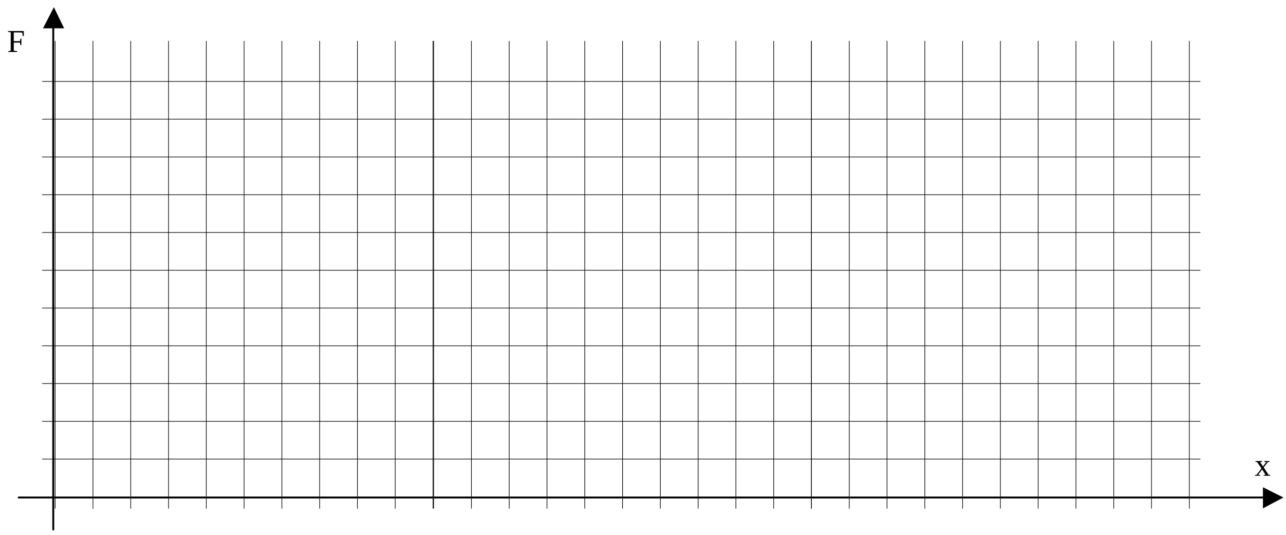
. . . .

. . . .

COMPORTAMIENTO ELÁSTICO DE LA FUERZA IMPULSORA DEL PÉNDULO SIMPLE

N	F [N]	Inc(F) [N]	x [m]	Inc(x) [m]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

Representación gráfica de F versus x



Valor obtenido del período T* = ... ± . . . .

Comentario . . . .

. . . .

. . . .

Trabajo Práctico de Laboratorio nº 3

TRABAJO Y ENERGÍA MECÁNICA

1. Objetivos

- Verificar leyes del trabajo y la energía mecánica en movimientos elegidos en los que intervienen la gravedad, el rozamiento, y medios elásticos.
- Reflexionar sobre diversas características de estos movimientos.
- Adquirir familiaridad con el cálculo de incertezas en mediciones indirectas.

2. Equipo y Materiales requeridos

1dinamómetro 0 – 6 N.

Hilo

1 resorte de alrededor de 20 N/m de constante elástica.

1 bolita de alrededor de 100 g, con gancho que resista impactos.

Cinta métrica

Balanza de 200 g de alcance.

Papel blanco y papel carbónico

3. Descripción general y planteos básicos.

El teorema del trabajo y la energía cinética, que es de fundamental importancia en el estudio de los movimientos lineales, dice que:

$$W_{FR} = \Delta E_c$$

Donde:

$E_c = ½\, m\, v^2$ es la energía cinética de un cuerpo dado (sólo nos referiremos aquí a movimientos lineales), y

W_{FR} es el trabajo de la fuerza resultante de todas las que actúan sobre el cuerpo en un proceso considerado.

Aunque esta expresión es válida para todos los casos posibles, es muy cómodo separar las fuerzas actuantes en dos grupos: las conservativas y las no conservativas.

Las **fuerzas conservativas**, como es el caso de la fuerza de gravedad, o la fuerza elástica de un resorte, permiten definir **energías potenciales**, tales que la suma $E_c + E_p$, que se denomina energía mecánica total, E_T, se conservaría en ausencia de otros agentes.

Las fuerzas no conservativas, como el rozamiento, o la fuerza aplicada por agentes externos ocasionales, en cambio no permiten definir algo que se conserve, y hacen que el teorema del trabajo y la energía cinética pueda reescribirse de la manera siguiente:

$$W^* = \Delta E_T$$

En donde W* es el trabajo de las fuerzas no conservativas.

En muchas situaciones típicas en las cuales W* es muy pequeño y puede despreciarse, la expresión se transforma en el enunciado de la “Conservacióрn de la Energía Mecánica”:

$$\Delta E_T = 0$$

Si bien las situaciones ideales con W* = 0 nunca se verifican exactamente en la práctica, sí es muy común encontrar situaciones que se aproximan suficientemente al caso ideal, y para las cuales, la conservación de la energía mecánica se verifica bastante bien durante un lapso limitado de tiempo, ayudando a una interpretación simplificada de lo que sucede.

En este trabajo práctico un agente externo estirará un resorte, el cual acumulará como energía potencial el trabajo hecho por el agente, para luego impulsar a un cuerpo según dos planteos diferentes:

En la Primera Parte el cuerpo será impulsado horizontalmente por el resorte, acumulando como energía cinética toda la energía potencial que inicialmente tenía el resorte.

En la Segunda Parte el cuerpo será impulsado verticalmente, de manera que la energía potencial inicialmente acumulada por el resorte, se repartirá entre cinética y potencial gravitatoria del cuerpo, en una proporción que irá cambiando con la altura, como se verá luego en detalle.

