

EL PLANO DE POINCARÉ

NOEMÍ PATRICIA KISBYE

RESUMEN. Alrededor del año 300 a.C., el geómetra griego Euclides recopiló y sistematizó los conocimientos matemáticos de su tiempo en su obra *Elementos*. A partir de un conjunto de definiciones, axiomas y una lista de cinco postulados, Euclides estableció un sistema deductivo con el cual describió lo que hoy denominamos geometría euclídea. El quinto postulado, o postulado de las paralelas, fue cuestionado como tal durante más de 2000 años y fueron numerosos los intentos de demostrar que era posible deducirlo a partir de los cuatro primeros postulados. Fue recién en el siglo XIX que célebres matemáticos como Bolyai, Gauss y Lobachevsky consideraron la posibilidad de un sistema geométrico sin el quinto postulado. Fue así que se dio lugar a la *geometría hiperbólica*, la primera geometría no euclídea que apareció históricamente. En estas notas nos referiremos al modelo de plano hiperbólico conocido como el *plano de Poincaré*. Además de describir los elementos geométricos del plano, como puntos, rectas, ángulos, movimientos rígidos, distancia y área hiperbólica; estudiaremos propiedades geométricas de los triángulos y polígonos, en particular la trigonometría hiperbólica.

ÍNDICE

| | |
|--|----|
| Introducción | 2 |
| 1. La geometría hiperbólica | 2 |
| 1.1. Modelos del plano hiperbólico | 3 |
| 2. \mathcal{H} , el plano de Poincaré | 4 |
| 2.1. Elementos del plano | 4 |
| 2.2. La métrica hiperbólica | 5 |
| Ejercicios | 7 |
| 3. Movimientos rígidos | 7 |
| 3.1. Transformaciones de Möbius | 8 |
| 3.2. Transformaciones de Möbius en \mathcal{H} | 12 |
| 3.3. Las reflexiones | 14 |
| Ejercicios | 15 |
| 4. Rectas hiperbólicas | 16 |
| 4.1. Propiedades de las rectas | 16 |
| 4.2. El orden en la recta | 16 |
| 4.3. Posiciones relativas de las rectas | 16 |
| 5. La circunferencia hiperbólica | 17 |
| Ejercicios | 19 |
| 6. Triángulos | 19 |
| 6.1. El ángulo de paralelismo | 19 |
| Ejercicios | 20 |
| 6.2. Triángulos con un vértice en el infinito | 20 |
| 6.3. Triángulos con un ángulo recto | 21 |
| 6.4. Las reglas del seno y del coseno | 22 |
| Ejercicios | 24 |
| 7. Área de Triángulos y Polígonos | 25 |
| Referencias | 26 |

INTRODUCCIÓN

Los Elementos de Euclides constituyen una de las obras científicas más bellas, antiguas y extensas que han logrado llegar hasta nuestros días. Esta obra ha influido en muchas ramas de la ciencia, pero principalmente en el área de la matemática.

Poco es lo que se conoce de la vida de Euclides. El primer filósofo que lo menciona fue Proclo, en el año 800 d.C., ubicando la vida de Euclides alrededor del año 300 a.C. Pero aunque no se tenga certeza de este dato histórico, lo cierto es que Euclides fue quien puso orden en la obra matemática que hasta el momento existía, perfeccionando algunos trabajos y dando demostraciones irrefutables de las cosas que sus predecesores no habían demostrado en modo suficientemente riguroso. Su obra es una recopilación y sobre todo una sistematización de los conocimientos geométricos de su tiempo. *Antes de Euclides, la matemática era un conjunto de resultados sueltos; a partir de él, se fue convirtiendo en un supersistema de sistemas relacionados entre sí.*¹

Euclides introduce explícitamente en su obra el método axiomático. Esto es, comienza en su primer libro listando una serie de proposiciones simplemente afirmadas y que deben ser aceptadas. Estas proposiciones están divididas en tres categorías: definiciones, nociones comunes o axiomas, y postulados. Las definiciones sirvieron para acordar el significado de ciertos términos; las nociones comunes expresaban las propiedades fundamentales de los objetos matemáticos, mientras que los postulados afirmaban operaciones geométricas posibles de efectuar. Entendamos por postulado lo que es concedido, lo que expresamente se afirma que es posible.

Los cinco postulados que enuncia Euclides en el primer libro de sus Elementos son los siguientes:

1. Desde cualquier punto a cualquier otro punto se puede trazar un segmento.
2. Y cada segmento se puede prolongar por derecho.
3. Y con cada centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo.
4. Los ángulos rectos son iguales.
5. Y si una recta, al encontrar otras dos, forma con éstas ángulos internos de una misma parte menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encuentran de aquella parte donde la suma de los ángulos es menor que dos rectos.

Cada uno de estos postulados es una idea que no puede derivarse a partir de los otros postulados. Pero la humanidad tardó casi 2000 años en convencerse de ello. Muchos geómetras trataron en vano de demostrar que el quinto postulado podía deducirse de los otros cuatro. Finalmente, en el siglo XIX, célebres matemáticos como Bolyai, Lobachevsky y Gauss, demostraron que existían otros sistemas geométricos en los cuales no se cumplía el quinto postulado pero sí los cuatro primeros, reafirmando entonces la independencia del mismo. Se daba lugar entonces a las hoy llamadas geometrías no euclídeas.

1. LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

El quinto postulado es, evidentemente, más complicado en su enunciado y menos intuitivo para su comprensión. Por otro lado, una de las consecuencias del afán de los matemáticos por querer demostrar el quinto postulado, fue el reemplazar su enunciado por otros equivalentes. Así por ejemplo, uno de los más utilizados en la actualidad es el siguiente, atribuido a John Playfair (1748-1818):

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta.

Con este enunciado, la negación del quinto postulado da lugar a las siguientes dos posibilidades:

¹Mario Bunge, del prólogo de *Leyendo a Euclides*, Beppo Levi.

1. Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela. Es decir, todas las rectas que pasan por un punto exterior a otra cortan a esta última.
2. Por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas que separan las infinitas rectas no secantes de las infinitas secantes.

Los primeros cuatro postulados, con excepción quizás del segundo, junto con el enunciado 1 conducen a la geometría elíptica. Los cuatro primeros postulados junto con el enunciado 2 definen la *geometría hiperbólica*.

Notemos que en la versión 2 se utiliza la noción de rectas *no secantes*. Según la definición clásica, las rectas no secantes son las llamadas paralelas. Sin embargo, suele hacerse una distinción dentro del conjunto de las no secantes, y denominar paralelas a aquellas que poseen ciertas propiedades especiales.

Para aclarar estas ideas, analicemos el gráfico de la Figura 1.

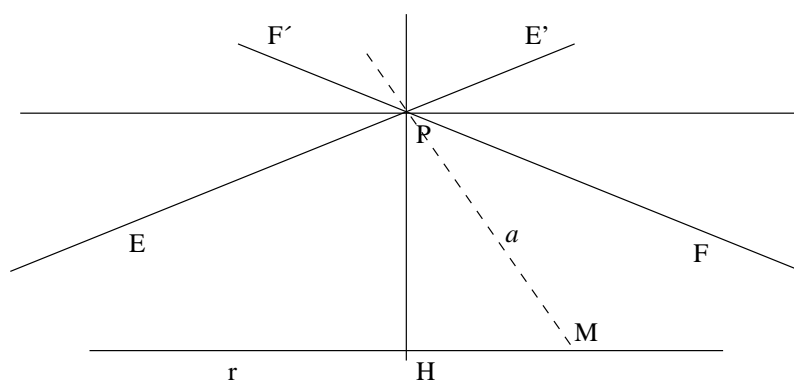


FIGURA 1. Rectas paralelas y no secantes

En la Figura 1 podemos observar una recta r y un punto P exterior a ella. Consideremos las rectas que pasan por el punto P . Entonces pueden presentarse los siguientes casos:

- a) Existe una única recta a que pasa por P para la cual a y r no son secantes.
- b) Cualquiera sea la recta a que pasa por P , a y r se cortan en algún punto.
- c) Existen dos posiciones límite EE' y FF' para las rectas que pasan por P . Las que intersecan el interior del ángulo EPF son secantes a r . Las demás serán *no secantes*. Las rectas EE' y FF' se llaman *paralelas*.

Según se verifiquen los enunciados a), b) o c), la geometría se denomina euclídea, elíptica o hiperbólica.

En el caso de la geometría hiperbólica, las rectas EE' y FF' delimitan o separan la región de rectas secantes y la de no secantes. Una característica de estas dos rectas es que su distancia a la recta a tiende a 0 en uno de los sentidos, lo cual no ocurre con las rectas no secantes.

1.1. Modelos del plano hiperbólico. Así como el plano euclídeo se representa con los puntos y rectas usuales de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, para representar al plano hiperbólico existen diferentes modelos. Estos son: el modelo de Klein, el disco de Poincaré, el semiplano superior de Poincaré y el modelo de Lorentz o hiperboloide. Las características generales de estos modelos son las siguientes:

1. El *modelo de Klein*, también conocido como disco proyectivo y modelo de Beltrami-Klein, representa el plano como el interior de un círculo, y las rectas como las cuerdas del círculo.

2. El *disco de Poincaré*, o disco conforme, también representa al plano como el interior de un círculo, pero las rectas están representadas por arcos de circunferencia ortogonales a la circunferencia borde, y los diámetros de dicha circunferencia.
3. El *semiplano de Poincaré* toma como plano a un semiplano abierto del plano euclídeo. Cada recta es la intersección de una circunferencia o de una recta perpendicular al borde de dicho semiplano, con el semiplano de Poincaré.
4. El cuarto modelo es el de *Lorentz o hiperboloide*. En este caso, se utiliza una hoja de un hiperboloide de revolución. Los puntos son clases de equivalencia de vectores que satisfacen una determinada forma cuadrática, y las rectas resultan de la intersección de ciertos planos con el hiperboloide.