4. Procedimiento

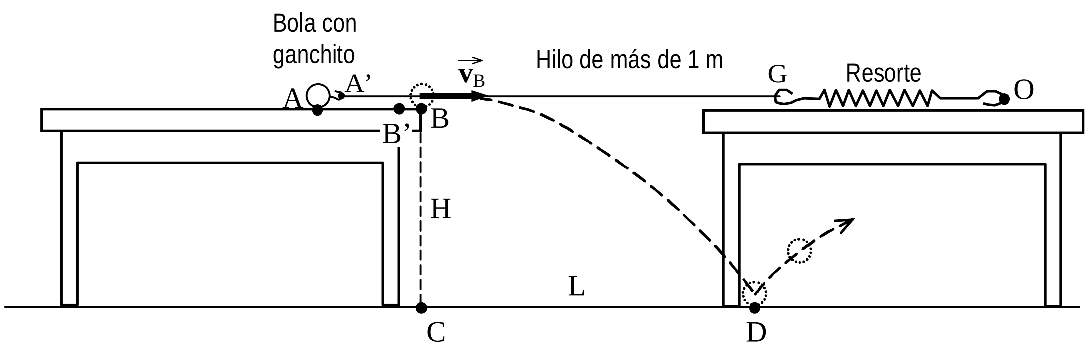
PARTE 1. TRABAJO Y ENERGÍA EN IMPULSO HORIZONTAL

Se trata de comparar la energía cinética que adquiere un cuerpo que es impulsado sobre una superficie horizontal por un resorte que se libera, con el trabajo realizado previamente para estirar el resorte, y, descontando lo que se pierde por rozamiento, verificar la conservación de la energía dentro de los errores experimentales.

Para determinar la velocidad que adquiere el cuerpo se realiza el procedimiento cerca del borde de una mesa horizontal, de manera que el cuerpo cae al piso luego de ser impulsado, y aplicando las leyes correspondientes a esta caída libre, como veremos, se determina la velocidad con que el cuerpo inició la misma.

De manera que se trabaja sobre una mesa lisa y horizontal situada a una altura H bien determinada sobre el piso (también liso y horizontal). El cuerpo es impulsado hacia el borde de la mesa, de manera que cuando lo cruza (con la velocidad adquirida que se desea determinar), inicia horizontalmente una caída libre. Como veremos, midiendo la distancia horizontal L que el cuerpo recorre antes de impactar contra el suelo, se determina la velocidad buscada.

Un detalle importante de la propuesta consiste en que el impulso se da al cuerpo partiendo de un resorte estirado, y no comprimido, y para evitar que el resorte estorbe la caída libre del cuerpo, se conectan ambos con un hilo suficientemente largo, como se muestra en la figura.



De manera que el resorte se sujeta en algún punto O bastante lejano, preferiblemente sobre otra mesa (donde tenga una superficie horizontal sobre la cual estar apoyado). Un hilo suficientemente largo une el extremo libre del resorte (G) con el cuerpo a ser impulsado (una bola con un ganchito), de manera que con el resorte sin estirar la bola quede apoyada sobre la mesa, en B', cerca del borde B.

Antes de comenzar se mide la altura H = BC, y se registra su valor. Luego se determina cuidadosamente la posición del punto C, justo verticalmente debajo del punto B en que la bola pierde contacto con la mesa comenzando su caída libre, y se lo marca en el piso.

A continuación se realizan algunas pruebas corriendo la bola hasta algún punto A (de manera que el resorte se estire unos 20 o 30 cm), soltándola y encontrando aproximadamente el punto de impacto con el suelo D.

Una vez encontrado D, se fija sobre el piso (con cinta adhesiva) una hoja de papel cubriendo la zona. Luego se coloca un trozo de papel carbónico sobre ella (suelto, sin fijarlo), de manera que cada impacto dejará sobre la hoja una marca cuya ubicación podrá medirse.

Los cálculos involucrados en el procedimiento son los siguientes.

Trabajo realizado estirando el resorte:

Medición de F.

Se mide la fuerza F total estirando el resorte hasta la posición elegida, A, en la cual se coloca una marca o un cuerpo que haga de tope. Para ello mientras un operador mantiene la bola en A, otro coloca una marca en la mesa indicando la posición del extremo G del resorte estirado.

Luego se afloja el hilo y se mide con el dinamómetro, tirando del extremo G, la fuerza necesaria para llevar ese punto hasta la marca en la mesa.

Se mide tres o cuatro veces la fuerza para descartar fallas del dinamómetro, que a veces se traba un poco, hasta lograr que se repita el valor dentro de la apreciación del instrumento.

Hay que cuidar que el cero del dinamómetro esté calibrado para medir horizontalmente.

También hay que revisar, después de hacer algunos lanzamientos, que siempre que la bola llega a su tope de partida en A, el extremo del resorte llegue a su posición marcada. De no ocurrir eso significa que el hilo se está estirando, o los nudos están cediendo, lo cual debe ser reparado.

También se pueden ensayar otras variantes para medir la fuerza, cuidando siempre que corresponda exactamente a la misma posición de partida de la bola.

Medición del estiramiento

El estiramiento del resorte es AB', y se mide sobre la mesa. Hay que poner cuidado en la determinación del punto B' correspondiente a la fuerza cero, ya que, como se verá en la práctica, es muy impreciso.

Con estas dos mediciones el trabajo será:

$$W = \frac{F \times AB'}{2}$$

Determinación de la velocidad

En ausencia de rozamiento con el aire, se tiene que todo movimiento de caída libre proyectado sobre un eje horizontal es uniforme. De manera que la componente horizontal de la velocidad se mantiene constante, y puede calcularse dividiendo la distancia horizontal recorrida por el tiempo.

En este caso la componente horizontal de la velocidad es la velocidad inicial de la caída, v_B , de manera que será:

$$v_B = \frac{L}{t_{BD}}$$

Y por otra parte, el tiempo demorado en la caída, si ésta se inicia horizontalmente, sólo depende de la altura H, y puede ser calculado para todos los lanzamientos según la expresión:

$$t_{BD} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Para mejorar la precisión se deberán efectuar unos diez lanzamientos con la misma posición inicial A. Se procederá a soltar diez veces la bola de la posición marcada, para que se graben sobre el papel en el piso los diez impactos.

ANTES de despegar la hoja de papel se traza una línea perpendicular al movimiento, promediando la ubicación del punto D, y hasta ella se mide la distancia L = CD.

El rozamiento

Aunque el rozamiento será de poca importancia en esta experiencia, también corresponde determinarlo, lo cual es muy sencillo.

Es suficiente arrastrar con lentitud la bola sobre la mesa con el dinamómetro para medir la fuerza necesaria, F_r. Si ésta es suficientemente pequeña (mucho más pequeña que la fuerza que se aplicó para estirar el resorte), no se requerirá gran exactitud en su valor.

Nuevamente se recomienda hacer varias determinaciones y promediar el valor.

Una vez determinada F_r se tendrá:

$$W_{roce} = -F_r \times AB$$

Masa del cuerpo

Podrá determinarse con una balanza, o también pesando el cuerpo con el dinamómetro, y dividiendo por la gravedad g.

Sobre las incertezas:

La fuerzas.

En todos los casos se cuidará de que el cero del dinamómetro esté calibrado para utilizarlo horizontalmente, y se repetirán las mediciones de cada fuerza hasta lograr que los valores se repitan con diferencias que estén dentro de la apreciación del instrumento.

Para cada valor se calculará el promedio de todos los valores registrados con este criterio, y se estimará su incerteza en ± la apreciación.

Las distancias.

Las distancias se medirán con cinta métrica de apreciación 1mm.

Pero se advertirá que no todas las distancias determinadas están afectadas de esa incerteza.

La altura H es un caso que puede medirse muy bien, estimando que la incerteza puede ser ± 1 o 2 mm.

Lo mismo puede decirse de la distancia AB, pero no de la AB’, ni de la CD.

Para el punto B’ se encontrará que es difícil determinar exactamente en dónde corresponde la longitud de equilibrio del resorte, de manera que se deberá estimar un intervalo de posiciones de la bola para todo el cual puede considerarse que el estiramiento del resorte es nulo, y ése será el intervalo de incerteza en B’.

Para la distancia horizontal CD, se tendrá que estimar la incerteza en la ubicación de C, justo en la vertical que pasa por B, y también la incerteza en la ubicación del punto de caída D.

Para ubicar mejor el punto C podrá utilizarse una plomada, así como escuadra, regla, o lo que ayude según la forma de la mesa, y también se determinará un intervalo dentro del cual se considera que se garantiza la ubicación de C. Se podrá advertir que la incerteza en la ubicación de D es suficientemente grande como para que no sea necesario poner demasiado esfuerzo en la ubicación exacta de C.

Para ubicar el punto D se tendrán registrados 10 puntos de impacto. Algunos que se considere que han fallado por alguna razón pueden tacharse (se los consideraría “errores groseros”). Una línea perpendicular a la dirección del movimiento, que promedie aproximadamente la ubicación de los puntos aceptados determinará la ubicación de D, con una incerteza estimada aproximadamente del valor del ancho de la franja en la que están la mayor parte de los impactos.

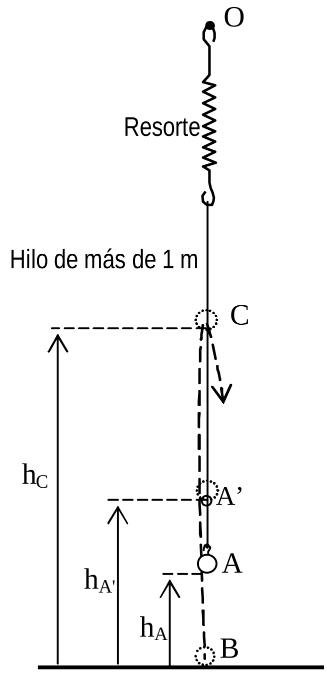
En la hoja de trabajo se registrarán todos los valores medidos con las incertezas determinadas de esta manera, y luego se aplicarán las fórmulas de propagación de errores para calcular las incertezas en los valores de energías y trabajos, y sobre la base de esos valores decidir la verificación de las leyes correspondientes de la energía.

PARTE 2. TIRO VERTICAL CON RESORTE

En esta parte se propone impulsar el cuerpo de la misma manera que en la parte anterior, es decir a partir de un resorte estirado que se libera, pero verticalmente, y, midiendo la altura que alcanza, verificar la conservación de la energía mecánica.

De la misma manera que antes, para evitar que el resorte interfiera en el movimiento luego de que el resorte se contrae impulsando al cuerpo, se propone colgar el resorte de un soporte elevado (extremo O), luego un hilo suficientemente largo del otro extremo, y de él el cuerpo.

La altura del soporte y la longitud del hilo se regularán para que estirando el sistema hasta que la bola toma contacto con el piso en B, al soltarla ésta llega hasta un punto C a una altura que se considere adecuada.



Mediciones

En la realización de esta experiencia es necesario determinar, por una parte, la energía que almacena el resorte, para lo cual habrá que medir su estiramiento, y su constante elástica, o la fuerza con que se lo estira, y por otra parte la energía potencial de la bola en el campo gravitatorio, para lo cual habrá que medir su masa y la altura alcanzada.

De manera que, por una parte, para determinar estiramientos y energías potenciales habrá que medir alturas.

Medición de alturas.

Se recomienda elegir el nivel de referencia, B, como el punto más bajo, desde el cual se soltará la bola, como se muestra en la figura. En este caso no será necesario medir su altura, la que será automáticamente $h_B = 0$.

Las otras alturas que deberán medirse serán:

h_A : es la altura del fondo de la bola cuando queda en reposo en equilibrio. Es claro que en esta situación el resorte no está en su longitud de equilibrio, sino que está estirado equilibrando el peso de la bola.

$h_{A'}$: es la altura del fondo de la bola cuando el resorte está en su longitud de equilibrio. Para determinarla hay que superar algunas dificultades, ya que se debe sostener la bola en una posición en la cual el hilo se afloja y el resorte queda en su longitud de equilibrio, pero sin elevarla en exceso. Es decir, cualquier mínimo descenso por debajo de A' debe iniciar el estiramiento del resorte.

h_C : es la altura máxima que alcanza el fondo de la bola en su ascenso luego de ser soltada. Es la más difícil de determinar. Para hacerlo se recomienda hacer varias pruebas preparatorias para tener una idea aproximada. Luego se coloca un soporte con una hoja de papel en la cual se han trazado dos líneas horizontales bien visibles con 2 cm de separación entre ellas.

Se pretende que al llegar la bola al punto más alto de su trayectoria, se vea que el fondo de la misma queda entre ambas líneas, de manera que el procedimiento práctico podría consistir en:

1) Después de las determinaciones de prueba, ubicar la hoja de papel con las dos líneas en el soporte a la altura adecuada, un par de cm por detrás del hilo, de manera que la bola en su movimiento pase cerca, pero sin tocar la hoja.