De estas cuatro representaciones nos referiremos al semiplano de Poincaré. Esto significará no sólo definir explícitamente el plano, las rectas y los puntos, sino además dar una noción de distancia entre puntos, medida de ángulos, longitudes de curvas y áreas de figuras. También será importante definir los *movimientos rígidos* del plano hiperbólico, que son aquellas transformaciones biyectivas del plano en sí mismo que conservan las distancias entre puntos y preservan la medida de los ángulos.

2. \mathcal{H} , EL PLANO DE POINCARÉ

2.1. Elementos del plano. Para definir este modelo trabajaremos con el conjunto de números complejos. Será preciso entonces que acordemos la notación a utilizar.

Denotamos con \mathbb{C} al conjunto de los números complejos y con \mathbb{R} al conjunto de los números reales. Si $z = x + iy$ es un número complejo, con $x, y \in \mathbb{R}$, llamamos a $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$ la parte real y la parte imaginaria de z respectivamente. Usamos también la notación exponencial y polar

$$z = r e^{i\theta}, \quad z = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta,$$

donde $r \geq 0$ y θ , $0 \leq \theta < 2\pi$ representan el módulo y el argumento de z respectivamente. El conjugado de $z = x + iy$ es $\bar{z} = x - iy$.

Nos será útil además agregar al conjunto \mathbb{C} un punto, llamado punto del infinito, y al que denotaremos con ∞ . Denotaremos con \mathbb{C}_∞ y \mathbb{R}_∞ a los conjuntos $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, respectivamente.

Definición 2.1. Llamamos *plano de Poincaré* y lo denotamos con \mathcal{H} al conjunto

$$\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}.$$

Tomamos \mathcal{H} como modelo del plano hiperbólico. Un *punto* en \mathcal{H} es un número complejo $z \in \mathcal{H}$. Como ya lo hemos mencionado antes, una *recta* en \mathcal{H} es la intersección de una recta euclídea o de circunferencia euclídea perpendicular a \mathbb{R} con el plano \mathcal{H} . Dados dos puntos en \mathcal{H} existe una única recta a la cual ellos pertenecen. La razón por la cual se definen a estos subconjuntos como rectas es que son las curvas que realizan una distancia, llamada *distancia hiperbólica*. Cada punto en una recta determina dos semirrectas o rayos, cada uno con origen en dicho punto y con un extremo en \mathbb{R}_∞ . Cada recta en \mathcal{H} determina dos semiplanos.

Los *movimientos rígidos* de \mathcal{H} son transformaciones biyectivas del plano en sí mismo que preservan la distancia hiperbólica. Por esta razón se las denomina también *isometrías*. Los movimientos rígidos tienen la propiedad que, dadas dos semirrectas o rayos A y A' y dos semiplanos α y α' determinados por cada una de ellas, existe un único movimiento rígido T tal que $T(A) = A'$ y $T(\alpha) = \alpha'$. Además, los movimientos rígidos constituyen un grupo, puesto que la composición y la inversa de un movimiento rígido es también un movimiento rígido.

A lo largo de estas notas daremos una descripción más detallada de los elementos geométricos que acabamos de presentar. En primer lugar, describiremos la métrica hiperbólica que nos permitirá dar una noción de distancia en el plano \mathcal{H} .

2.2. La métrica hiperbólica. Una *curva* en \mathbb{C} es una función diferenciable $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{C}$, con (a, b) un intervalo abierto real, pudiendo ser $a = -\infty$ y/ o $b = \infty$. También consideraremos curvas definidas sobre intervalos cerrados $[a, b]$. Por diferenciable entendemos que $\operatorname{Re} \gamma(t)$ y $\operatorname{Im} \gamma(t)$ son funciones continuas y diferenciables.

Si $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ es una curva en \mathbb{C} , donde $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ son la parte real e imaginaria de $\gamma(t)$ respectivamente, definimos el *vector tangente* a γ en $\gamma(t)$ como el número complejo $\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$.

Una curva en \mathcal{H} es una curva cuya imagen está contenida en \mathcal{H} . En el plano \mathcal{H} se define la longitud hiperbólica de una curva de la siguiente manera:

Definición 2.2. Si $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{H}$ es una curva en \mathcal{H} , definimos la *longitud hiperbólica* de γ , y la denotamos $l(\gamma)$ como

$$(2.1) \quad l(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}{\gamma_2(t)} dt.$$

Con la fórmula (2.1) es posible definir una métrica en el plano hiperbólico. En efecto, diremos que una curva $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{H}$ une los puntos z_1 y z_2 si $\gamma(a) = z_1$ y $\gamma(b) = z_2$. Notemos que $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathcal{H}$ dada por $\gamma(t) = tz_2 + (1-t)z_1$ es una curva que une los puntos z_1 y z_2 , y si $z_1 \neq z_2$ entonces su longitud es positiva. Por lo tanto tiene sentido definir la distancia entre dos puntos como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas que unen ambos puntos.

Definición 2.3. La *distancia hiperbólica* entre dos puntos z_1 y z_2 la denotamos $\rho(z_1, z_2)$ y se define como

$$(2.2) \quad \rho(z_1, z_2) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{H}, \gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2\}.$$

Es claro que $\rho(z_1, z_2)$ es no negativa, y es igual a 0 sólo si $z_1 = z_2$. Además, si $\sigma : [a, b] \mapsto \mathcal{H}$ une z_1 con z_2 , entonces $\tilde{\sigma}(t) = \sigma(a+b-t)$ une z_2 con z_1 , de donde se sigue que ρ es simétrica. Se deja como ejercicio demostrar que ρ satisface la desigualdad triangular.

Más adelante veremos que existe una curva que realiza dicho ínfimo, y por lo tanto se puede definir la distancia como el mínimo de dichas longitudes. En el siguiente ejemplo calculamos explícitamente la distancia entre dos puntos sobre el eje imaginario positivo.

Ejemplo 2.4. Sean $z_1 = ia$, $z_2 = ib$, con $a, b > 0$; entonces

$$(2.3) \quad \rho(z_1, z_2) = \left| \log\left(\frac{b}{a}\right) \right|.$$

Para ver esto, asumimos $a < b$. Sea $\gamma : [c, d] \mapsto \mathcal{H}$ una curva que une ia con ib . Entonces

$$(2.4) \quad l(\gamma) = \int_c^d \frac{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_c^d \frac{|\gamma_2'(t)|}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_c^d \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt = \log \frac{\gamma_2(d)}{\gamma_2(c)} = \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Por lo tanto, $l(\gamma)$ está acotado inferiormente por $\log(b/a)$, es decir que $\rho(ia, ib) \geq \log(b/a)$.

Ahora bien, si definimos

$$\beta(t) = it, \quad a \leq t \leq b,$$

entonces β es una curva que une ia con ib , y además

$$l(\beta) = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Por lo tanto, $\rho(z_1, z_2) = \rho(ia, ib) = \log(b/a)$.

Notemos que la curva

$$(2.5) \quad \beta(t) = it, \quad 0 < t < \infty$$

realiza la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos. Una curva con esa propiedad se la denomina *geodésica*.

Definición 2.5. Una geodésica es una curva $\sigma : (a, b) \mapsto \mathcal{H}$ que realiza la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos. La imagen de una geodésica σ la denotamos $[\sigma]$ y la denominamos *arco de recta hiperbólica*. Una *recta hiperbólica* es un arco de recta hiperbólica que no está contenido propiamente en otro arco de recta hiperbólica.

Podríamos aventurar que la geodésica $\beta(t)$ dada en (2.5) determina una recta hiperbólica. Esto implica afirmar que su imagen no está contenida propiamente en ningún arco de recta hiperbólico, lo cual no parece tan sencillo de demostrar. El siguiente lema enuncia una condición suficiente para que una geodésica determine una recta hiperbólica:

Lema 2.6. Sea $\gamma : (a, b) \mapsto \mathcal{H}$ una geodésica tal que para algún $c \in (a, b)$ las curvas $\gamma|_{(a,c)} : (a, c) \mapsto \mathcal{H}$ y $\gamma|_{(c,b)} : (c, b) \mapsto \mathcal{H}$ tienen longitud infinita. Entonces $[\gamma]$ es una recta hiperbólica.

Demostración. Supongamos que existe un arco de recta hiperbólica que contiene a $[\gamma]$, esto es, que existe

$$\alpha : (a', b') \mapsto \mathcal{H}$$

geodésica tal que $[\gamma] \subset [\alpha]$. Supongamos además que existe $z_0 \in [\alpha] - [\gamma]$, siendo $z_0 = \alpha(t_0)$, para algún $t_0 \in (a', b')$.

Dado que $\gamma(c) = \alpha(t_1)$, para algún $t_1 \in (a, b)$, podemos suponer que $t_0 < t_1$. Como $\gamma(t)$ es continua y $\alpha(t_0) \notin [\gamma]$, se sigue que $[\gamma]$ está contenida en la imagen de $\alpha|_{(t_0, b')}$. Ahora bien, la distancia $d(z_0, \gamma(c)) < \infty$, por lo tanto $l(\gamma|_{(a,c)}) < \infty$ o $l(\gamma|_{(c,b)}) < \infty$, lo cual contradice nuestra hipótesis. \square

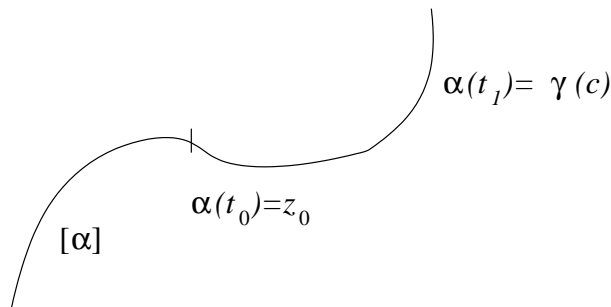


FIGURA 2. Lema 2.6

Corolario 2.7. La curva $\beta(t)$ dada en (2.5) es una geodésica en \mathcal{H} y su imagen $[\beta]$ es una recta hiperbólica.