2) Un observador se ubica a aproximadamente 1 m de distancia, de frente al papel, con sus ojos a la misma altura de las líneas.

3) Cuando el operador correspondiente suelta la bola desde el punto de partida elegido, el observador indica si el fondo de la bola ha llegado hasta el espacio entre las líneas, o si le falta o le sobra. De acuerdo con esto se procede a subir o bajar el papel.

4) Se repite el procedimiento hasta que se logre que se vea llegar el fondo de la bola hasta el espacio entre las líneas, con seguridad todas las veces, repitiendo al menos cinco veces el lanzamiento. Cuando se haya logrado esto, se mide h_C desde el punto más bajo, B, hasta el punto medio entre las líneas, y se considera la incerteza $\pm$ 1 cm.

Medición de fuerzas

Hay varias posibilidades interesantes para determinar la parte de la energía que tiene que ver con el resorte. Aquí se describe un procedimiento recomendado, pero se deja libertad para innovar si se lo considera conveniente.

Para medir la fuerza que el resorte aplica al cuerpo, lo más fácil es desprender el resorte del soporte en O, y sostenerlo de allí con el dinamómetro.

Así, reteniendo la bola en B, y estirando con el dinamómetro el extremo del resorte hasta el punto de anclaje O en el soporte, se mide la fuerza F_O, con la cual, descontando el peso del resorte, se tiene la fuerza inicial, máxima, que aplica el hilo al cuerpo en B:

$$F_B = F_O - \text{peso resorte.}$$

Se mide varias veces, hasta que se repita el valor dentro de la apreciación del instrumento, y se descuenta el peso del resorte.

Luego puede medirse la masa de la bola y del resorte utilizando una balanza - aunque el peso de estos elementos también puede determinarse directamente con el dinamómetro.

De manera que si consideramos que,

$$F_A = \text{peso de la bola} = m\,g\ ,$$

Con las alturas medidas antes podemos determinar la constante elástica del resorte de varias maneras. Por ejemplo:

$$k = \frac{F_A}{h_{A'} - h_A}$$

$$k = \frac{F_B}{h_{A'}}$$

$$k = \frac{F_B - F_A}{h_A}$$

Se recomienda hacer los tres cálculos, y promediar el valor obtenido, o bien graficar la fuerza en función de h, y obtener la pendiente de la gráfica, verificando previamente la buena alineación de los puntos. En caso de no haber una buena alineación, se recomienda repetir las mediciones de alturas y fuerzas hasta lograrlo.

Verificación de la conservación de la energía.

Desde que la bola es soltada en B, hasta que pasa por A', recibe un impulso del resorte que le transfiere toda la energía potencial previamente almacenada (en B). Y debemos tener mediciones con datos para calcular esa energía.

Desde B hasta C, o sea en todo su trayecto, sobre la bola actúa la gravedad. De manera que desde B hasta A' sobre la bola actúan el resorte y el peso, mientras que desde A' hasta C sólo actúa el peso.

Dado que la fuerza del resorte se equilibra con el peso en el punto A, tenemos que la fuerza neta es hacia arriba desde B hasta A, cero en A, y hacia abajo desde allí hasta C. Además la parte con fuerza neta hacia abajo se divide en dos partes: desde A hasta A' el peso hacia abajo es compensado parcialmente por la fuerza del resorte hacia arriba. En este tramo la fuerza del resorte es menor y va desapareciendo, de manera que la fuerza neta es hacia abajo y crece hasta que en A' alcanza el valor del peso, que se mantiene constante hasta C (y luego continúa, pero sólo estamos analizando el movimiento de subida).

De este modo, si en B definimos altura cero, allí sólo tenemos energía potencial del resorte:

$$E_{pB} = \tfrac{1}{2}\, k\, h_{A'}^2$$

En A tenemos energía potencial del resorte y gravitatoria, además de energía cinética, que es máxima:

$$E_{pA} = \tfrac{1}{2}\, k\, (h_{A'} - h_A)^2 + m\, g\, h_A$$

$$E_{cA} = \tfrac{1}{2}\, m\, v_A^2$$

En A' tenemos energía cinética, y potencial sólo gravitatoria, y en el punto más alto, C, sólo hay energía potencial gravitatoria:

$$E_{pA'} = m\, g\, h_{A'}$$

$$E_{cA} = \tfrac{1}{2}\, m\, v_{A'}^2$$

$$E_{pC} = m\, g\, h_C$$

Dado que no se han medido las velocidades, sólo tiene sentido verificar la conservación de la energía entre los puntos sin energía cinética, B y C (el cual es además el cálculo más sencillo).

Y para completar el trabajo se pide:

a) Utilizar los datos medidos para, suponiendo la conservación, calcular las energías cinéticas y valores de la velocidad en A y en A'. Verificar que la velocidad es máxima en A.

b) Verificar que $v_A = \omega\, h_A$, con $\omega = \sqrt{k/m}$, como corresponde al hecho de que el movimiento desde B hasta A es exactamente ¼ de oscilación armónica de amplitud h_A (el movimiento sigue siendo armónico desde B hasta A', es decir mientras el hilo está tenso porque el resorte está aplicando fuerza).

HOJA DE INFORME T.P.L. Nº 3

PARTE 1.

TRABAJO Y ENERGÍA EN IMPULSO HORIZONTAL

MEDICIÓN de la MASA

m = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

MEDICIÓN de la ALTURA de CAÍDA

H = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

CÁLCULO del TIEMPO de CAÍDA:

$$t_{BD} = \sqrt{\frac{2\,H}{g}} = \;. . . . . \pm \;. . . . . . .$$

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

MEDICIÓN de la FUERZA INICIAL del RESORTE

Valores medidos (N)

RESULTADO: F = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

MEDICIÓN de la FUERZA de ROZAMIENTO

Valores medidos (N)

RESULTADO: $F_r =$ . . . . ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

MEDICIÓN del ESTIRAMIENTO del RESORTE

AB' = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

MEDICIÓN de la DISTANCIA DESLIZADA

AB = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

CÁLCULO del TRABAJO del RESORTE

$$W = \frac{F \times AB'}{2} = \text{. . . . .} \pm \text{. . . . . . .}$$

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

CÁLCULO del TRABAJO de ROZAMIENTO

$$W = -F \times AB = \text{. . . . .} \pm \text{. . . . . . .}$$

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

MEDICIÓN de la DISTANCIA HORIZONTAL de CAÍDA

L = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

CÁLCULO de la VELOCIDAD

$$v_B = \frac{L}{t_{BD}} = \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \pm \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

VERIFICACIÓN TRABAJO Y ENERGÍA

Aquí presentar el cálculo final que muestra la verificación, con los comentarios que sean pertinentes.

PARTE 2.

TIRO VERTICAL CON RESORTE

MASA de la BOLA $m =$ . . . . ± . . . .

MASA del RESORTE $m_r =$ . . . . ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .
. . . .
. . . .

MEDICIÓN de las ALTURAS

$h_{A'} =$ . . . . ± . . . .

$h_A =$ . . . . ± . . . .

$h_C =$ . . . . ± . . . .

Indique cómo obtiene las incertezas. . . . .
. . . .
. . . .

MEDICIÓN de las FUERZAS

PESO de la BOLA: $F_A =$ . . . . ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .
. . . .

FUERZA MÁXIMA en O. Valores medidos (N)

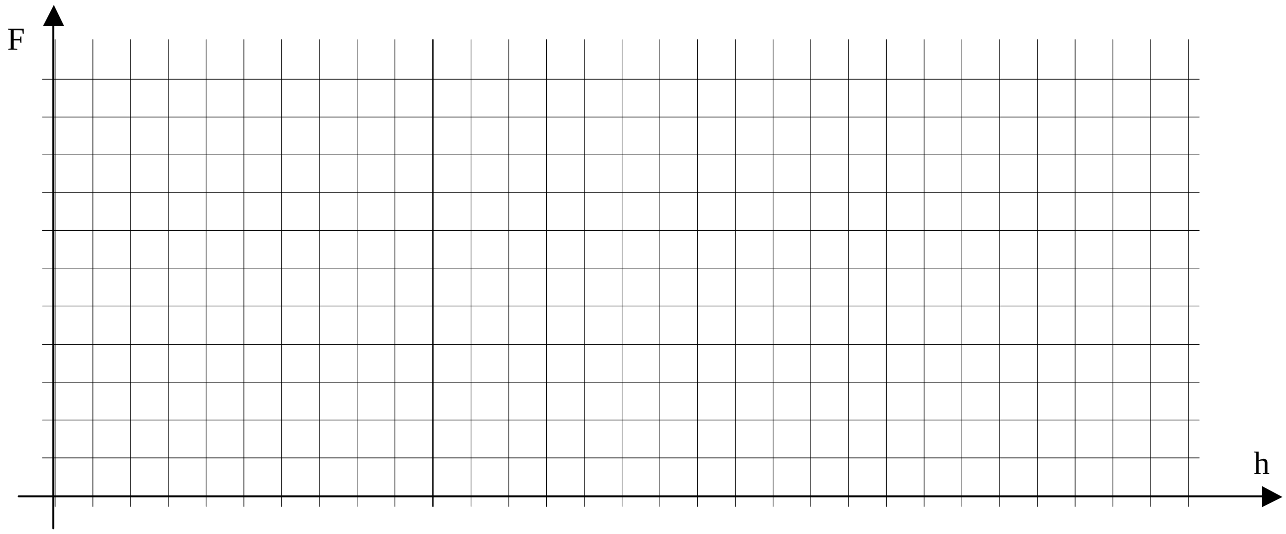
Resultado quitando peso del resorte: $F_B =$ . . . . ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .
. . . .

. . . .

DETERMINACIÓN CONSTANTE ELÁSTICA.

Representación gráfica de fuerza en función de altura para decidir valores correctos.



Valor final adoptado: k = ... ± . . . .

Indique cómo obtiene la incerteza. . . . .

. . . .

. . . .

VERIFICACIÓN CONSERVACIÓN ENERGÍA

Aquí presentar el cálculo final que muestra la verificación de la conservación de la energía entre B y C, con los comentarios que sean pertinentes, incluyendo los márgenes de error.

CÁLCULOS SUPLEMENTARIOS

Aquí presentar el cálculo de las energías cinéticas y velocidades en A y en A'. Comentar cuál es la mayor y por qué.

ENERGÍA CINÉTICA y VELOCIDAD en A

ENERGÍA CINÉTICA y VELOCIDAD en A’

COMPARACIÓN con VELOCIDAD MÁXIMA de OSCILACIÓN ARMÓNICA.

Trabajo Práctico de Laboratorio Nº 4:

DINÁMICA DE LAS ROTACIONES

---

1. Objetivos

- Calcular el momento de inercia de un volante con forma de cilindro, mediante la medición de todas las variables necesarias (que se medirán en forma directa o indirecta según cada caso) , y la posterior aplicación de la fórmula para el momento de inercia de un cuerpo con forma de cilindro.

- Hacer un análisis simplificado de las incertezas asociadas a cada una de las mediciones y de cómo estas incertezas se propagarán al realizar cada uno de los cálculos necesarios.

- Ejercitar el concepto de vector axial y su correspondiente representación gráfica.

- Desarrollar criterios para decidir si los resultados finales de las mediciones, obtenidos por diferentes caminos, pueden considerarse resultados equivalentes.

- Ejercitar los conceptos relacionados con la rotación de un cuerpo rígido, mediante el manejo de equipos diseñados para tal fin (rueda de bicicleta, banco giratorio, etc.).

- Finalmente, comprobar el valor del momento de inercia determinado en los pasos anteriores, mediante la aplicación del principio de conservación de la energía a la situación que se describe en el trabajo práctico.

2. Equipo y materiales

Disco con su eje montado sobre soportes con rulemanes y tambor para enrollar el hilo.

Prensas para sujeción.

Masa de 1 kg. y de 0,5 kg.

Trozos de hilo de diferente longitud.

Cronómetro.

Calibre.

Cinta métrica.