Definición 2.8. Sea $\gamma : (a, b) \mapsto \mathcal{H}$ una geodésica tal que $[\gamma]$ es una recta hiperbólica, y sea $c \in (a, b)$. Llamamos *rayo hiperbólico* a cada uno de los arcos de recta hiperbólicos determinados por $\gamma|_{(a,c)}$ y $\gamma|_{(c,b)}$.

Ejemplo 2.9. Para cada $t \in \mathbb{R}$, las geodésicas $\gamma_c^+(t) = it, t \geq c$ y $\gamma_c^-(t) = it, t \leq c$ determinan dos rayos hiperbólicos sobre la recta hiperbólica $\{is \mid s > 0\}$. Usaremos también la notación $[\gamma_c^+] = (0, ic]$ y $[\gamma_c^-] = [ic, \infty)$.

Concluimos esta sección precisando la noción de ángulo entre curvas.

Definición 2.10. Si $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ son curvas en \mathbb{C} que se intersecan en un punto $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, llamamos ángulo formado por γ_1 y γ_2 en z_0 al ángulo determinado por los vectores tangentes $\gamma_1'(t_1)$ y $\gamma_2'(t_2)$. (Figura 3).

Es decir, el ángulo θ determinado por las curvas γ_1 y γ_2 en z_0 es

$$\theta = \arg \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)}.$$

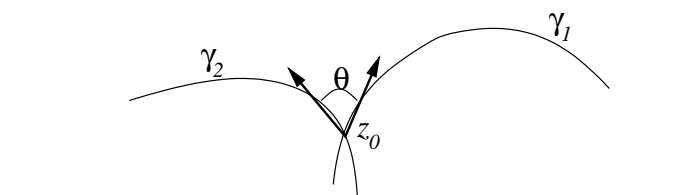


FIGURA 3. Ángulo entre curvas

Dado que hemos incluido también el punto del infinito, extendemos la definición de curva al conjunto \mathbb{C}_∞ . Decimos que una curva γ tal que $\gamma(t_0) = \infty$ es diferenciable en t_0 si la curva $\frac{1}{\gamma(t)}$ lo es en t_0 . De este modo podemos extender la noción de ángulo entre curvas que se intersecan en el punto del infinito.

Ejercicios.

1. Pruebe que dados dos puntos en \mathcal{H} , existe una única recta (en el sentido de la §2.1) que los contiene.
2. Pruebe que la distancia hiperbólica $\rho(z, w)$ verifica las propiedades:
 - a) $\rho(z, w) \geq 0$ para todo $z, w \in \mathcal{H}$; y $\rho(z, w) = 0$ si y sólo si $z = w$.
 - b) $\rho(z, w) = \rho(w, z)$
 - c) $\rho(z, u) + \rho(u, w) \geq \rho(z, w)$.
3. Calcule las siguientes distancias hiperbólicas:
 - a) $\rho(2i, i)$,
 - b) $\rho(i, i/2)$,
 - c) $\rho(i/2, i/4)$,
 - d) $\rho(i/4, i/8)$.
4. Pruebe que para cada $a \in \mathbb{R}$, la curva $\sigma_a(t) = a + it, t \in (0, \infty)$, es una geodésica en \mathcal{H} . Calcule la distancia hiperbólica $\rho(a + it, a + is)$ para $t, s > 0$.

3. MOVIMIENTOS RÍGIDOS

Definición 3.1. Un *movimiento rígido* o *isometría* es una transformación $T : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ biyectiva que preserva la distancia entre puntos. Esto es,

$$\rho(T(z), T(w)) = \rho(z, w), \quad \forall z, w \in \mathcal{H}.$$

Notemos que si σ es una geodésica y T es un movimiento rígido, entonces $T \circ \sigma$ es también una geodésica. Por lo tanto $T \circ \beta$, con β como en (2.5) determina una recta hiperbólica para cada movimiento rígido T . Así, si logramos determinar todos los movimientos rígidos de \mathcal{H} podremos describir muchas de las rectas hiperbólicas de \mathcal{H} . Más aún, probaremos que toda geodésica es de la forma $T \circ \beta$, para algún movimiento rígido T , y por lo tanto podremos describir todas las rectas hiperbólicas.

3.1. Transformaciones de Möbius. Las transformaciones de Möbius, también llamadas transformaciones homográficas, son funciones biyectivas del plano complejo extendido \mathbb{C}_∞ en sí mismo. Si nos restringimos al conjunto de transformaciones que dejan estable el semiplano superior \mathcal{H} , estas transformaciones tienen la propiedad de preservar la distancia hiperbólica entre puntos y los ángulos entre curvas, en particular, son isometrías.

Estudiaremos en primer lugar a estas transformaciones como funciones de \mathbb{C}_∞ en sí mismo, y luego analizaremos aquellas que preservan el plano \mathcal{H} .

Definición 3.2. Una transformación de Möbius es una función $T : \mathbb{C}_\infty \mapsto \mathbb{C}_\infty$ de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0.$$

Si $c \neq 0$ se define $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ y $T(\infty) = \frac{a}{c}$, y si $c = 0$ entonces $T(\infty) = \infty$.

La condición $ad - bc \neq 0$ es importante dado que de este modo la función T resulta biyectiva. Dejamos como ejercicio la demostración de la siguiente proposición:

Proposición 3.3. *La composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. La inversa de una transformación de Möbius es una transformación de Möbius.*

Las transformaciones de Möbius tienen la propiedad de transformar circunferencias y rectas euclídeas en circunferencias y rectas euclídeas. Más aún, si consideramos a las rectas como circunferencias que pasan por el punto del infinito, podemos generalizar diciendo que transforman circunferencias en circunferencias.

Para probar esta afirmación, es útil analizar en primer lugar algunas transformaciones de Möbius especiales, que mostramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.4. La inversión

$$I(z) = \frac{1}{z}$$

es una transformación de Möbius que mapea el interior de la circunferencia unidad en el exterior biyectivamente, y la circunferencia unitaria en sí misma. (Figura 4). Notemos que

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \overline{\left(\frac{z}{|z|^2}\right)},$$

lo cual indica una reflexión del punto z con respecto a la circunferencia unitaria y posteriormente con respecto al eje real. En particular, $I(0) = \infty$ y $T(\infty) = 0$.

Notemos que toda circunferencia de radio r centrado en $z = 0$ se transforma en la circunferencia de radio $1/r$ centrada en 0 , y viceversa.

Ejemplo 3.5. La traslación

$$T(z) = z + c,$$

donde c es un número complejo, traslada todos los puntos del plano en la dirección del punto c . Si c es real, la traslación es paralela al eje real. (Ver Figura 5)

Es evidente que la traslación transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias, trasladando el centro y preservando el radio de las mismas.

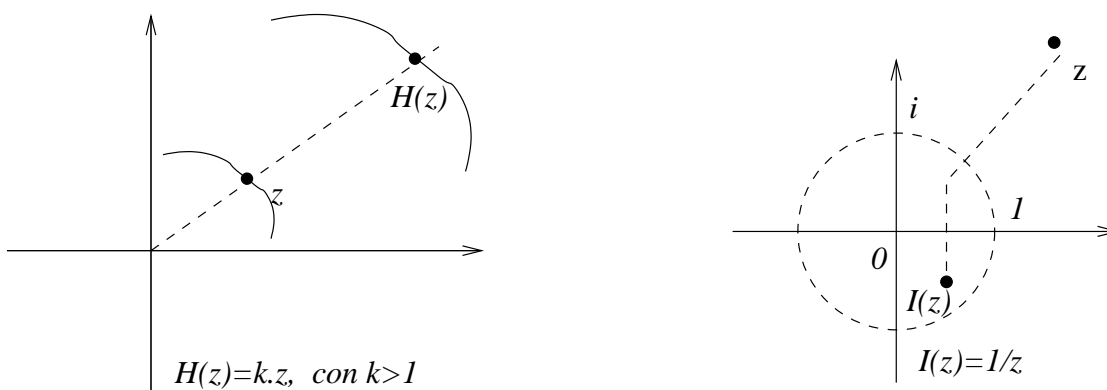


FIGURA 4. Homotecia e inversión

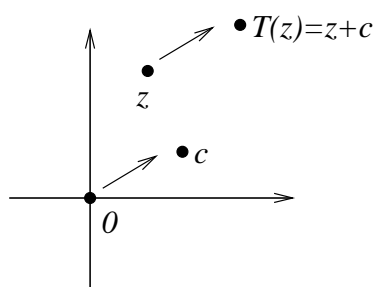


FIGURA 5. La traslación

Ejemplo 3.6. La rotación

$$R(z) = qz,$$

con $q = e^{i\theta}$ produce un giro del plano con centro en $z = 0$ y ángulo θ . Esto puede verse notando que si $z = re^{i\alpha}$, entonces $qz = re^{i(\theta+\alpha)}$. (Ver Figura 6) Es razonable afirmar que las

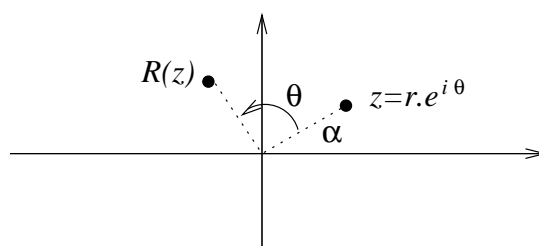


FIGURA 6. La rotación

rotaciones transforman rectas en rectas, y circunferencias en circunferencias, rotando el centro y conservando el radio de las mismas.

Ejemplo 3.7. Una *homotecia* es una transformación de la forma

$$H(z) = kz,$$

donde $k > 0$. Las homotecias transforman el plano en sí mismo dejando estable cada semirrecta con origen en $z = 0$ aumentando o disminuyendo el módulo de cada número complejo según si $k > 1$ o $k < 1$. (Figura 4).

Estos cuatro ejemplos son suficientes para describir cualquier otra transformación de Möbius. Tenemos en cuenta para ello la Proposición 3.3:

Proposición 3.8. *Toda transformación de Möbius es una composición de traslaciones, inversiones, rotaciones y homotecias.*

Demostración. Si $c = 0$, entonces

$$T(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

es decir, $T(z)$ es una composición de una rotación, una homotecia y una traslación.

Si $c \neq 0$ entonces

$$T(z) = \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c},$$

es decir que $T(z) = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, siendo

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad T_2(z) = \frac{1}{z}, \quad T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \quad \text{y} \quad T_4(z) = z + \frac{a}{c}.$$

□

No es difícil ver que las traslaciones transforman circunferencias en circunferencias y rectas en rectas, al igual que ocurre con las homotecias y las rotaciones. En el caso de la inversión, el resultado es más general. Enunciamos estas propiedades en la siguiente proposición.

Proposición 3.9.

1. *Las inversiones transforman rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.*
2. *Las traslaciones, rotaciones y homotecias transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.*

Demostración. La ecuación de una recta o de una circunferencia puede escribirse de la forma

$$A(x^2 + y^2) + ax + by + C = 0,$$

con $A, a, b \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}$. Si escribimos $z = x + iy$, esta ecuación se transforma en:

$$(3.1) \quad Az\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + C = 0,$$

con $A \in \mathbb{R}$, $\beta, C \in \mathbb{C}$.

Si $A = 0$, (3.1) es la ecuación de una circunferencia, en caso contrario es la ecuación de una recta. El coeficiente C indica si la recta o circunferencia pasa o no por el origen, según C sea igual a cero o no, respectivamente.

La aplicación de una inversión, traslación, rotación u homotecia transforman la ecuación (3.1) en una del tipo de las siguientes:

$$(3.2) \quad A + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + C|z|^2 = 0$$

$$(3.3) \quad A|z|^2 + (A\bar{c} + \beta)z + \overline{A\bar{c} + \beta}\bar{z} + A|c|^2 + 2\operatorname{Re}(\beta c) + C - c = 0$$

$$(3.4) \quad A|z|^2 + (\beta e^{i\theta})z + (\bar{\beta} e^{-i\theta})\bar{z} + C = 0$$

$$(3.5) \quad A|z|^2 + \beta kz + \bar{\beta}\bar{k}\bar{z} + C = 0$$

correspondiendo (3.2) a la inversión, (3.3) a la traslación, (3.4) a la rotación y (3.5) a una homotecia.

De estas cuatro ecuaciones se concluye que la imagen del conjunto de puntos que satisfacen la ecuación de una recta o de una circunferencia, también satisface la ecuación de una recta o circunferencia. Afirmamos entonces que:

1. Si $T(z) = 1/z$ es una inversión, entonces T transforma
 - a) rectas que pasan por el origen en rectas que pasan por el origen,

- b) rectas que no pasan por el origen en circunferencias que pasan por el origen, y viceversa,
 - c) circunferencias que no pasan por el origen en circunferencias que no pasan por el origen.
2. Si $T(z)$ es una traslación, una rotación o una homotecia, entonces T transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias. La homotecia y la rotación dejan fijo el origen, mientras que la traslación sólo fija el punto del infinito. □

Corolario 3.10. *Las transformaciones de Möbius transforman rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.3. □

No es difícil ver que una transformación de Möbius distinta de la identidad tiene a lo sumo dos puntos fijos en \mathbb{C}_∞ . Para ver esto, notemos que $T(z) = z$ implica $az + b = cz^2 + dz$, es decir, $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Si $c = 0$, T fija el punto ∞ y $b/(d - a)$ (si $d \neq a$). Si $c \neq 0$, entonces existen a lo sumo dos puntos fijos.

La siguiente proposición establece que dadas dos ternas de puntos, existe una transformación de Möbius T tal que T mapea una terna en la otra.

Proposición 3.11. *Sean z_1, z_2, z_3 y $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ dos ternas de puntos en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Entonces existe una única transformación de Möbius T tal que $T(z_i) = \omega_i, i = 1, 2, 3$.*

Demostración. Sea

$$A(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Entonces A es una transformación de Möbius que mapea los puntos z_1, z_2 y z_3 a $0, 1$ e ∞ , respectivamente. Análogamente, podemos definir $B(z)$ de modo que B mapee ω_1, ω_2 y ω_3 a $0, 1$ e ∞ .

Si componemos, resulta que $T = B^{-1} \circ A$ cumple $T(z_i) = \omega_i$, para $i = 1, 2, 3$.

Para ver la unicidad, notemos que si $T(z_i) = S(z_i), i = 1, 2, 3$, entonces $T \circ S^{-1}(z)$ fija tres puntos, y por lo tanto es la transformación identidad. □

Otra propiedad importante de las transformaciones de Möbius es que preservan ángulos entre curvas.

Proposición 3.12. *Las transformaciones de Möbius preservan ángulos entre curvas.*

Demostración. Denotamos con $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ dos curvas que forman un ángulo en $z = z_0$, y $T(z)$ una transformación de Möbius. Queremos ver que $(T \circ \gamma_1)(t)$ y $(T \circ \gamma_2)(t)$ forman el mismo ángulo en $T(z_0)$.

Para ello notemos que, por la Proposición 3.3, es suficiente comprobar este resultado para la traslación, la rotación, la homotecia y la inversión.

Si $k \in \mathbb{C}$, entonces

$$\frac{(\gamma_1(t) + k)'}{(\gamma_2(t) + k)'} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)} \quad \text{y} \quad \frac{(k \gamma_1(t))'}{(k \gamma_2(t))'} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}.$$

Por lo tanto, si $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ son curvas en \mathbb{C} , el ángulo que forman es preservado por traslaciones, rotaciones y homotecias.

Si $T(z) = \frac{1}{z}$, entonces debemos considerar tres casos:

1. Si $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ forman un ángulo en $z_0 = \infty$, dicho ángulo es el ángulo formado por $1/\gamma_1(t)$ y $1/\gamma_2(t)$ en $z = 0$, es decir que es el formado por $T \circ \gamma_1$ y $T \circ \gamma_2$ en $z = 0$.
2. Análogamente, si $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ se cortan en $z = 0$, entonces $T \circ \gamma_1$ y $T \circ \gamma_2$ se cortan en $z = \infty$, y el ángulo que forman es el formado por $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ en $z = 0$.
3. Si $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ se cortan en un punto distinto de 0 y de ∞ , entonces

$$\frac{(T \circ \gamma_1)'(t)}{(T \circ \gamma_2)'(t)} = \frac{-\gamma_1'(t)}{\gamma_1^2(t)} \bigg/ \frac{-\gamma_2'(t)}{\gamma_2^2(t)} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}.$$

□

3.2. Transformaciones de Möbius en \mathcal{H} . En esta sección analizaremos el conjunto de transformaciones de Möbius que preservan el semiplano superior. Notemos que si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc > 0$, entonces

$$\operatorname{Im} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(ad - bc) \operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

Se puede probar que todas las transformaciones de Möbius que preservan el semiplano superior \mathcal{H} son de ese tipo. Definimos entonces el siguiente conjunto:

Definición 3.13. Llamamos G al grupo de transformaciones de Möbius dado por

$$G = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Notemos que todo elemento de G preserva el semiplano superior, el semiplano inferior y la recta real extendida \mathbb{R}_∞ . En esta sección probaremos además que estas transformaciones preservan la distancia hiperbólica, y por lo tanto son isometrías.

Ejemplo 3.14. Para cada θ , $0 \leq \theta < \pi$, sea $K_\theta(z)$ el elemento de G dado por

$$(3.6) \quad K_\theta(z) = \frac{\cos \theta z + \operatorname{sen} \theta}{-\operatorname{sen} \theta z + \cos \theta}.$$

Con un simple cálculo podemos ver que $K_\theta(i) = i$. Además, si $T \in G$ fija el punto i , entonces debe ser $ai + b = di - c$. Luego $a = d$, $b = -c$ y $a^2 + b^2 = 1$, por lo tanto $T(z) = K_\theta(z)$ para algún $\theta \in [0, \pi)$.

Los siguientes lemas establecen dos propiedades importantes de las transformaciones en G , y que nos serán útiles para determinar todas las rectas hiperbólicas y para encontrar una fórmula explícita de la distancia $\rho(z, w)$.

Lema 3.15. : Si $\gamma : (a, b) \mapsto \mathcal{H}$ es una curva y $T \in G$, entonces $l(\gamma) = l(T(\gamma))$.

Lema 3.16. : Si $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$, entonces existe $T \in G$ tal que $T(z_1) = ia$ y $T(z_2) = ib$, con $a, b > 0$.

Prueba del Lema 3.15. Esta demostración resulta de la aplicación de reglas de diferenciación y observando que

$$T'(z) = \frac{1}{|cz + d|^2}, \quad \operatorname{Im}(T(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{|T'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(T(\gamma(t)))} = \frac{\gamma'(t)}{\operatorname{Im}(\gamma(t))}.$$

□

Prueba del lema 3.16. Consideremos la única recta o circunferencia euclidiana L , perpendicular a \mathbb{R} , a la cual pertenecen z_1 y z_2 .

Esta recta L interseca a \mathbb{R} en un punto α . La transformación $T(z) = \frac{-1}{z-\alpha}$ transforma a L en una recta euclidiana, perpendicular al eje real; esto es, una recta de la forma $\{it - \beta, t \in \mathbb{R}\}$, para algún $\beta \in \mathbb{R}$. Luego $S(z) = \frac{-1}{z-\alpha} + \beta$ es la transformación buscada. \square

Con lo que acabamos de demostrar podemos enunciar y probar el siguiente resultado:

Teorema 3.17. *Si $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ y $\rho(z_1, z_2)$ es la distancia definida en (2.2), entonces se cumple que*

$$(3.7) \quad \rho(z_1, z_2) = \log \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}$$

$$(3.8) \quad \cosh \rho(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2}.$$

Demostración. Para demostrar este teorema seguiremos varios pasos. En primer lugar, haciendo cuentas es fácil probar que (3.7) y (3.8) son equivalentes. Por lo tanto es suficiente probar, por ejemplo, que (3.8) se verifica.