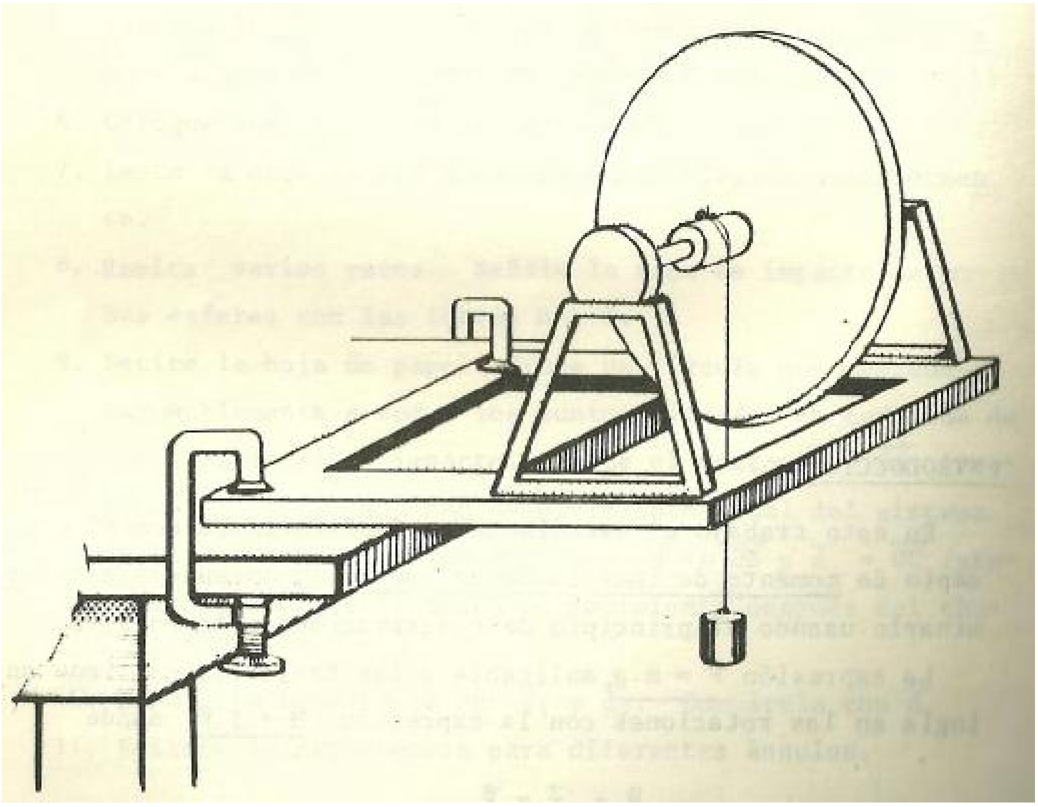
Recipiente para ubicación de las masas.

3. Descripción general y planteos básicos

Un concepto central para las rotaciones es el de *momento de inercia*, el cual se relaciona con la mayor o menor facilidad para modificar la rotación del cuerpo alrededor de un eje. (para mayores detalles consulte sus apuntes de clases teóricas).

El momento de inercia de un cuerpo es una magnitud escalar que se relaciona con la masa del cuerpo y con la forma de esa masa. Cuerpos de igual masa pero de distintas formas, tendrán diferente momento de inercia.

El presente trabajo experimental se desarrollará en tres partes bien diferenciadas, las dos primeras referidas a un volante montado como se muestra en la figura.



En la primera parte, se deberá calcular geométricamente el momento de inercia del volante, es decir, calcularlo a partir de su forma y sus medidas aplicando las fórmulas correspondientes al cuerpo geométrico que sea (disco o cilindro).

Un breve análisis y observación del volante (ver figura) muestra que su forma es de cilindro “chato”, que el tambor es un cilindro hueco y que el eje es un cilindro propiamente dicho.

El momento de inercia de un cilindro se obtiene con la fórmula:

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

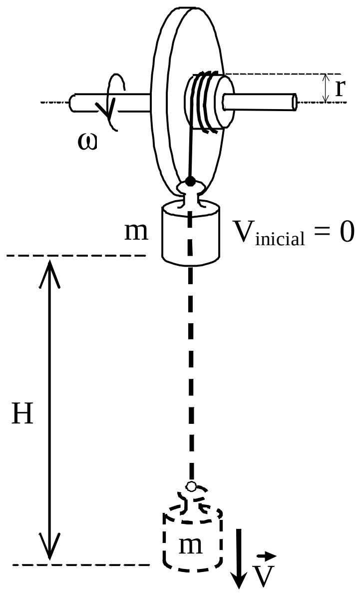
(M es la masa del volante y R es el radio del mismo)

En esta parte entonces se deberán medir todas las variables necesarias para poder aplicar esta fórmula, y determinar las incertezas correspondientes, siguiendo el procedimiento descripto más adelante.

En la segunda parte, se deberá calcular el valor del momento de inercia del mismo volante aplicando la conservación de la energía mecánica a la situación dinámica que se plantea a continuación.

Se colgará una pesa de un hilo enrollado en un tamborcito cilíndrico montado sobre el mismo eje del volante, como se ve en la figura anterior, de manera que el momento así aplicado haga girar el volante mientras la pesa desciende.

La conservación de la energía mecánica consiste en que a medida que la pesa baja, la cantidad que disminuye su energía potencial, debe aparecer como aumento de la energía cinética de las partes móviles, que son: la pesa en movimiento vertical descendente, y el sistema volante-tambor-eje, en movimiento de rotación pura (ver figura).



A partir del siguiente desarrollo usted puede determinar el valor del momento de inercia del volante, con la aplicación del principio de conservación de la energía.

Energía potencial inicial de la masa m :

$$E_P = m\ g\ H$$

(g es la aceleración de la gravedad)

Energía cinética de traslación de la masa m al llegar al piso

$$E_C = ½\, m\, V^2$$

(V es la velocidad final de la masa m al llegar al piso).

Energía cinética de rotación del volante

$$E_{CR} = ½\ I\ \omega^2$$

(ω es la velocidad angular de rotación del volante al llegar al piso e I es su momento de inercia)

Por el principio de conservación de la energía usted puede escribir:

$$m\ g\ H = ½\ m\ V^2 + ½\ I\ \omega^2 \qquad (1)$$

La expresión anterior establece que la energía potencial de la masa m, cuando está en la altura máxima con el hilo enrollado en el tambor, se transforma en energía cinética de esa misma masa al llegar al piso y en energía cinética de rotación del volante (con su eje y tambor) que gira con su mayor velocidad angular ω.

Además, como V es también la velocidad tangencial del tambor sobre el que se desenrolla el hilo podemos escribir $\omega = V/ r$ (r es el radio del tambor donde se enrolla el hilo, que usted puede medir con el calibre).