En segundo lugar, veamos que ambos miembros de la igualdad en (3.8) son invariantes por transformaciones de G . En efecto, por el Lema 3.15 se sigue que

$$\rho(T(z_1), T(z_2)) = \rho(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{H}.$$

Además

$$\begin{aligned} |T(z_1) - T(z_2)|^2 &= \left| \frac{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (cz_1 + d)(az_2 + b)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \right|^2 \\ &= \frac{|z_1 - z_2|^2}{|cz_1 + d|^2 |cz_2 + d|^2} \\ \operatorname{Im} T(z_1) \cdot \operatorname{Im} T(z_2) &= \frac{\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2}{|cz_1 + d|^2 |cz_2 + d|^2} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$1 + \frac{|T(z_1) - T(z_2)|^2}{2 \cdot \operatorname{Im} T(z_1) \cdot \operatorname{Im} T(z_2)} = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 \cdot \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2}.$$

Por último, usamos el resultado del Lema 3.16. Si $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$, entonces existe $T \in G$ tal que $T(z_1) = ip$, $T(z_2) = iq$, con $p, q > 0$. Luego

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(T(z_1), T(z_2)) = \rho(ip, iq) = \left| \log \left(\frac{p}{q} \right) \right|,$$

según lo visto en el Ejemplo 2.3. Puesto que

$$\cosh \rho(ip, iq) = \cosh \left| \log \left(\frac{p}{q} \right) \right| = \frac{p^2 + q^2}{pq} = 1 + \frac{|ip - iq|^2}{2pq},$$

se cumple que (3.8) se verifica para ip e iq , y por lo tanto para z_1, z_2 . Puesto que z_1 y z_2 son puntos elegidos arbitrariamente en \mathcal{H} , el resultado es válido para todo z_1, z_2 . \square

Corolario 3.18. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.17, se cumple que*

$$(3.9) \quad \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z_1, z_2)\right) = \frac{|z_1 - z_2|}{2(\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2)^{1/2}}$$

$$(3.10) \quad \cosh\left(\frac{1}{2}\rho(z_1, z_2)\right) = \frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{2(\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2)^{1/2}}$$

$$(3.11) \quad \tanh\left(\frac{1}{2}\rho(z_1, z_2)\right) = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2|}.$$

(3.12)

Nos detenemos ahora un momento para observar y resumir algunos puntos que hemos probado a lo largo de estas secciones:

1. La curva que realiza la distancia entre dos puntos cualesquiera del eje imaginario positivo es la geodésica $\beta(t) = it$, $t \in (0, \infty)$.
2. Si $z, w \in \mathcal{H}$ y $T(z)$ es tal que $T(z) = ip$ y $T(w) = iq$, entonces $(T^{-1} \circ \beta)$ realiza la distancia entre z y w , puesto que $l(T^{-1} \circ \beta) = l(\beta) = \rho(ip, iq) = \rho(z, w)$.
3. Si γ es una curva que realiza la distancia entre z y w , entonces $T \circ \gamma$ realiza la distancia entre ip e iq . Luego $T \circ \gamma = \beta$, e decir $\gamma = T^{-1} \circ \beta$.
4. Si $T \in G$, entonces la imagen por T del eje imaginario positivo es la intersección de una circunferencia o una recta euclidiana ortogonal al eje real. Por lo tanto, si γ es una geodésica, la imagen de γ está contenida en un arco de circunferencia con centro en \mathbb{R} o en una recta perpendicular a \mathbb{R} .

Es natural concluir entonces que las rectas hiperbólicas son precisamente las intersecciones de rectas o circunferencias euclidianas perpendiculares al eje real, y que los arcos de rectas hiperbólicas son subconjuntos conexos de dichas rectas.

3.3. Las reflexiones. Hemos visto que todo elemento del grupo G preserva las distancias entre puntos de \mathcal{H} , por ello se las denomina isometrías. Sin embargo estas no son todas las isometrías del plano \mathcal{H} .

Consideremos la función $S_I : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ dada por $S_I(z) = -\bar{z}$. La transformación S_I es biyectiva y preserva las distancias entre puntos, como se puede ver a partir de la ecuación (3.7). Esta transformación tiene la propiedad de fijar todos los puntos de la recta $I^+ = \{it \mid t > 0\}$, y mapear cada uno de los dos semiplanos determinados por esta recta en el opuesto. Este tipo de transformaciones se denomina *reflexión* o *simetría axial*. En este caso, el eje de la simetría axial es la recta I^+ .

Si ahora consideramos una recta L y una transformación $T \in G$ tal que $T(L) = I^+$, entonces la transformación

$$S_L := T^{-1} \circ S_I \circ T$$

es una isometría que fija todos los puntos de L , por lo tanto es una simetría axial con eje L . Por lo tanto, para cada recta $L \subset \mathcal{H}$ existe una reflexión con eje L .

El siguiente teorema enuncia que toda isometría de \mathcal{H} es una transformación en G o es la composición de una reflexión con una transformación en G :

Teorema 3.19. *Si $\phi : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ es una isometría, entonces $\phi(z)$ es de una de las siguientes formas:*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{o} \quad z \mapsto \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}.$$

Más aún, toda isometría de \mathcal{H} es composición de reflexiones con respecto a rectas hiperbólicas.

Demostración. Sea $I^+ = \{it \mid t > 0\}$, ϕ una isometría de \mathcal{H} y sea $L = \phi(I^+)$. Luego existe $T \in G$ tal que $T(L) = I^+$, es decir que $T \circ \phi$ deja invariante a I^+ .

Si $(T \circ \phi)(i) = ik$, podemos componer con $z \mapsto \frac{1}{k}z$ de modo de fijar el punto i ; y si fuera necesario podemos componer con $z \mapsto -\frac{1}{z}$ y así resultarán invariantes los rayos (i, ∞) y $(0, i)$. Dado que se preservan las distancias, esto implica que cada punto de I^+ queda fijo.

Por lo tanto, asumiremos que $T \circ \phi$ fija cada punto de I^+ . Sea $z = x + iy \in \mathcal{H}$ y $(T \circ \phi)(z) = u + iv$. Si $t > 0$ entonces

$$\rho(z, it) = \rho(T\phi(z), T\phi(it)) = \rho(u + iv, it).$$

Teniendo en cuenta (3.8), concluimos que

$$(3.13) \quad \frac{|z - it|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} it} = \frac{|u + iv - it|^2}{2v \operatorname{Im} it}$$

$$(3.14) \quad (x^2 + (y - t)^2)v = (u^2 + (v - t)^2)y$$

Dado que esta ecuación es válida para todo $t > 0$, entonces debe ser

$$v = y \quad \text{y} \quad x^2 = u^2,$$

es decir,

$$(T \circ \phi)(z) = z \quad \text{o} \quad (T \circ \phi)(z) = -\bar{z}.$$

Puesto que los conjuntos $\{z \mid (T \circ \phi)(z) = z\}$ y $\{z \mid (T \circ \phi)(z) = -\bar{z}\}$ son abiertos y cerrados, entonces $(T \circ \phi)(z) = z$ para todo $z \in \mathcal{H}$ o $(T \circ \phi)(z) = -\bar{z}$ para todo $z \in \mathcal{H}$.

Para ver que toda isometría es composición de reflexiones, basta probar que toda transformación de Möbius lo es. Recordemos que si $T(z) = (az + b)/(cz + d)$, y $c \neq 0$, entonces

$$T(z) = \frac{-1}{c^2(z + d/c)} + \frac{a}{c}.$$

Es suficiente entonces probar que las traslaciones, inversiones y homotecias en G son composición de reflexiones.

Si $T(z) = z + a$, entonces $T(z)$ es composición de las reflexiones $z \mapsto -\bar{z}$ y $z \mapsto -\bar{z} + a$.

Si $T(z) = kz$, con $k > 0$, entonces $T(z)$ es composición de las reflexiones $1/\bar{z}$ y k/\bar{z} .

Por último, la inversión $z \mapsto -1/z$ es composición de las reflexiones $z \mapsto -\bar{z}$ con $z \mapsto 1/\bar{z}$. \square

La particularidad de las isometrías en G es que preservan la orientación. Esto significa que si recorremos una recta en un sentido, la imagen del semiplano que queda a la derecha es también el semiplano a la derecha de la recta imagen. En cambio, las reflexiones son las isometrías que invierten la orientación. Podemos notar en la demostración del teorema que toda isometría de G es composición de un número par de reflexiones, y por lo tanto preservan la orientación.

Ejercicios.

1. Pruebe que las transformaciones de Möbius forman un grupo con la composición.
2. Sea $C(1/2; 1/2)$ la circunferencia centrada en $x_0 = 1/2$ y de radio $1/2$. Calcule y grafique su imagen por la transformación $A(z) = (2z + 1)/z$.
3. Pruebe que si T es una transformación de Möbius, entonces $T \in G$ si y sólo si T preserva el semiplano superior \mathcal{H} .
4. Sea $A(z) = (2z + 1)/(z + 1)$. Calcule y grafique la imagen de la recta $\{z = x + iy \mid x = y\}$.
5. Considere $B(z) = -z/(z - 1)$. Calcule la imagen de $\{z \mid |z| = 1\}$, $\{z = 1 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$, $\{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.

4. RECTAS HIPERBÓLICAS

4.1. Propiedades de las rectas. Hemos probado que toda recta hiperbólica es la intersección del plano hiperbólico con una circunferencia o una recta euclidiana perpendicular a \mathbb{R} . En particular podemos afirmar lo siguiente:

1. Existe una única recta hiperbólica que pasa por dos puntos del plano \mathcal{H} .
2. Dos rectas distintas se cortan a lo sumo en un punto de \mathcal{H} .
3. Dadas dos rectas, L_1 y L_2 , existe una $T \in G$ tal que $T(L_1) = L_2$.

Notemos que estas propiedades también se verifican en la geometría euclídea. El siguiente lema enuncia que dada una recta y punto en \mathcal{H} , existe una única recta que pasa por dicho punto y es perpendicular a la recta dada.