Además, como en el descenso la masa m desarrolla un movimiento rectilíneo uniformemente variado que parte del reposo, resulta que: $H = ½ \, V \, t$ (t es el tiempo de caída).

Le proponemos ahora que en la fórmula (1), usted reemplace ω en función de V y de r para luego reemplazar V en función de H y de t.

Luego despeje I de la expresión que queda y obtendrá la fórmula (2) que se escribe más abajo.

$$I = \left(\frac{g\, t^2}{2\, H} - 1 \right) m \; r^2 \qquad (2)$$

(si no logra llegar a esta expresión consulte con su profesor)

Por último, la tercera parte consistirá en experiencias cualitativas para ilustrar la conservación de la cantidad de movimiento angular en un banquito giratorio de eje vertical, utilizando diversos elementos auxiliares.

4. Procedimiento

PARTE 1. DETERMINACIÓN GEOMÉTRICA DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN VOLANTE

Observe el volante que está montado sobre la mesa y determine cuál es su forma y la forma del eje que le permite rotar.

A partir de las fórmulas presentadas en la descripción general, se ve que para calcular el momento de inercia se necesita conocer el radio y la masa del volante.

Mida el radio del volante con la ruleta y registre el valor con su incerteza asociada en la Hoja Informe.

Como no se puede determinar la masa del volante directamente con la balanza, ya que el volante está montado con otras partes, usted deberá medir la masa de manera indirecta recordando la definición de densidad:

$$\delta = M / Vol$$

Entonces $M = \delta \, . \, Vol$ (la densidad del hierro es 7860 kg / m³).

Para el volumen del volante, que es de forma cilíndrica, usted deberá utilizar la expresión:

$Vol = \pi . \, R^2 \, h$ (donde h se lee como altura pero es el espesor del volante).

Mida el espesor del volante con el calibre y anote el valor con su incerteza asociada.

Ahora usted puede calcular el volumen, la masa y el momento de inercia del volante en cuestión, como así también el valor aproximado de la incerteza asociada que le corresponde (considere la propagación de las incertezas según las expresiones que relacionan los valores medidos).

Discuta con sus compañeros y consulte con su profesor sobre si sería necesario considerar o no el momento de inercia del eje del volante y el momento de inercia del tambor donde se enrollará el hilo (este tambor es de aluminio).

Ayuda: determine el valor de esos momentos de inercia para poder decidir. Registre los valores también en la Hoja Informe.

PARTE 2. DETERMINACIÓN DINÁMICA DEL MOMENTO DE INERCIA DEL VOLANTE

Disponga el equipo como se muestra en la primer figura.

Registre el valor de la masa m que usted colgará del hilo. Estime la incerteza asociada.

Mida el diámetro del tambor con el calibre y obtenga su radio. Registre el valor con el de su incerteza.

Enrolle el hilo en el tambor haciendo rotar el volante hasta que la masa m suspendida del hilo quede a una altura H determinada del piso.(cuide que cada vuelta del hilo sobre el tambor no se superponga con vuelta siguiente). Elija alguna referencia para poder repetir varias veces la experiencia con la misma altura H.

Mida la altura H con la ruleta, varias veces si lo considera necesario. Registre el valor con el de su incerteza.

Liberando la masa m, permita que el hilo se desenrolle hasta que la masa llegue al piso y mida el tiempo de caída con el cronómetro. Repita esta medición varias veces ordenando cada valor en una tabla. Obtenga el resultado de este conjunto de mediciones y la incerteza que le corresponda.

Obtenga al valor del momento de inercia del volante con la expresión (2). Registre el valor con el de su incerteza.

Compare el resultado obtenido con el resultado de la parte 1.

Discuta con sus compañeros y consulte con su profesor acerca de cómo considerar en el experimento el rozamiento inevitable (aunque pequeño) del eje del volante con sus soportes.

PARTE 3: EXPERIENCIAS CUALITATIVAS

Experiencia 1:

- Designe a un compañero del grupo para sentarse en el banquito giratorio.
- Entregue a su compañero dos pesas para que sostenga una en cada mano, con el brazo extendido en su totalidad.
- Haga girar lentamente el banquito con su compañero sentado en él.
- Imagine los vectores velocidad angular y cantidad de movimiento angular del conjunto formado por el banquito, el compañero y las pesas.

- Indique a su compañero que cierre sus brazos llevando las masas hacia el centro de su pecho. ¿Qué ocurre? ¿A qué lo atribuye?
- Explique lo ocurrido dibujando los vectores axiales velocidad angular y cantidad de movimiento angular involucrados en la Hoja Informe.
- Repita el experimento anterior con otros compañeros analizando la relación entre velocidad angular, cantidad de movimiento angular y momento de inercia del cuerpo que gira (en realidad cuerpos que giran).

Experiencia 2:

- Designe a un compañero del grupo para sentarse en el banquito giratorio.
- Entregue a su compañero la rueda de bicicleta.
- Solicite a su compañero que ponga en movimiento la rueda de bicicleta, manteniendo el eje de la misma en dirección vertical. ¿Qué observa? ¿A qué lo atribuye?
- Repita el procedimiento anterior pero con el eje de la rueda de bicicleta en dirección horizontal. ¿Sucede lo mismo? Inmediatamente, con la rueda girando a gran velocidad y sosteniendo el eje firmemente con ambas manos, el compañero que está en el banquito debe ir inclinando lentamente el eje para que pase de horizontal a vertical. ¿Qué sucede? ¿Cómo se explica?
- Explique los ejemplos anteriores dibujando los vectores axiales cantidad de movimiento angular involucrados en la Hoja Informe.
- Imagine y desarrolle otros ejemplos con distintos compañeros que sostengan la rueda de bicicleta, sentados en el banquito, explicando lo que sucede en cada caso (consulte con su profesor si es necesario).

HOJA DE INFORME T. P.L. Nº 4

PARTE 1: DETERMINACIÓN GEOMÉTRICA DEL MOMENTO DE INERCIA

MEDICION DEL RADIO DEL VOLANTE

R = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………

MEDICION DEL ESPESOR DEL VOLANTE

h = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………

CALCULO DEL VOLUMEN DEL VOLANTE

Vol = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………

CALCULO DE LA MASA DEL VOLANTE

M = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………

CALCULO GEOMÉTRICO DEL MOMENTO DE INERCIA DEL VOLANTE

I = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………

MOMENTO DE INERCIA APROXIMADO DEL EJE Y EL TAMBOR .