Proposición 4.1. *Sea L una recta en \mathcal{H} y sea $w \in \mathcal{H}$. Existe una única recta que pasa por w y es perpendicular a L .*

Demostración. Notemos que el conjunto L_w dado por

$$L_w = \{z \in \mathcal{H}, |z| = |w|\},$$

es la *única* recta que pasa por w y es perpendicular al eje imaginario positivo I^+ . Por lo tanto, si L es una recta en \mathcal{H} consideremos la transformación $T \in G$ tal que $T(L) = I^+$. Luego $T(L)$ es perpendicular a $L_{T(w)}$, y por lo tanto L es perpendicular a la recta $T^{-1}(L_{T(w)})$. \square

4.2. El orden en la recta. Una noción importante en geometría es el concepto de orden en una recta, estar *antes de*, *después de*, o *entre*. Sea L una recta, $z, w \in L$. Entonces $L - \{z, w\}$ tiene tres componentes. Dos de ellas son no acotadas, y la otra tiene longitud finita. A esta última la denotamos por (z, w) y lo llamaremos *segmento* abierto de extremos z y w . Análogamente definimos el segmento cerrado $[z, w]$ si incluimos los extremos. Decimos que ξ está entre z y w si ξ pertenece al segmento (z, w) .

También permitiremos la notación (z, w) con z o w en \mathbb{R}_∞ . Así por ejemplo, $(0, i]$ denota un rayo sobre el eje imaginario I^+ , o $(2, 4)$ denota la intersección de la circunferencia euclídea con centro en $x = 3$ y radio 1 con el plano \mathcal{H} .

Podemos decir entonces que si $z, w, \xi \in \mathcal{H}$, entonces

$$\rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w),$$

si y sólo si $\xi \in [z, w]$.

4.3. Posiciones relativas de las rectas.

Definición 4.2. Sean L_1, L_2 dos rectas hiperbólicas distintas. Decimos que L_1 y L_2 son *paralelas* si y sólo si tienen un único extremo en común. Si no poseen ningún extremo en común, decimos que son *secantes* si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ y *disjuntas* o *no secantes* si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Figura 7

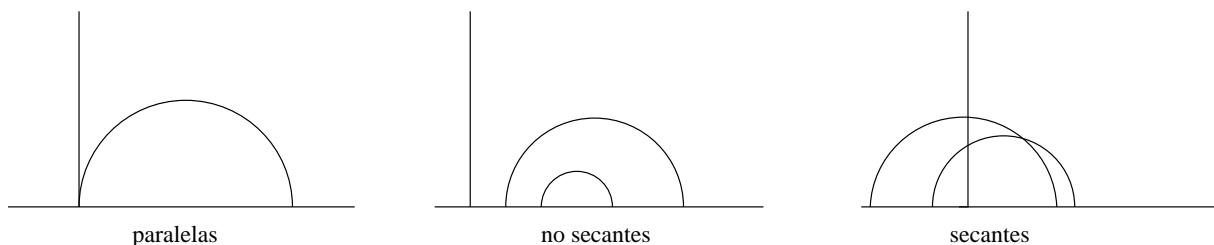


FIGURA 7. Posiciones relativas de rectas hiperbólicas

Concluimos esta sección enunciando el análogo al V Postulado.

Teorema 4.3. *Dada una recta y un punto exterior a ella, existen dos rectas paralelas e infinitas no secantes que pasan por dicho punto.*

La Figura 8 muestra gráficamente las rectas paralelas a L por el punto z . Dada una recta L y un punto w exterior a ella, consideremos los dos extremos a y b de L . Cada una de las rectas que pasa por w con un extremo en a y en b respectivamente, son las rectas paralelas a L por el punto w . El ángulo awb es el doble del *ángulo de paralelismo*. Toda recta por el punto w que pase por el interior de dicho ángulo será secante con L . Las demás rectas son no secantes.

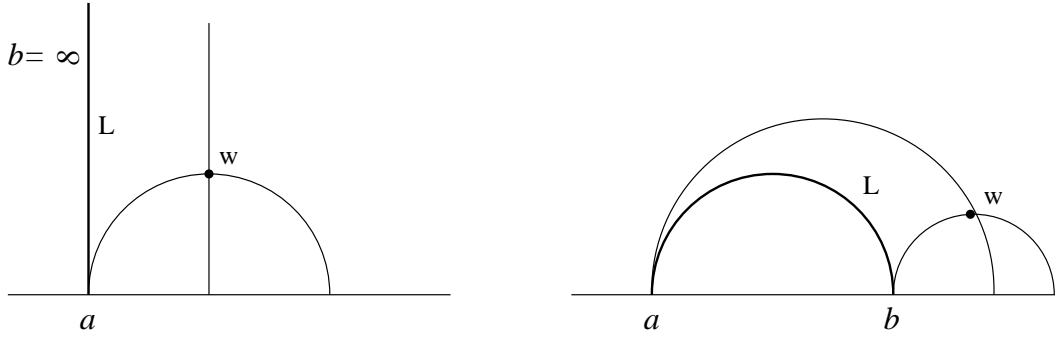


FIGURA 8. Rectas paralelas por un punto exterior

Hemos dado hasta ahora una presentación del plano de Poincaré, determinando los puntos, rectas, arcos de rectas, segmentos, ángulos; también hemos definido una distancia y los movimientos rígidos o isometrías. Culminamos esta sección con la definición de área hiperbólica.

Definición 4.4. Sea E una figura en el plano hiperbólico. Definimos el *área hiperbólica* de E y la denotamos $\mathcal{A}(E)$ como

$$(4.1) \quad \mathcal{A}(E) = \int \int_E \frac{dx dy}{y^2}.$$

Es importante notar que el área hiperbólica de una región en \mathcal{H} es invariante por isometrías.

5. LA CIRCUNFERENCIA HIPERBÓLICA

Llamamos circunferencia hiperbólica con centro w y radio r y la denotamos $C(w; r)$ al conjunto

$$C(w; r) = \{z \in \mathcal{H} \mid \rho(z, w) = r\}.$$

Llamamos círculo hiperbólico con centro w y radio r y lo denotamos $D(w; r)$ al conjunto

$$C(w; r) = \{z \in \mathcal{H} \mid \rho(z, w) \leq r\}.$$

Teorema 5.1. 1. *La longitud de una circunferencia hiperbólica de radio r es $2\pi \sinh r$.*
 2. *El área de $D(w; r)$ es $4\pi \sinh^2(r/2)$.*

Demostración. Sea $z = x + iy$, $w = w_1 + iw_2$. De la fórmula (3.8),

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}$$

y haciendo las cuentas correspondientes se sigue que $z \in C(w; r)$ si y sólo si

$$(x - w_1)^2 + (y - w_2 \cosh r)^2 = w_2 \sinh^2 r.$$

Es decir que $C(w; r)$ es la circunferencia euclídea con centro en $w_1 + i(w_2 \cosh r)$ y radio $w_2 \sinh r$. (Ver Figura 9).

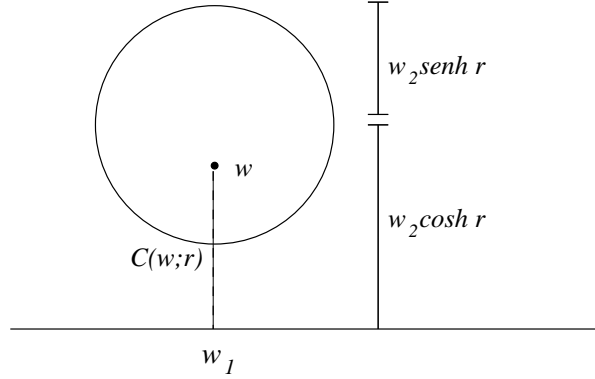


FIGURA 9. Circunferencia hiperbólica $C(w, r)$

Para calcular su longitud, podemos aplicar una transformación $T \in G$ de modo que $T(w) = i$ y calcular la longitud de la circunferencia $C(i; r)$.

Esta circunferencia puede ser parametrizada por

$$\gamma(t) = \sinh r (\cos t + i \sin t) + i \cosh r, \quad -\pi < t < \pi.$$

La longitud de γ es

$$l(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sinh r dt}{\sinh r \sin t + \cosh r} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\sin t + \coth r}.$$

Para calcular esta integral, llamamos $a = \coth r$. Sea $u = \tan(t/2)$; entonces

$$du = \frac{dt}{2 \cos^2(t/2)} = \frac{u^2 + 1}{2} dt; \quad \sin t = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\sin t + a} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2du}{(1 + u^2) \left(\frac{2u}{u^2 + 1} + a \right)} \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2u + a(1 + u^2)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + 2ua^{-1} + 1} \\ &= 2/a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(u + a^{-1})^2 + (1 - a^{-2})} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$v = \frac{u + a^{-1}}{\sqrt{1 - a^{-2}}},$$

lo anterior es igual a

$$\frac{2}{a\sqrt{1 - a^{-2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v^2 + 1} = \frac{2}{a\sqrt{1 - a^{-2}}} \arctan v \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{a\sqrt{1 - a^{-2}}} \pi.$$

Si ahora reemplazamos $a = \coth r$ obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\sin t + a} = 2\pi \sinh r.$$

Calculemos ahora el área del círculo. Nuevamente, podemos considerar el círculo $D(i; r)$. Entonces

$$\mathcal{A}(D) = \int_0^r 2\pi \sinh r \, dr = 2\pi(\cosh r - 1).$$

□

EJERCICIOS

1. Muestre que si $z = a + ib$, entonces la ecuación de $C(z; r)$ es

$$(x - a)^2 + (y - b \cosh r)^2 = b^2 \sinh^2 r.$$

2. Suponga $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Sea z_3 la intersección de la recta hiperbólica $[x_1, x_3]$ con la recta $x = x_2$. Del mismo modo, sea z_4 la intersección de la recta hiperbólica $[x_1, x_4]$ con la misma recta. Pruebe que

$$\rho(z_3, z_4) = \frac{1}{2} \log \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3}.$$

6. TRIÁNGULOS

Al igual que en la geometría euclídea, dados tres puntos en el plano \mathcal{H} , llamaremos triángulo a la unión de los tres arcos de recta hiperbólica que unen dichos puntos. En realidad, extenderemos esta definición permitiendo que los vértices del triángulo pertenezcan a \mathbb{R}_∞ .

Unificaremos la notación llamando v_a, v_b y v_c a los vértices del triángulo opuestos a los lados de longitud a, b y c , con ángulos interiores α, β y γ .

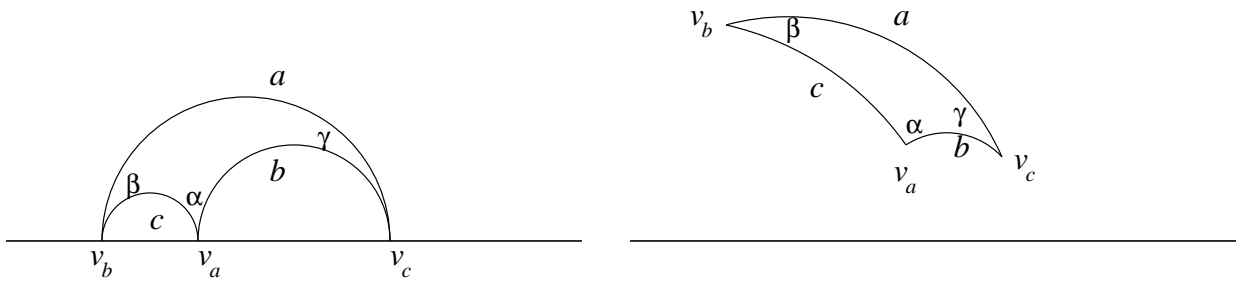


FIGURA 10. Triángulos hiperbólicos

Así por ejemplo, si $v_a \in \mathcal{H}$, entonces $b = c = \infty$.

6.1. El ángulo de paralelismo. Consideremos una recta L y un punto w exterior a ella. Si trazamos una recta P paralela a L por w y una perpendicular T a L por w ; resultará un triángulo con ángulos $0, \pi/2$ y α . El ángulo α se llama ángulo de paralelismo. (Ver Figura 11.)

En la geometría euclídea el ángulo α mide $\pi/2$, pero este no es el caso en la geometría hiperbólica. En primer lugar notemos que podemos asumir que L y P son rectas perpendiculares a \mathbb{R} , y llamemos b al lado de longitud finita.

Lema 6.1. Si b y α son como antes, entonces se cumple que

1. $\sinh b \tan \alpha = 1$,
2. $\cosh b \sin \alpha = 1$,
3. $\tanh b \sec \alpha = 1$.

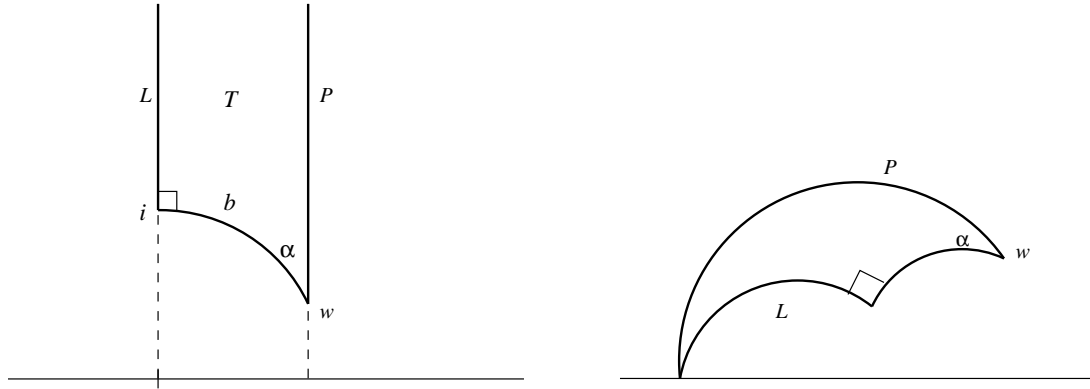


FIGURA 11. Ángulo de paralelismo

Demostración. Asumimos que $v_c = \infty$, $v_b = \infty$ y $v_a = x + iy$, con $x^2 + y^2 = 1$. Observando la Figura 12 se puede ver que $y = \text{sen } \alpha$

$$\cosh b = 1 + \frac{x^2 + (y - 1)^2}{2y} = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2y} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen } \alpha}.$$

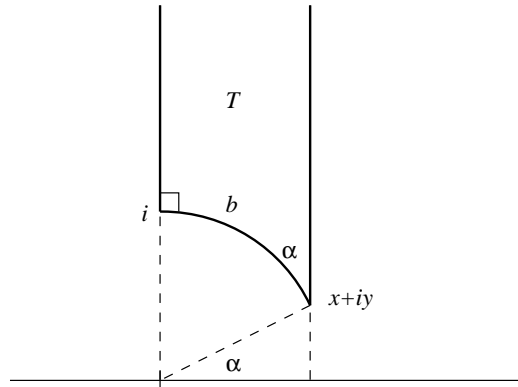


FIGURA 12

Análogamente se pueden probar las restantes identidades. □

Ejercicios.

1. Pruebe que en la geometría hiperbólica, los vértices de un triángulo pueden pertenecer a una misma circunferencia.
2. Pruebe que el diámetro de un triángulo T , esto es,

$$\sup\{\rho(z, w) : z, w \in T\},$$

es la longitud del lado mayor.

3. Sean T_1 y T_2 dos triángulos, ambos con tres lados de longitud infinita. Muestre que existe una isometría que mapea T_1 sobre T_2 .

6.2. Triángulos con un vértice en el infinito. Consideremos un triángulo con ángulos α , β y 0; con α, β no nulos. En ese caso se tiene $a = b = \infty$, y $0 < c < \infty$.

Teorema 6.2. *Para cualquier triángulo con ángulos α , β y θ se tiene que*

$$(6.1) \quad \cosh c = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

$$(6.2) \quad \operatorname{senh} c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

Demostración. Basta considerar el caso en que $v_c = \infty$, y podemos asumir $v_a = e^{i\theta}$, $v_b = e^{i\phi}$, con $0 < \theta < \phi < \pi$. Luego se tiene que $\alpha = \theta$ y que $\beta = \pi - \phi$. De (3.8) se sigue que

$$\cosh c = 1 + \frac{|v_a - v_b|^2}{2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi} = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}.$$

La segunda identidad se resuelve análogamente y la dejamos como ejercicio. \square

6.3. Triángulos con un ángulo recto. Consideraremos ahora triángulos con sus tres vértices en \mathcal{H} , y ángulos α , β y $\pi/2$. Podemos asumir que

$$v_c = i, \quad v_b = ik, \quad v_a = s + it,$$

con $k > 1$ y s, t positivos tales que $s^2 + t^2 = 1$. (Ver Figura 13)

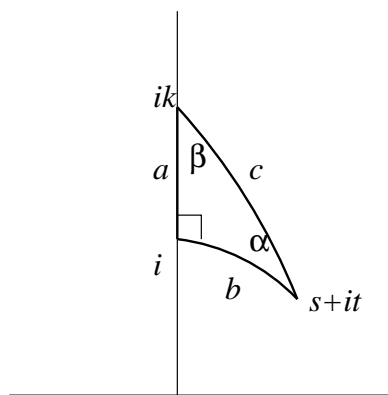


FIGURA 13. Triángulo con un ángulo recto

Teorema 6.3 (Relación entre los lados). *Para cualquier triángulo con ángulos α , β y $\pi/2$ se tiene que*

$$(6.3) \quad \cosh c = \cosh a \cosh b.$$

Demostración. En efecto, si aplicamos la fórmula (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} \cosh c &= 1 + \frac{s^2 + (k-t)^2}{2kt} = \frac{1+k^2}{2kt} \\ \cosh b &= 1 + \frac{s^2 + (t-1)^2}{2t} = \frac{1}{t} \\ \cosh a &= 1 + \frac{(k-1)^2}{2k} = \frac{k^2+1}{2k} \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. Para este caso particular se tiene además que

$$(6.4) \quad \operatorname{tanh} b = s.$$

\square

Teorema 6.4 (Relación entre dos lados y el ángulo comprendido). *Para cualquier triángulo con ángulos α , β y $\pi/2$ se tiene que*

1. $\tanh b = \sinh a \tan \beta$,
2. $\sinh b = \sinh c \sin \beta$,
3. $\tanh a = \tanh c \cos \beta$.

Demostración. Los vértices v_a y v_b yacen sobre una circunferencia euclídea de centro x_0 . (Ver Figura 14). Como las distancias (euclídeas) de estos vértices al centro x_0 son iguales, tenemos

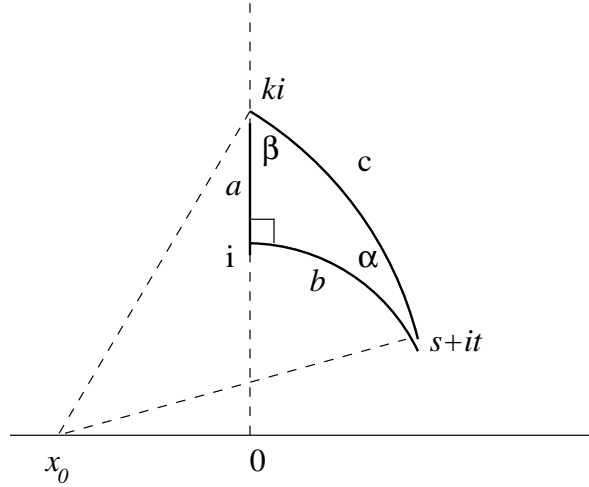


FIGURA 14

que

$$\begin{aligned} (s - x_0)^2 + t^2 &= k^2 + x_0^2 \\ -2sx_0 + 1 &= k^2 \\ x_0 &= \frac{1 - k^2}{2s}. \end{aligned}$$

En particular tenemos que $x_0 < 0$. El ángulo del triángulo euclídeo con vértices en ki , x_0 y 0 en x_0 es precisamente β . Luego, por los resultados del teorema anterior y por (6.4) se tiene que

$$\tan \beta = \frac{k}{|x_0|} = \frac{2sk}{k^2 - 1} = \frac{\tanh b}{\sinh a}.$$

□

Teorema 6.5 (Relación entre un lado y los dos ángulos adyacentes). *Para cualquier triángulo con ángulos α , β y $\pi/2$, se tiene que*

$$(6.5) \quad \cosh a \sin \beta = \cos \alpha$$

$$(6.6) \quad \cosh b \sin \alpha = \cos \beta$$

$$(6.7) \quad \cosh c = \cot \alpha \cot \beta.$$

Demostración. La demostración de este teorema se deduce usando los resultados de los dos teoremas anteriores, y se deja como ejercicio para el lector. □

6.4. Las reglas del seno y del coseno. Consideraremos ahora un triángulo hiperbólico con lados a , b y c opuestos a ángulos no nulos α , β y γ . Asumimos que los tres vértices del triángulo pertenecen a \mathcal{H} . Para cualquier triángulo de este tipo se verifican cada una de las siguientes reglas:

Regla del Seno.

$$\frac{\sinh a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\sinh b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\sinh c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

Regla del Coseno I.

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma.$$

Regla del Coseno II.

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}.$$

Una conclusión importante que se deduce de la Regla del Coseno II es que si dos triángulos tienen ángulos congruentes entonces tienen lados congruentes. La recíproca también se verifica. Es decir, si T_1 y T_2 son triángulos con lados congruentes, existe un movimiento rígido que aplica T_1 en T_2 y por lo tanto los ángulos resultan congruentes. Concluimos entonces que

Teorema 6.6. *Dos triángulos hiperbólicos son congruentes si y sólo si sus ángulos son congruentes.*

Volvamos ahora a la demostración de las reglas del Seno y del Coseno. Será suficiente probar que se verifica la Regla del Coseno I.

Sea entonces v_a , v_b y v_c los vértices del triángulo, y consideremos la perpendicular a la recta que contiene a c por el punto v_c , y sea v el punto de intersección.

Puede ocurrir que v pertenezca al lado c o a su prolongación. Asumiremos que v está en c . La demostración del otro caso es análoga.

Se tiene que $c = c_1 + c_2$. Sea d el cateto común a ambos triángulos rectángulos resultantes. De (6.3) se tiene que

$$\cosh a \cosh b = \cosh^2 d \cosh c_1 \cosh c_2.$$

Utilizando las identidades $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ y $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \cosh a \cosh b - \cosh c &= (1 + \sinh^2 d) \cosh c_1 \cosh c_2 - \cosh(c_1 + c_2) \\ &= \sinh^2 d \cosh c_1 \cosh c_2 - \sinh c_1 \sinh c_2. \end{aligned}$$

De las ecuaciones del Teorema 6.5 se tiene que

$$\sinh^d = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_2}{\operatorname{sen}^2 \gamma_2} \quad \text{y} \quad \sinh^d = \frac{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_1}{\operatorname{sen}^2 \gamma_1}.$$

Por lo tanto

$$\sinh^2 d = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_2} \sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_1}}{\operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \gamma_2}.$$

Del mismo modo se obtiene que

$$\sinh \gamma_1 \sinh \gamma_2 = \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma_1 - \operatorname{sen}^2 \beta} \sqrt{\cos^2 \gamma_2 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} = \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_1} \sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_2}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}.$$

Usando que $c = c_1 + c_2$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \sinh^2 d \cosh c_1 \cosh c_2 - \sinh c_1 \sinh c_2 &= \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_2} \sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_1}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \gamma_2} (\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - \operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \gamma_2) \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_2} \sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_1}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \gamma_2} (\cos \gamma). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 \sinh a \sinh b &= \sqrt{\cosh^2 a - 1} \sqrt{\cosh^2 b - 1} \\
 &= \sqrt{\cot^2 \gamma_1 \cot^2 \gamma - 1} \sqrt{\cot^2 \gamma_2 \cot^2 \alpha - 1} \\
 &= \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma_1 \cos^2 \beta - \sin^2 \gamma_1 \sin^2 \beta} \sqrt{\cos^2 \gamma_2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \gamma_2 \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma_1 \sin \gamma_2} \\
 &= \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma_1 - \sin^2 \beta} \sqrt{\cos^2 \gamma_2 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma_1 \sin \gamma_2}
 \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\sinh^2 d \cosh \gamma_1 \cosh \gamma_2 - \sinh \gamma_1 \sinh \gamma_2 = \sinh \alpha \sinh \beta \cos \gamma,$$

lo que completa la demostración de la Regla del Coseno I.

Para probar la Regla del Seno, usamos la Regla del Coseno I y observamos que

$$\left(\frac{\sinh c}{\sin \gamma} \right)^2 = \frac{\sinh^2 c}{1 - \left(\frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} \right)^2} = \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{(\sinh a \sinh b)^2 - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2}.$$

Ahora bien, la expresión $(\sinh a \sinh b)^2 - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2$ es simétrica en a , b y c , de donde se concluye la Regla del Seno.

Por último, probamos la Regla del Coseno II. Para simplificar la notación escribimos A por $\cosh a$, y análogamente B y C . Por la Regla del Coseno I tenemos que

$$\cos \gamma = \frac{AB - C}{(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}},$$

y por lo tanto

$$\sin^2 \gamma = \frac{D}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)},$$

donde $D = 1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2)$ es una expresión simétrica en A , B y C . Si multiplicamos numerador y denominador de

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

por la constante positiva

$$(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}(C^2 - 1)^{1/2},$$

obtenemos

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{((BC - A)(CA - B) + (AB - C)(C^2 - 1))}{D} = C.$$

Ejercicios.

1. Pruebe que para un triángulo cualquiera, $a \leq b \leq c$ si y sólo si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.
2. Muestre que un triángulo es un triángulo equilátero si y sólo si $\alpha = \beta = \gamma$ y que en tal caso

$$2 \cosh\left(\frac{1}{2}a\right) \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = 1.$$

Notar que si α tiende a $\pi/3$, entonces a tiende a 0.

3. Muestre que para un triángulo general, la biseatriz de v_a contiene el punto medio de $[v_a, v_c]$ si y sólo si $b = c$. (Triángulo isósceles).

4. Pruebe que existe una isometría que mapea un triángulo T_1 sobre un triángulo T_2 si y sólo si T_1 y T_2 tienen ángulos congruentes (o lados de igual longitud).
5. Pruebe que para cualquier triángulo con ángulos α , β y γ se tiene que

$$\sinh c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

7. ÁREA DE TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS

En esta sección determinaremos el área de triángulos y polígonos en general. Un polígono de vértices z_1, z_2, \dots, z_n es la unión de los segmentos $[z_1, z_2], [z_2, z_3], \dots, [z_{n-1}, z_n]$. Descontamos que dos segmentos consecutivos no pertenecen a la misma recta hiperbólica.

Teorema 7.1. *Para cualquier triángulo T con ángulos α , β y γ se cumple que*

$$(7.1) \quad \mathcal{A}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

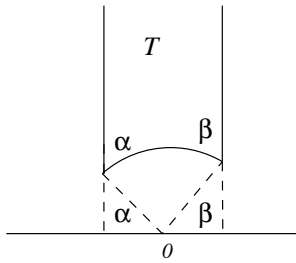


FIGURA 15

Corolario 7.2. *La suma de los ángulos interiores de un triángulo hiperbólico es menor o igual a π .*

Demostración. Es suficiente considerar un triángulo con $\gamma = 0$, y v_a, v_b sobre la recta $\{|z| = 1\}$. Si α y β son como en la Figura 15, entonces

$$\mathcal{A}(T) = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos \beta} \left[\int_{(1-x^2)^{1/2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right] dx = \pi - (\alpha + \beta);$$

que es el resultado deseado para $\gamma = 0$.

En general, cualquier triángulo contenido en \mathcal{H} es la diferencia de dos triángulos con un vértice en ∞ . Basta prolongar el rayo con origen v_a por v_c hasta un punto w en \mathbb{R}_∞ y considerar el triángulo con vértices v_a, v_b y w . □

Teorema 7.3. *Si P es un polígono hiperbólico con ángulos interiores $\theta_1, \dots, \theta_n$, entonces*

$$(7.2) \quad \mathcal{A}(P) = (n - 2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n).$$

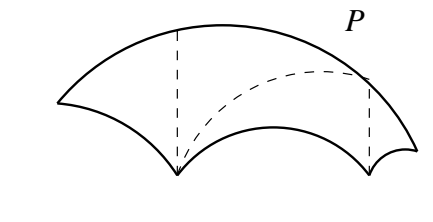


FIGURA 16. Polígono hiperbólico

Demostración. Este teorema se verifica tanto para polígonos convexos como para no convexos. Un polígono convexo es aquel en el que cada lado deja todo el polígono en un mismo semiplano. En este caso, la prueba se reduce a subdividir el polígono en $n - 2$ triángulos hiperbólicos, por ejemplo, uniendo un vértice con cada uno de los $n - 3$ restantes no adyacentes. Los detalles de la prueba no los haremos aquí, pero no ofrecen mayores dificultades.

En el caso de los polígonos convexos se utiliza la fórmula de Euler, triangularizando todo el plano hiperbólico. Para una idea de esta prueba sugerimos el libro de Beardon, [1]. \square

REFERENCIAS

- [1] I. Alan F. Beardon *The geometry of discrete groups*. Springer Verlag. (1983).
- [2] J. O. Boggino y R. J. Miatello. *Geometría Hiperbólica I*. Revista de Educación Matemática. **3**. Nro.1, 33-52 (1987).
- [3] J. O. Boggino y R. J. Miatello. *Geometría Hiperbólica II*. Revista de Educación Matemática. **3**. Nro.2, 47-62 (1987).
- [4] Beppo Levi. *Leyendo a Euclides*. Libros del Zorzal. 2da. Edición (2001)
- [5] Luis A. Santaló *Geometrías no euclidianas*. Cuadernos de Eudeba. (1961)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA. MEDINA ALLENDE S/N

E-mail address: kisbye@mate.uncor.edu