Radio eje = ...   Largo eje = ...

I_{eje} = ………………………..

Radio tambor = ... Largo tambor = ...

I_{tambor} = ……………………….

Comentario sobre la necesidad o no de tener en cuenta estos valores: . . . .

. . . .

. . . .

PARTE 2: DETERMINACIÓN DINÁMICA DEL MOMENTO DE INERCIA

MASA SUSPENDIDA

m = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ……………………………………………………

……………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………

MEDICION DEL RADIO DEL TAMBOR

r = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ……………………………………………………

……………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………

MEDICION DE LA ALTURA

H = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ……………………………………………………

……………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………

MEDICION DEL TIEMPO DE CAIDA

t = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ……………………………………………………

……………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………

DETERMINACION DINÁMICA DEL MOMENTO DE INERCIA DEL VOLANTE

I = ……………………….. ±………………………..

Indique como obtiene la incerteza ……………………………………………………

……………………………………………………………………………………...

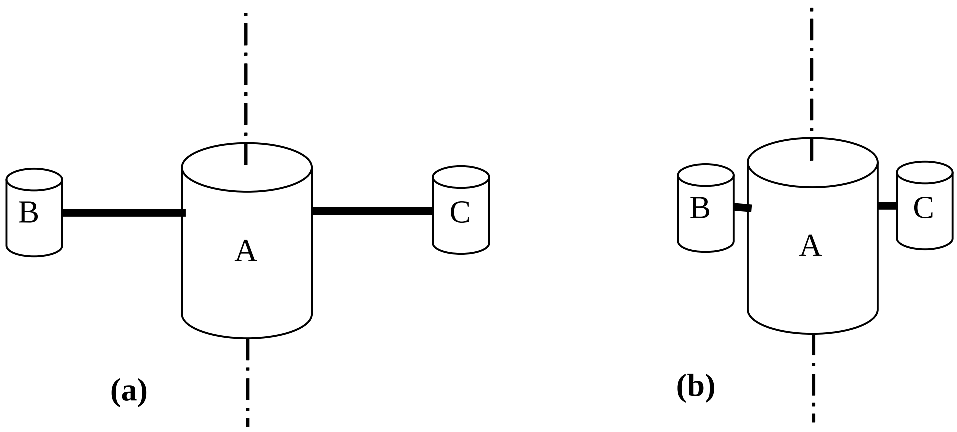
………………………………………………………………………………………

PARTE 3: EXPERIENCIAS CUALITATIVAS

Experiencia 1.

En el siguiente esquema

- la hoja representa un plano vertical,
- A es un compañero sentado en el banco giratorio,
- la linea eje es el eje de rotación del banco
- B y C son las dos pesas que A sostiene en cada mano (en (a) con brazos abiertos, y en (b) con brazos cerrados)



Complete las figuras indicando, según lo que ested observó, para cada una:

- hacia dónde se mueven B y C (dibujando vectores $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_C$ entrantes o salientes)
- el vector axial indicativo de la velocidad angular del sistema
- el vector axial indicativo de la cantidad de movimiento angular del sistema
- el vector axial indicativo del impulso angular aplicado al sistema en el intervalo entre (a) y (b).

Los dibujos deben ser cualitativos, sin escala, pero indicando cuáles vectores han aumentado de módulo, y cuáles han disminuido, entre una figura y la otra.

COMENTARIO (explicando o justificando los aspectos importantes) . . . .

. . . .

. . . .

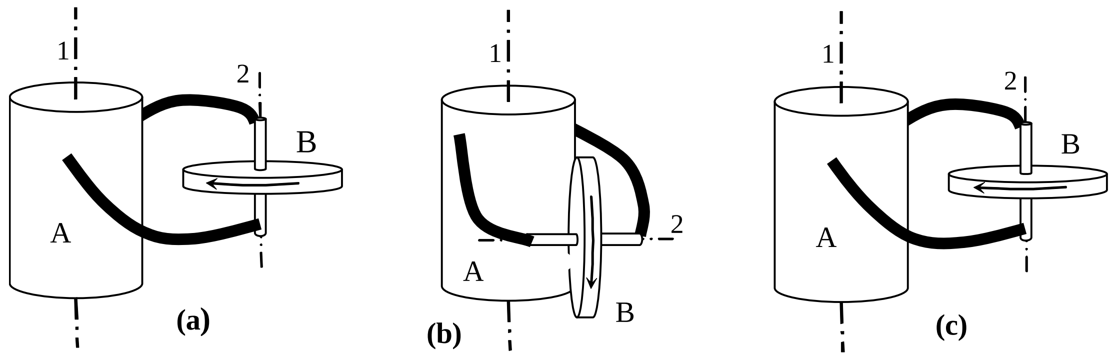
. . . .

. . . .

Experiencia 2.

En el siguiente esquema

- la hoja representa un plano vertical,
- A es un compañero sentado en el banco giratorio, y B es la rueda de bicileta
- la linea eje 1 es el eje de rotación del banco, y la 2 es el eje de rotación de la rueda de bicicleta
- las figuras (a) y (b) corresponden a las situaciones en que A, inicialmente quieto, ha hecho girar la rueda B, inicialmente quieta también, que en estas figuras ya está girando a alta velocidad en el sentido indicado; la figura (c) corresponde a la situación siguiente de (b), cuando (a) ha colocado vertical el eje de la rueda B, mientras ésta ya estaba girando.



(a) **(b)** **(c)**

Complete las figuras indicando, según lo que ested observó, para cada una:

- los vectores axiales indicativos de la velocidad angular de A y de B
- los vectores axiales indicativos de la cantidad de movimiento angular de A, de B, y del sistema A, B.
- el vector axial indicativo del impulso angular neto aplicado a A para poner en rotación la rueda B en (a) y en (b).
- el vector axial indicativo del impulso angular neto aplicado a A para girar el eje 2 en el intervalo entre (b) y (c).

Los dibujos deben ser cualitativos, sin escala, pero indicando si los ´módulos de los vectores son mayores, menores o iguales, o si aumentan o disminuyen entre una figura y la otra.

COMENTARIO (explicando o justificando los aspectos importantes) . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .