

---

# El operador de Dirac en variedades compactas planas

Ricardo A. Podestá

---

Director: Roberto J. Miatello

*Córdoba, Noviembre de 2004.*

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR



## Resumen

En este trabajo consideramos variedades compactas planas  $M$  dotadas de una estructura spin  $\varepsilon$  y estudiamos propiedades espectrales de operadores de Dirac  $D_\rho$  actuando en campos spinoriales de  $M$ , donde  $\rho$  es una cierta representación del grupo fundamental de  $M$ .

Damos a continuación una lista de los pasos principales desarrollados en el trabajo:

- ✓ Se estudian las estructuras spin de las variedades compactas planas.
- ✓ Se calcula el espectro de  $D_\rho$  para  $M$  y  $\varepsilon$  arbitrarios, dando expresiones para las multiplicidades de los autovalores.
- ✓ Se obtiene una expresión general para la serie eta,  $\eta(s)$ , asociada a  $D_\rho$  y se estudia la asimetría espectral a través de dicha serie.
- ✓ En el caso particular de las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades, es decir aquellas con grupo de holonomía isomorfo a  $\mathbb{Z}_2^k$ , se caracterizan aquellas que tienen espectro asimétrico y se dan expresiones explícitas tanto para la serie  $\eta(s)$  como para el invariante  $\eta$ .
- ✓ Se estudia el problema de la isospectralidad de variedades compactas planas con respecto al operador  $D_\rho$ . Se compara a ésta con otros tipos de isospectralidad y también se dan varios ejemplos de pares de variedades  $D_\rho$ -isospectrales con distintas propiedades topológicas o geométricas.
- ✓ Se obtienen expresiones cerradas de  $\eta(s)$  y de  $\eta$  para familias de variedades con grupo cíclico de holonomía  $\mathbb{Z}_p$ , con  $p$  primo, y también  $\mathbb{Z}_4$ .



## Dedicatoria

*A mi viejo,  
quien me enseñó a pensar.*



## En otras palabras

“The mathematician does not study  
pure mathematics because it is useful,  
he studies it because he delights in it  
and he delights in it because it is beautiful.”

*Henri Poincaré.*

“Nadie puede escribir un libro. Para  
Que un libro sea verdaderamente,  
Se necesitan la aurora y el poniente,  
Siglos, armas y el mar que une y separa.”

*Jorge Luis Borges.*

“Pure Mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.”

*Albert Einstein*

Ah! . . . este sueño surcará  
las ventanas y el baúl  
de tu espejo interno.

Ah! . . . que razón de ser  
me habrá puesto piel  
en la inmensidad

*Luis Alberto Spinetta.*

“In science one tries to tell people, in such a way as to be understood by everyone, something that no one ever knew before. But in poetry, it's the exact opposite.”

*Paul Dirac.*

“For me it remains an open question whether [this work]  
pertains to the realm of mathematics or to that of art”.

*M.C. Escher.*





## Agradecimientos (a modo de Prólogo)

Muchas personas, algunas entidades y numerosos hechos y circunstancias, han contribuido de diversas maneras en este lustro para que, después de tanta esforzada búsqueda, aquella lejana y borrosa ninfa inicial de ideas abandonara su naturaleza quimérica para adquirir un carácter algo más real y convertirse, por fin, en un trabajo de matemática. A todas esa plétora de personas que voluntariamente, o no, me ayudaron, les doy las gracias. Una pequeña nómina de ellas merece ser puesta en evidencia.

En primer lugar quiero mencionar a Roberto, mi Director. Su trato cordial y amistoso me ha permitido trabajar siempre a gusto y en libertad y sus consejos y opiniones han sido siempre muy oportunos y provechosos. A él quiero agradecerle el constante aliento y el invaluable apoyo que me brindó en todo lo referente al ámbito académico como así también en cuestiones puramente personales. También, agradezco su atención, su guía y su paciencia.

En segundo lugar agradezco a todos aquellos en FaMAF, que de algún modo u otro han hecho más fáciles y gratas las largas horas vividas en la facultad, y a la FaMAF misma por contar con todo lo necesario para llevar a cabo este trabajo. También a todos los profesores que me han escuchado y ayudado cada vez que he tenido alguna irrefrenable inquietud matemática y a los compañeros de cursos y de oficina.

No puedo dejar de expresar mi profunda gratitud al CONICET, a la SecytUNC y a FOMECA por el importante apoyo económico brindado en forma de becas y al CIEM, Fundación Antorchas y la UMA por la gran ayuda prestada de diversas maneras.

Un agradecimiento especial va para los integrantes del Tribunal: los Doctores Jorge Solomín, Isabel Dotti, Juan Pablo Rossetti y Jorge Vargas, por las molestias que esto pudiera haberles ocasionado. En particular a Juan Pablo, por sus útiles comentarios y sugerencias.

En último lugar, aunque primeros en mi corazón, quiero agradecer a mi familia y amistades por hacer más fácil y placentero mi tránsito por este mundo. Un agradecimiento especial a mis padres y hermana, quienes siempre me apoyaron, por su amor, afecto y paciencia. A mis amigos, por todos los buenos momentos compartidos y en especial a Andrés por su humor irreverente.

Un agradecimiento enorme y muy especial para Adriana, por todo su amor, comprensión y paciencia (sobre todo por su gran paciencia...). Su compañía ha sido fundamental y necesaria (aunque no suficiente) para la concreción de este trabajo, apoyándome y alentándome incondicionalmente. Gracias a ella que, con buen tino, me regala momentos de dicha y de paz, alejándome así de las pesadas sombras de mis pensamientos matemáticos fallidos.

Un racimo final de agradecimientos para los *otros* matemáticos, aquellos que me ayudaron sin saberlo y cuyo arte no deja de inspirarme. Ellos son: Jorge Luis, Ricardo Enrique, Luis Alberto, Mauritius Cornelius, José Raúl, Salvador, Astor, Robert, Woody y Lou.

A todos, de verdad, muchas gracias.

## Índice general

Resumen	III
Dedicatoria	V
En otras palabras	VII
Agradecimientos (a modo de Prólogo)	IX
Introducción	XIII
El comienzo (el trabajo de Dirac).	XIV
Operadores de Dirac en variedades Riemannianas.	XV
Cálculo explícito del espectro de Dirac.	XVI
Isospectralidad.	XVII
Serie eta e invariante eta.	XIX
Resultados más importantes.	XX
<b>Parte 1. Preliminares</b>	<b>1</b>
Capítulo 1. Variedades compactas planas	3
1.1. Grupos de Bieberbach	3
1.2. Variedades compactas planas	5
Variedades de tipo diagonal	6
1.3. Holonomía	6
1.4. Espectro de Laplacianos en fibrados	7
1.5. Apéndice: la clasificación de las variedades compactas planas	8
<i>Notas.</i>	9
Capítulo 2. El grupo spin y la representación spinorial	11
2.1. Definiciones y propiedades elementales.	11
Álgebras de Clifford	11
Grupos pin y spin	12
Representación spinorial	13
2.2. Algunos hechos sobre el grupo y la representación spin	14
<i>Notas.</i>	18
<b>Parte 2. Resultados sobre estructuras spin</b>	<b>19</b>
Capítulo 3. Estructuras $\text{pin}^\pm$ y spin	21
3.1. Estructuras $\text{pin}^\pm$ y spin en variedades compactas planas.	21

3.2. Estructuras $\text{pin}^\pm$ en $F$ -variedades, $F$ abeliano.	24
3.3. $\mathbb{Z}_2$ -variedades.	29
<i>Notas.</i>	34
Capítulo 4. ¿Se pueden oír las estructuras $\text{spin}$ ?	35
4.1. Los pares isospectrales	35
<b>Parte 3. Resultados generales sobre el operador de Dirac</b>	41
Capítulo 5. El espectro del operador de Dirac torcido en variedades compactas planas	43
5.1. Operadores de Dirac torcidos	43
Fibrados spinoriales	43
Campos spinoriales	44
El Laplaciano spinorial y el operador de Dirac.	45
5.2. El espectro del operador de Dirac torcido	46
5.3. Asimetría espectral. La serie $\eta$ y el invariante $\eta$ .	52
Serie $\eta$	53
Apéndice: Relación con el Teorema del Índice	54
Capítulo 6. Espectro de Dirac en $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades	57
6.1. Espectro de Dirac y spinores armónicos.	57
6.2. La serie $\eta(s)$ y el invariante $\eta$ .	62
<b>Parte 4. Aplicaciones</b>	65
Capítulo 7. Isospectralidad del operador de Dirac	67
7.1. Resultados sobre isospectralidad	67
7.2. Algunos ejemplos de $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades Dirac-isospectrales	68
7.3. Familias muy grandes de variedades Dirac-isospectrales	73
Capítulo 8. Serie $\eta$ e invariante $\eta$ de $\mathbb{Z}_p$ -variedades, $p$ primo	77
8.1. Estructuras $\text{spin}$	77
8.2. Función $\eta$ e invariante $\eta$ de $\mathbb{Z}_p$ -variedades	79
Apéndice: Invariantes $\eta$ para $p < 10000$	84
Capítulo 9. Espectro de Dirac, serie $\eta$ e invariante $\eta$ de $\mathbb{Z}_4$ -variedades	89
9.1. Una familia de $\mathbb{Z}_4$ -variedades $\text{spin}$	89
9.2. El espectro de Dirac	91
9.3. Serie $\eta$ e invariante $\eta$ de $\mathbb{Z}_4$ -variedades	94
Apéndice A. Invariantes $\eta$ en dimensión 3	97
Bibliografía	99

## Introducción

Este trabajo se ubica dentro del ámbito de la geometría espectral. Si  $A$  es un operador diferencial definido sobre una variedad Riemanniana  $M$ , el  $A$ -espectro de  $M$ , denotado por  $Spec_A(M)$ , es el conjunto de autovalores de  $A$  contados con multiplicidades. El objetivo fundamental de la geometría espectral es el estudio del espectro  $Spec_A(M)$  y de las interrelaciones que existen entre dicho espectro y la topología y geometría de  $M$ , para distintas elecciones de  $A$ .

En este trabajo nos restringiremos al estudio del *operador de Dirac en variedades compactas planas*. Más precisamente, si  $M$  es una variedad compacta plana spin (o sea, una tal variedad dotada de una estructura spin) y  $\rho$  es una representación unitaria compleja del grupo fundamental  $\pi_1(M)$  de  $M$ , consideraremos un operador diferencial elíptico de primer orden  $D_\rho$ , simétrico y autoadjunto, actuando en secciones suaves del llamado fibrado spinorial “*torcido*” por  $\rho$ . En el caso particular en que  $(\rho, V) = (1, \mathbb{C})$  se obtiene el operador de Dirac “*clásico*”,  $D$ , de  $M$ .

Toda variedad compacta plana es isométrica a un cociente  $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ , donde  $\Gamma$  es un grupo de Bieberbach (ver Capítulo 1), luego  $\Gamma \simeq \pi_1(M_\Gamma)$ . Si  $\Lambda$  denota el retículo de traslaciones de  $\Gamma$ , entonces  $F = \Lambda \backslash \Gamma$  es un grupo finito, la holonomía lineal de  $M_\Gamma$ . Por el teorema de Cartan-Ambrose-Singer toda variedad Riemanniana con grupo de holonomía finito es necesariamente plana. Esta clase de variedades ha sido muy importante en el estudio de la isospectralidad respecto del operador de Hodge-Laplace en  $p$ -formas,  $\Delta_p$ , con  $0 \leq p \leq n$  (ver páginas XVII-XIX). Siguiendo la terminología introducida por Charlap ([Ch]), llamaremos  $F$ -variedad a una variedad con grupo de holonomía isomorfo a  $F$ .

Los tres temas principales de los cuales nos ocuparemos en el presente trabajo son: (1) el cálculo explícito del espectro de  $D_\rho$ , (2) el estudio de la asimetría espectral de  $M_\Gamma$  a través de la serie eta,  $\eta_\rho(s)$ , y el invariante eta,  $\eta_\rho$ , asociados a  $D_\rho$ , y (3) el problema de la isospectralidad respecto de dicho operador.

La tesis está estructurada en cuatro partes e incluye resultados de tres trabajos previos: [MP], [MP2], realizados en colaboración con el Doctor Roberto Miatello, y [Po]. La primera parte se ocupa de los preliminares (variedades planas y representaciones spinoriales) que se usarán en el resto del trabajo. La segunda parte trata exclusivamente sobre las estructuras

spin, ingrediente fundamental para la definición del operador de Dirac en variedades Riemannianas. La tercera es la parte medular del trabajo. Allí se dan los resultados generales sobre el espectro del operador de Dirac y la asimetría espectral de éste. En particular, si  $M_\Gamma$  es una variedad compacta plana arbitraria de dimensión  $n$ , con estructura spin  $\varepsilon$ , obtenemos fórmulas para las multiplicidades de los autovalores de  $D_\rho$  (distinguiendo los casos  $n$  par y  $n$  impar) en términos de caracteres de la representación spinorial; y también, una expresión general para la serie eta de  $M_\Gamma$ . Todas las expresiones dependen de  $\Gamma$  y de  $\varepsilon$ . Las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades,  $1 \leq k \leq n - 1$ , son estudiadas por separado en mayor detalle obteniendo expresiones explícitas para  $\eta_\rho(s)$  y  $\eta_\rho$ . La última parte está dedicada a las aplicaciones. Utilizando material de capítulos previos obtenemos, por un lado, resultados de isospectralidad con respecto a  $D_\rho$ , y, por otro, fórmulas bien explícitas de los invariantes  $\eta$  para familias de  $\mathbb{Z}_p$ -variedades, con  $p$  primo, y de  $\mathbb{Z}_4$ -variedades. Dichas fórmulas resultan interesantes por su íntima relación con la teoría algebraica y analítica de números.

A continuación, haremos un revisión general de los temas tratados indicando brevemente la relevancia de cada uno de ellos.

**El comienzo (el trabajo de Dirac).** Al final de la década del '20 la marcha de las ideas y los descubrimientos llevaron a los físicos a una aceptación general de la teoría relativista del electrón. Sin embargo, Paul Dirac se encontraba disconforme con las ideas prevalecientes del momento y estaba buscando una formulación mejor. En 1928, finalmente encontró una teoría acorde a sus ideas que explicaba la mayoría de los principios de la época. Finalmente, su teoría resultó ser uno de los grandes logros intelectuales de ese tiempo, de una gran belleza en la matemática utilizada y que no sólo clarificó algunos fenómenos misteriosos sino que predijo la existencia de una partícula similar al electrón, ¡pero de energía negativa! Esto fue luego comprobado experimentalmente y cambió el modo de entender la naturaleza desde entonces.

En mecánica cuántica el estado de una partícula se describe por una función de onda  $\psi(t, x)$  del espacio de Lorentz  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Buscando darle forma a su teoría, Dirac se topó con el problema de encontrar una ecuación de onda  $D\psi = \lambda\psi$  Lorentz-invariante que sea compatible con la ecuación de Klein-Gordon  $\square\psi = \lambda\psi$  donde  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ . La causalidad más la invariancia de Lorentz requería que  $D$  fuese de primer orden en todas las variables. Lo que Dirac estaba buscando era, básicamente, una factorización del Laplaciano  $\Delta = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ . Asumiendo que  $D$  fuera un operador a coeficientes constantes consideró

$$D = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \gamma_i \in \mathbb{C}.$$

La condición  $D^2 = \square$  implica que para  $0 \leq i, j \leq 3$  con  $i \neq j$  se tiene:

$$\gamma_i^2 = -1 \quad \text{y} \quad \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 0.$$

Dicho  $D$  es el llamado *operador de Dirac*. Generalizando a dimensión  $n$ , hoy reconocemos a estas relaciones como las generadoras del álgebra de Clifford  $Cl(n)$  de  $\mathbb{R}^n$  con la forma cuadrática definida negativa  $-\|\cdot\|^2$ .

**Operadores de Dirac en variedades Riemannianas.** El operador de Dirac, tal como éste lo definió, sólo se puede considerar en  $\mathbb{R}^n$ . Los operadores de Dirac en variedades Riemannianas fueron introducidos por Atiyah y Singer ([AS]), y por Lichnerowicz ([Li]), tratando de generalizar el operador de Dirac en  $\mathbb{R}^n$ . Éstos, son operadores de gran importancia en geometría diferencial y juegan hoy un rol fundamental en el estudio de las mutuas y profundas interrelaciones existentes entre topología, geometría, análisis y física matemática. Aparecen en situaciones tan diversas como teoría de índice de operadores, teoría de Hodge, teoría de calibres (gauge theory), cuantización geométrica, etcétera.

La motivación primera para su definición y estudio fue la siguiente. Al comienzo de los años '60 los matemáticos buscaban una fórmula topológica para el índice de un operador elíptico arbitrario definido sobre una variedad compacta. Esta fórmula generalizaría el importante teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch ya establecido para el caso algebraico complejo. Atiyah y Singer se dieron cuenta que las variedades que admiten una estructura spin en su fibrado tangente tenían propiedades interesantes y muy sugestivas. Adaptando la construcción de Dirac a estas variedades, produjeron un operador diferencial elíptico de primer orden, globalmente definido, y canónicamente asociado a la métrica Riemanniana subyacente. El índice de este operador es el invariante topológico llamado  *$\hat{A}$ -genus* y resulta un entero para estas variedades spin, hecho que no es cierto en general. Torciendo este operador de tipo Dirac con fibrados de coeficientes arbitrarios se obtiene una fórmula para el índice de cualquier operador elíptico.

Daremos a continuación los detalles de la construcción del operador de Dirac (que en algunos trabajos es denominado de Atiyah-Singer) y una explicación de porqué este operador sólo puede ser definido para variedades Riemannianas dotadas de una estructura spin.

Buscar un operador  $D$  tal que  $D^2 = \Delta$ , naturalmente lleva a estudiar las representaciones del álgebra de Clifford  $Cl(n)$ . Esta álgebra tiene una representación  $L : Cl(n) \rightarrow \text{End}(S)$  de dimensión mínima  $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  llamada la representación spinorial de  $Cl(n)$ . Los elementos de  $S$  son llamados *spinores*. Como  $\mathbb{R}^n \subset Cl(n)$ , un spinor  $w \in S$  puede ser multiplicado a izquierda por un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  de la forma

$$x \cdot w = L(x)(w),$$

llamada multiplicación de Clifford a izquierda. El hecho fundamental es que no existe una representación no trivial  $\tau$  del grupo  $O(n)$  en el espacio de

spinores  $S$  que sea compatible con la multiplicación de Clifford, o sea que satisfaga la relación

$$B(x) \cdot \tau(B)(w) = \tau(B)(x \cdot w)$$

para todo  $B \in O(n)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $w \in S$ . De este modo, los spinores en variedades Riemannianas no pueden ser definidos como secciones de un fibrado vectorial asociado al fibrado de marcos de la variedad. Es por esta razón que en geometría diferencial el interrogante de hasta qué punto el concepto de spinores se podía transferir del espacio plano a variedades Riemannianas estuvo abierto por décadas. Recién con el desarrollo de los fibrados principales y sus fibrados asociados junto con la teoría general de las conexiones en geometría diferencial a fines de los años '40 permitieron sortear esta dificultad.

Para  $n \geq 3$ , el grupo  $SO(n)$  tiene un cubrimiento universal doble denotado  $\text{Spin}(n)$ . La restricción de  $L$  a  $\text{Spin}(n)$ ,  $L : \text{Spin}(n) \rightarrow GL(S)$ , llamada *representación spin*, es compatible con la multiplicación de Clifford. Ahora, considerando las variedades Riemannianas  $M^n$  llamadas spin, es decir aquellas variedades orientables cuyo fibrado de marcos permite una reducción del grupo de estructura  $SO(n)$  de  $M^n$  al cubrimiento  $\text{Spin}(n)$ , podemos definir el fibrado vectorial asociado con esta reducción por medio de la representación  $L$ , el llamado *fibrado spinorial*  $S_L(M)$ . Luego, los campos spinoriales de  $M$  son secciones del fibrado  $S_L(M)$  y el operador de Dirac  $D$  se define localmente por la fórmula

$$D\psi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi$$

donde  $e_1, \dots, e_n$  es un marco ortonormal de  $M$  y  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de la variedad Riemanniana  $M$ .

Resulta que  $D$  es un operador diferencial elíptico de primer orden, simétrico y esencialmente autoadjunto. Si la variedad  $M$  es compacta, el espectro  $\text{Spec}_D(M)$  consta de un conjunto discreto de autovalores reales  $\{\lambda_j\}$  con multiplicidad finita que se acumulan sólo en el infinito ( $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ ).

**Cálculo explícito del espectro de Dirac.** El cálculo explícito de espectros es en general una tarea que no siempre se puede realizar, aún para variedades compactas. El primer cálculo explícito del espectro del operador de Dirac, del que tengo noticia, fue hecho por Nigel Hitchin, en 1974, en esferas de dimensión 3 con métricas de Berger ([**Hi**]). El cálculo muestra que el espectro de  $D$  depende de la métrica elegida.

En 1980, Friedrich consideró el toro plano  $n$ -dimensional  $T_\Lambda = \Lambda \setminus \mathbb{R}^n$  ([**Fr**]) y calculó el espectro mostrando la dependencia de éste con respecto a las diferentes estructuras spin elegidas. En este caso el espectro es simétrico.

En el contexto de las variedades compactas planas, aparte de los toros, sólo se conoce el espectro en dimensión 3. En 2000, Pfäffle ([**Pf**]) determinó las estructuras spin,  $\varepsilon$ , de las 6 variedades compactas planas orientables  $M_\Gamma$  en dimensión 3 y calculó el espectro de Dirac de cada par  $(M_\Gamma, \varepsilon)$ .



En este caso aparecen espectros asimétricos. Sin embargo, el método utilizado es básicamente geométrico y no parece posible una fácil generalización a dimensiones mayores puesto que está basado en tener una descripción explícita de los grupos de Bieberbach cuya clasificación se conoce sólo hasta dimensión 6.

El presente trabajo cubre el caso de dimensión  $n$  arbitraria. El método utilizado es estudiar la equivariancia por  $\Gamma$  de las autosecciones del toro que cubre a  $M_\Gamma$ .

En el caso general, el espectro de Dirac se conoce para un número pequeño de variedades, básicamente: esferas y formas esféricas, grupos de Lie compactos simplemente conexos, algunos espacios proyectivos y algunas Grassmannianas. Los detalles se pueden encontrar en la siguiente tabla

Variedades con espectro de Dirac conocido

$\mathbb{R}^n/\Lambda$	toros planos	[Fr, '84]
$\mathbb{R}^3/\Gamma$	compactas planas, dim 3	[Pf, '00]
$\mathbb{R}^n/\Gamma$	<b>compactas planas, dim <math>n</math></b>	[MP2, '03]
$S^n$	esferas de curvatura constante	[Sul, '79], [Ba2, '94], [Tr, '95], [CH, '96]
$S^n/\Gamma$	formas esféricas	[Ba2, '94]
$S^{2m+1}$	esferas con métricas de Berger	[Hi, '74] $m = 1$ , [Ba3, '96]
$S^3/\mathbb{Z}_k$	espacios lentes con métricas de Berger	$m$ general [Ba, '92]
$\mathbb{C}P^{2m-1}$	proyectivos complejos	[CFG, '89], [SeSe, '93], [CFG2, '94]
$\mathbb{H}P^m$	proyectivos cuaterniónicos	[Bu, '91] $m = 2$ , [Mi, '92]
		$m$ general
$Gr_2(\mathbb{R}^{2m})$	Grassmannianas reales	[St, '80] $m = 3$ , [St2, '80]
		$m$ general
$Gr_{2p}(\mathbb{R}^{2m})$	Grassmannianas reales	[See, '97], [See2, '97]
$Gr_2(\mathbb{C}^{m+2})$	Grassmannianas complejas	[Mi2, '98]
$G$	gr. de Lie comp. simp. conexos	[Fe, '87]
$H_3/\Gamma$	3-variedades de Heisenberg	[AB, '98]
$G_2/SO(4)$		[See, '97], [See2, '97]

**Isospectralidad.** Uno de los objetivos principales de la geometría espectral es saber qué invariantes topológicos o geométricos de una variedad  $M$  se pueden determinar a partir del espectro  $Spec_A(M)$  (geometría espectral optimista). Sin embargo, el espectro determina pocos datos de  $M$ , básicamente el volumen,  $vol(M)$ , y la dimensión,  $dim(M)$ .

Debido a esta aparente mezquindad del espectro, alternativamente y con más éxito, se estudia qué invariantes o propiedades *no* son determinados por

$Spec_A(M)$  (geometría espectral pesimista). Acá entra en juego la isospectralidad, un interesante problema en geometría Riemanniana que ya tiene una historia de 40 años desde que el paper de Kac, “*Can one hear the shape of a drum?*” ([**Ka**]), vió la luz en 1964. Este problema estudia la relación entre el “sonido” (espectro) y la “forma” (métrica). Dos variedades  $M, M'$ , se dicen *isospectrales respecto de  $A$*  (o  *$A$ -isospectrales*) si  $Spec_A(M) = Spec_A(M')$ . Hay dos maneras distintas de abordar el estudio de la isospectralidad. Una, es dar condiciones para que dos variedades sean isospectrales, y otra, es dar ejemplos de variedades isospectrales parecidas en algún sentido pero con distintas propiedades topológicas o geométricas.

El problema de la isospectralidad ha sido estudiado mayoritariamente para el operador de Hodge-Laplace  $\Delta_p$ , actuando en  $p$ -formas diferenciables,  $0 \leq p \leq n$ , para el cual existen muchos pares de variedades isospectrales no isométricas. El primero de estos ejemplos se debe a Milnor ([**Mil2**]), quien en 1964 construyó (basándose en un trabajo previo de Witt, [**Wi**, '41]) pares de toros planos  $T, T'$ , isospectrales y no-isométricos, de dimensión  $n \geq 16$ , dando una respuesta negativa a la pregunta de Kac. Similares ejemplos con toros de dimensiones más bajas fueron luego sucesivamente obtenidos por Kneser ([**Kne**, '67],  $n \geq 12$ ), Kitaoka ([**Ki**, '77],  $n \geq 8$ ), Schiemann ([**Schi**, '90],  $n \geq 4$ ) y Conway-Sloane ([**CoSl**, '92],  $n \geq 4$ ).

En las últimas dos décadas hubo un aluvión de ejemplos de pares de variedades Riemannianas isospectrales y no isométricas entre sí, destacándose los métodos de Sunada, de Pesce y los trabajos de Gordon, entre otros. Una lista (incompleta) de autores y trabajos sobre isospectralidad es la siguiente: Vignéras [**Vi**, '80], Ikeda [**Ik**, '83], [**Ik2**, '89], [**Ik3**, '97], Sunada [**Sun**, '78], [**Sun2**, '85], Buser [**Bus**, '86], [**Bus2**, '94], Berard [**Be**, '89], [**Be2**, '92], [**Be3**, '93], DeTurck-Gordon [**DG**, '87], Gordon [**Go**, '86], [**Go2**, '86], [**Go3**, '92], [**Go4**, '93], [**Go6**, '01], Gordon-Webb-Wolpert [**GoWW**, '92], Gordon-Webb [**GoWe**, '94], Pesce [**Pe**, '94], [**Pe2**, '96], Gornet [**Gor**, '96], [**Gor2**, '00], Gordon-Gornet [**GoGo**, '97], Gordon-Wilson [**GoWi2**, '97], Schüth [**Schu**, '99], Szabó [**Sza**, '01], Sutton [**Sut**, '02]. En particular, numerosos ejemplos de variedades  $\Delta_p$ -isospectrales con interesantes propiedades fueron obtenidos usando variedades compactas planas por Dotti y Miatello en [**DM**] y por Miatello y Rossetti en [**MR**, **2**, **3**, **4**, **5**]. Para una reseña más completa y detallada sobre isospectralidad ver por ejemplo [**Go5**] o [**CPR**].

Sin embargo, la isospectralidad con respecto al operador de Dirac,  $D$ , ha sido muy poco estudiada y hay escasos ejemplos en la literatura. Sólo podemos mencionar un par  $D$ -isospectral de formas esféricas  $\Gamma \backslash \mathbb{S}^n$ ,  $\Gamma' \backslash \mathbb{S}^n$  no-isométricas de dimensión  $n = 4d - 1$ ,  $d \geq 5$  ([**Ba2**]), y por [**AB**, Thm. 5.1] los toros isospectrales de Milnor ([**Mil2**]) y las deformaciones isospectrales de Gordon-Wilson ([**GoWi**]) también resultan  $D$ -isospectrales. Notar que de los ejemplos mencionados, sólo los toros de Milnor son variedades compactas planas.

Este tema será tratado en el Capítulo 7 donde se dan varios ejemplos de pares y *familias* muy grandes (en un sentido preciso) de variedades  $D_\rho$ -isospectrales con distintas propiedades topológicas, geométricas y espectrales (para otros espectros).

**Serie eta e invariante eta.** Si  $A$  es un operador diferencial elíptico autoadjunto positivo sobre una  $n$ -variedad compacta  $M$ , entonces  $A$  tiene espectro discreto de autovalores positivos  $\{\lambda_j\}$  de multiplicidad finita  $d(\lambda_j)$  y  $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$ . A este espectro se lo puede estudiar por medio de la función zeta

$$\zeta_A(s) = \sum_{0 \neq \lambda \in \text{Spec}_A(M)} \lambda^{-s}, \quad \text{Re}(s) > \frac{n}{d},$$

donde  $d$  es el orden de  $A$ . Tal función es una generalización de la función zeta de Riemann clásica  $\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s}$ , con  $\text{Re}(s) > 1$ .

Si  $A$  es no positivo, entonces hay autovalores positivos y negativos. En este caso, el espectro se dice *asimétrico* si para algún  $\lambda \in \text{Spec}_A(M) \setminus \{0\}$  se tiene  $d(\lambda) \neq d(-\lambda)$ . Para estudiar este fenómeno, Atiyah, Patodi y Singer introdujeron la versión “*signada*” de la función zeta, a saber

$$\eta_A(s) = \sum_{0 \neq \lambda \in \text{Spec}_A(M)} \text{sgn}(\lambda) |\lambda|^{-s}.$$

Esta serie converge absolutamente en el semiplano  $\text{Re}(s) > \frac{n}{d}$  y define una función holomorfa  $\eta_A(s)$  la cual tiene continuación analítica a todo  $\mathbb{C}$  con (posibles) polos simples en el conjunto  $\{n - k : k \in \mathbb{N}_0\}$ . Es un hecho notable y altamente no trivial que  $s = 0$  es un valor regular de  $\eta(s)$ , es decir  $\eta(0) < \infty$ . Esto fue probado por Atiyah, Patodi y Singer ([**APS**], [**APS2**]) para  $n$  impar, y por Gilkey ([**Gi**], [**Gi2**]) para  $n$  par. Usando otro método Wodzicki pudo manejar ambos casos ([**Wod**]). Dicha función puede verse como una generalización de las funciones  $L$  de Dirichlet. El número  $\eta_A(0)$  es un invariante espectral importante, llamado *invariante  $\eta$* , y da una medida de la asimetría espectral de  $A$ .

Dicho invariante también es relevante por su relación con los teoremas de índice de operadores elípticos en variedades cerradas. Para ciertos operadores, al generalizar dichos teoremas a variedades con borde, el invariante  $\eta$  aparece en el “*término de corrección*”. Por ejemplo, en el caso del operador de Dirac,  $D$ , se tiene que si  $M$  es una variedad compacta spin de dimensión par y  $N = \partial M$  entonces el índice de  $D$ , bajo ciertas condiciones globales de borde, está dado por

$$\text{Ind}(D) = \int_M \hat{\mathcal{A}}(p) - \frac{d_0 + \eta}{2}$$

donde  $\hat{\mathcal{A}}(p)$  es el  $\hat{\mathcal{A}}$ -polinomio de Hirzebruch en las formas de Pontrjagin  $p_i$ ,  $\eta$  es el invariante eta asociado a  $D_N$ , el operador  $D$  restringido a  $N$ , y  $d_0 = \dim \ker D_N$  (ver [**APS**, Thm. 4.2]).

La determinación de  $\eta(s)$  y  $\eta$  no siempre es posible y cálculos explícitos de éstos se conocen para una pequeña clase de variedades Riemannianas. Como ya mencionamos, en este trabajo consideramos  $A = D_\rho$ , y la función eta asociada denotada por  $\eta_\rho(s)$ . Para variedades compactas planas spin la situación es la siguiente: Pfäffle calculó los invariantes  $\eta_\rho$  para dichas variedades en dimensión 3, en el caso particular  $(\rho, V) = (1, \mathbb{C})$  (ver [Pff]).

En este trabajo daremos una expresión para  $\eta_\rho(s)$  de una variedad compacta plana arbitraria  $M$ , de dimensión  $n$ , para cualquier estructura spin  $\varepsilon$  que esta admita. En el caso particular de las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades,  $1 \leq k \leq n-1$ , obtenemos expresiones bien explícitas para  $\eta_\rho(s)$ , en términos de diferencias de funciones zeta de Hurwitz

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(j + \alpha)^s},$$

definidas para  $Re(s) > 1$  y  $\alpha \in (0, 1]$ . La función  $\zeta(s, \alpha)$  tiene continuación analítica a todo  $\mathbb{C}$ , con polo simple en  $s = 1$ , lo que permite calcular  $\eta_\rho$  por simple evaluación en  $s = 0$ . Resultados similares se obtienen para dos familias de variedades compactas planas spin con grupos cíclicos de holonomía: una familia de  $p$ -variedades con  $F \simeq \mathbb{Z}_p$ , donde  $p$  es un primo de la forma  $4r + 3$ , y otra familia con  $F \simeq \mathbb{Z}_4$ .

**Resultados más importantes.** Describimos ahora, en cierto detalle, los resultados principales del trabajo.

En la Parte 2, nos ocuparemos de la existencia de estructuras spin sobre una variedad compacta plana  $M_\Gamma$ . Estas estructuras están en biyección con los homomorfismos  $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \text{Spin}(n)$  que cumplen  $\mu \circ \varepsilon = r$  donde  $\mu : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$  es el cubrimiento universal y  $r : \text{Is}^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{SO}(n)$  es la proyección canónica. En el Capítulo 3, daremos condiciones necesarias y suficientes para que  $M_\Gamma$ , con grupo de holonomía abeliano, admita estructuras spin. En particular, probaremos que toda  $n$ -variedad con grupo de holonomía  $F \simeq \mathbb{Z}_2$  admite  $2^{n-j}$  estructuras spin, para un cierto  $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . En el caso en que  $M_\Gamma$  es de “tipo diagonal” (ver Capítulo 1), entonces  $M_\Gamma$  admite  $2^n$  estructuras spin al igual que los toros planos  $n$ -dimensionales. En el Capítulo 4, mostraremos que “no se puede oír” la existencia de estructuras spin exhibiendo pares de variedades compactas planas  $M, M'$ , en dimensión  $n \geq 6$ , que son Laplace-isospectrales y tal que una de ellas admite estructuras spin y la otra no.

En la Parte 3, estudiaremos el espectro del operador de Dirac “torcido” de una variedad compacta plana spin  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  arbitraria. Más precisamente, toda representación unitaria  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{U}(V)$ , define un fibrado vectorial plano  $E_\rho := \Gamma \backslash (\mathbb{R}^n \times V)$  sobre  $M_\Gamma$ . Ahora, si  $(L, S)$  denota la representación spin de  $\text{Spin}(n)$  podemos considerar el fibrado spinorial torcido asociado  $S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon) := \Gamma \backslash (\mathbb{R}^n \times (S \otimes V)) \rightarrow M_\Gamma$ , donde la acción en  $\mathbb{R}^n \times (S \otimes V)$  de  $\Gamma$  está dada por  $\gamma \cdot (x, w \otimes v) = (\gamma x, L(\varepsilon(\gamma))(w) \otimes \rho(\gamma)(v))$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in S, v \in V$ . Denotamos por  $D_\rho$ , el operador de Dirac actuando en secciones

diferenciables de  $S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon)$ . Para simplificar, asumiremos que  $\rho|_\Lambda = Id$ , esto es,  $\rho$  induce una representación unitaria compleja del grupo de holonomía  $F$ . Similares resultados pueden ser obtenidos en mayor generalidad, por ejemplo, asumiendo que  $\rho|_\Lambda = \chi$ ,  $\chi$  un carácter unitario arbitrario de  $\Lambda$ . Sin embargo, esto tornaría los enunciados de los resultados más complicados, sin obtener grandes novedades a cambio.

En el Teorema 5.2.5, para una variedad compacta plana spin  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  arbitraria, obtenemos fórmulas para las multiplicidades  $d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon)$  de los autovalores  $\pm 2\pi\mu$ ,  $\mu > 0$ , del operador de Dirac  $D_\rho$  asociado a la estructura spin  $\varepsilon$  y con un fibrado plano torcido por  $\rho$ , en términos de los caracteres  $\chi_\rho$  de  $\rho$  y  $\chi_{L_n}, \chi_{L_{n-1}^\pm}$  de las representaciones spin y medio-spin, respectivamente. La fórmula de multiplicidad se puede escribir del siguiente modo. Si  $n$  es impar entonces

$$(0.0.1) \quad d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = \frac{1}{|F|} \left( \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma \\ B \notin F_1}} \chi_\rho(\gamma) \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B} e^{-2\pi i u \cdot b} \chi_{L_{n-1}^\pm}(x_\gamma) + \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma \\ B \in F_1}} \chi_\rho(\gamma) \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B} e^{-2\pi i u \cdot b} \chi_{L_{n-1}^{\pm\sigma(u, x_\gamma)}}(x_\gamma) \right).$$

Aquí,  $F_1$  es el subconjunto de  $F$  correspondiente a los elementos  $BL_b \in \Gamma$  con  $n_B := \dim \ker(B - Id) = 1$  y

$$\Lambda_{\varepsilon, \mu}^* = \{u \in \Lambda^* : \|u\| = \mu, \varepsilon(\lambda) = e^{2\pi i \lambda \cdot u} \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\},$$

donde  $\Lambda^*$  denota el retículo dual de  $\Lambda$ . Más aún, para  $\gamma \in \Gamma$ ,  $x_\gamma$  es un elemento en el toro maximal de  $\text{Spin}(n-1)$ , que es conjugado en  $\text{Spin}(n)$  a  $\varepsilon(\gamma)$ . Además,  $\sigma(u, x_\gamma)$  es un signo que depende de  $u$  y de la clase de conjugación de  $x_\gamma$  en  $\text{Spin}(n-1)$ . Si  $n$  es par, entonces la fórmula se reduce al primer sumando en (0.0.1) con  $\chi_{L_{n-1}^\pm}$  reemplazado por  $\chi_{L_{n-1}}$ .

También damos la dimensión del espacio de *spinors armónicos* (ver (5.2.10)), es decir la dimensión del núcleo de  $D_\rho$ , mostrando que éstos sólo pueden existir para una clase especial de estructuras spin, a saber, aquellas que restringen trivialmente al retículo de traslaciones  $\Lambda$ .

Como consecuencia del teorema, damos una expresión, (5.3.4), para la serie eta  $\eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(s)$  correspondiente a  $D_\rho$  actuando en secciones de  $S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon)$ .

En el Capítulo 6, nos restringiremos a las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades. En este caso, damos expresiones más sencillas y explícitas para las multiplicidades. En efecto, si el espectro es simétrico, para cada  $\mu > 0$  tenemos que

$$d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = 2^{m-k-1} d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*|.$$

Las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades spin  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  que tienen espectro de Dirac asimétrico son de un tipo muy especial. Esto sucede si y sólo si se cumplen las dos

condiciones siguientes:  $n = 4r + 3$  y existe  $\gamma = BL_b \in \Gamma$ , con  $n_B = 1$  y  $\chi_\rho(\gamma) \neq 0$ , tal que  $B|_\Lambda = -\delta_\varepsilon Id$ . En este caso, el espectro asimétrico es el conjunto de autovalores

$$\{\pm 2\pi\mu_j : \mu_j = (j + \frac{1}{2})\|f\|^{-1}, j \in \mathbb{N}_0\}$$

donde  $f$  satisface  $\Lambda^B = \mathbb{Z}f$ . Además, tenemos:

$$d_{\rho,\mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = \begin{cases} 2^{m-k-1} (d_\rho |\Lambda_{\varepsilon,\mu}^*| \pm 2 (-1)^{r+j} \sigma_\gamma \chi_\rho(\gamma)) & \mu = \mu_j, \\ 2^{m-k-1} d_\rho |\Lambda_{\varepsilon,\mu}^*| & \mu \neq \mu_j \end{cases}$$

donde  $\sigma_\gamma \in \{\pm 1\}$ . También damos una expresión explícita para la serie eta:

$$\eta_{(\Gamma,\rho,\varepsilon)}(s) = (-1)^r \sigma_\gamma \chi_\rho(\gamma) 2^{m-k+1} \frac{\|f\|^s}{(4\pi)^s} (\zeta(s, \frac{1}{4}) - \zeta(s, \frac{3}{4}))$$

donde  $\zeta(s, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+\alpha)^s}$  denota la función zeta de Hurwitz para  $Re(s) > 1$  y  $\alpha \in (0, 1]$ . De aquí obtenemos que el invariante  $\eta$  de  $M_\Gamma$  es igual a

$$\eta_\rho = \pm \chi_\rho(\gamma) 2^{[n/2]-k},$$

con el signo dependiendo de  $\varepsilon$ . Esto generaliza un resultado en [Pf], en el caso  $n = 3$  y  $(\rho, V) = (1, \mathbb{C})$ . Reunimos estos resultados en el Teorema 6.1.2 y la Proposición 6.2.1.

En la cuarta parte, dedicada a las aplicaciones, nos ocuparemos de dar ejemplos de pares (o familias) de variedades Dirac-isospectrales y del cálculo explícito de la serie  $\eta_\rho(s)$  y del invariante  $\eta_\rho$ . En el Capítulo 7, comparamos isospectralidad con respecto al operador de Dirac con otros tipos de isospectralidad –ver la tabla más abajo–; a saber, isospectralidad con respecto al *Laplaciano spinorial*  $\Delta_{s,\rho} := -D_\rho^2$  y con respecto al operador de Hodge-Laplace en  $p$ -formas,  $\Delta_p$ , para  $0 \leq p \leq n$ . También miramos el *espectro de longitudes* de  $M$  o  $[L]$ -*espectro*, y el *espectro débil de longitudes* de  $M$  o  $L$ -*espectro*, esto es, el conjunto de longitudes de geodésicas cerradas contadas con y sin multiplicidades, respectivamente.

La información principal de los Ejemplos 7.2.1, 7.2.2, 7.2.3 y 7.2.4 se reúne en el Teorema 7.1.1. Resumimos los resultados en la siguiente tabla que muestra la independencia de la isospectralidad de Dirac de otras nociones de isospectralidad consideradas.

Isospectralidad de  $M_\Gamma, M_{\Gamma'}$

$D_\rho$	$\Delta_{s,\rho}$	$\Delta_p$ ( $0 \leq p \leq n$ )	$[L]$	$L$	Ejemplo	dim.	$F \simeq F'?$
Sí	Sí	No (genéricamente)	No	No	7.2.1 (i)	$n \geq 3$	Sí
Sí	Sí	Sí (si $p$ impar)	No	No	7.2.1 (iii)	$n = 4t$	Sí
No	Sí	No	No	No	7.2.2 (i)	$n \geq 7$	Sí
Sí/No	Sí/No	Sí ( $0 \leq p \leq n$ )	Sí	Sí	7.2.3 (i)	$n \geq 4$	Sí
Sí/No	Sí/No	Sí ( $0 \leq p \leq n$ )	No	Sí	7.2.3 (ii)	$n \geq 4$	Sí
Sí	Sí	No	No	No	7.2.4	$n \geq 7$	No

Finalmente, en el Ejemplo 7.3.1, a partir de variedades de Hantzsche-Wendt (ver [MR]), construimos una familia muy grande (de cardinalidad dependiendo exponencialmente de  $n$ ) de variedades de dimensión  $2n$ , para  $n$  impar, con grupo de holonomía  $F \simeq \mathbb{Z}_2^k$ , no homeomorfas de a pares, y Dirac-isospectrales entre sí.

En el Capítulo 8, para cada  $p$  primo de la forma  $p = 2m + 1 = 4r + 3$ , consideramos una  $\mathbb{Z}_p$ -variedad de dimensión  $p$  con sus 2 estructuras spin  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Las funciones eta y los invariantes eta correspondientes se pueden escribir en términos de símbolos de Legendre  $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ , de sumas trigonométricas y de funciones de Hurwitz. Más precisamente, para  $h = 1, 2$ , tenemos que

$$\eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon_h)}(s) = \frac{-2p^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi p)^s} \sum_{k=1}^{p-1} \chi_\rho(\gamma^k) (-1)^{k\beta(h)} \binom{k}{p} \sum_{l=1-\beta(h)}^{m-\beta(h)} \sin\left(\frac{(2l+\beta(h))\pi k}{p}\right) Z_{l,p}^h(s)$$

donde

$$Z_{l,p}^h(s) := \zeta\left(s, \frac{2l+\beta(h)}{2p}\right) - \zeta\left(s, 1 - \frac{2l+\beta(h)}{2p}\right)$$

y tomamos  $\beta(h) = 0$  si  $h$  es impar y  $\beta(h) = 1$  si  $h$  es par. También obtenemos

$$\eta_{\rho, \varepsilon_1} = \frac{-2}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi_\rho(\gamma^k) \binom{k}{p} \cot\left(\frac{k\pi}{p}\right),$$

$$\eta_{\rho, \varepsilon_2} = \frac{-2}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi_\rho(\gamma^k) (-1)^k \binom{k}{p} \operatorname{cosec}\left(\frac{k\pi}{p}\right).$$

Además, damos una lista de los valores de  $\eta$  para  $p < 10000$ . Observemos que si  $p = 3$ , nuestros valores están en coincidencia con los obtenidos en [Pf] en el caso  $(\rho, V) = (1, \mathbb{C})$ .

Por último, en el Capítulo 9, consideramos una familia relativamente grande (de cardinalidad cuadrática en la dimensión) de  $\mathbb{Z}_4$ -variedades y calculamos explícitamente  $\eta_\rho(s)$  en términos de diferencias de funciones de Hurwitz (ver (9.3.1) y (9.3.2)) de donde los  $\eta_\rho$  se obtienen por evaluación en  $s = 0$  (ver (9.3.8)).



Parte 1

**Preliminares**



## CAPÍTULO 1

### Variedades compactas planas

Una variedad plana es una variedad Riemanniana conexa  $M$  tal que su conexión de Levi-Civita tiene curvatura idénticamente nula. El teorema de Killing-Hopf da la siguiente caracterización algebraica: toda variedad plana es isométrica a un cociente  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  donde  $\Gamma$  es un grupo de isometrías de  $\mathbb{R}^n$  actuando en forma libre y propiamente discontinua.

Solo consideraremos variedades compactas planas, es decir cocientes compactos  $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ . Tales  $\Gamma$  son llamados grupos de Bieberbach. Luego, el estudio de las variedades compactas planas se reduce al estudio de estos grupos. Los resultados de este capítulo son bien conocidos y dos excelentes referencias son [Ch2] y [Wo].

#### 1.1. Grupos de Bieberbach

El grupo  $\text{Is}(\mathbb{R}^n)$  de isometrías de  $\mathbb{R}^n$  (o grupo Euclídeo  $E(n)$ ) es el grupo de movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^n$  generado por las rotaciones, reflexiones y traslaciones. Así, todo  $\gamma \in \text{Is}(\mathbb{R}^n)$  es de la forma  $\gamma = BL_b$  donde  $B \in O(n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  y  $L_b(x) = x + b$ . Se dice que  $B$  y  $b$  son la *parte rotacional* y *traslacional* de  $\gamma$ , respectivamente. Resulta que  $\text{Is}(\mathbb{R}^n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$  donde el producto está dado por

$$(1.1.1) \quad BL_b \cdot CL_c = BCL_{C^{-1}b+c}.$$

Además,  $\text{Is}(\mathbb{R}^n)$  es un grupo topológico con la topología de  $GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$  y es subgrupo del grupo afín  $\text{Aff}(n) = GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ .

La proyección canónica

$$(1.1.2) \quad r : \text{Is}(\mathbb{R}^n) \rightarrow O(n), \quad BL_b \mapsto B$$

es un homomorfismo con núcleo  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\Gamma \subset \text{Is}(\mathbb{R}^n)$  es un subgrupo, identificamos  $\mathbb{R}^n$  con  $L_{\mathbb{R}^n} \subset \Gamma$ . Luego

$$\Gamma \cap \mathbb{R}^n = \ker(r|_\Gamma) = \{\text{traslaciones puras de } \Gamma\}.$$

Resulta que  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  es un grupo abeliano sin torsión y  $(\Gamma \cap \mathbb{R}^n) \backslash \Gamma \simeq r(\Gamma)$ . Sin embargo, la proyección  $t : \text{Is}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $BL_b \mapsto b$  no resulta un homomorfismo de grupo.

Sea  $\Gamma \subset \text{Aff}(n)$  un subgrupo. Luego,  $\Gamma$  actúa en  $\mathbb{R}^n$  por  $\gamma x = \gamma(x)$ . Se dice que  $\Gamma$  es un grupo *discontinuo* si las órbitas  $\Gamma x = \{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$  son discretas y que  $\Gamma$  *actúa libremente* si, dados  $x \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma x = x$

entonces  $\gamma = Id$ . Además,  $\Gamma$  es *uniforme* (o *cocompacto*) si el cociente  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  es compacto, y,  $\Gamma$  es *irreducible* si  $t(\alpha\Gamma\alpha^{-1})$  genera  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha \in \text{Aff}(n)$ .

En  $\text{Is}(\mathbb{R}^n)$  todo subgrupo discreto es cerrado y vale lo siguiente:

PROPOSICIÓN 1.1.1. *Sea  $\Gamma$  un subgrupo de  $\text{Is}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces,*

(i)  $\Gamma$  es discreto si y sólo si  $\Gamma$  es discontinuo.

(ii)  $\Gamma$  es uniforme si y sólo si  $\Gamma$  es irreducible.

(iii) Si  $\Gamma$  actúa libremente entonces  $\Gamma$  es sin torsión. Si  $\Gamma$  es discontinuo vale la recíproca.

Ahora podemos dar la definición de los grupos de Bieberbach.

DEFINICIÓN 1.1.2. Un *grupo cristalográfico* es un subgrupo discreto y cocompacto  $\Gamma$  de  $\text{Is}(\mathbb{R}^n)$ . Un *grupo de Bieberbach* es grupo cristalográfico sin torsión.

Estos grupos llevan su nombre en honor al matemático alemán Ludwig Bieberbach quién estudió los grupos cristalográficos y describió algunas de sus propiedades en tres famosos teoremas, que podemos enunciar así:

TEOREMA 1.1.3 (Bieberbach 1 y 2, 1910). *Sean  $\Gamma, \Gamma'$  grupos cristalográficos.*

(i)  $r(\Gamma)$  es finito y  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  es un grupo abeliano libre de rango  $n$ .

(ii) Si  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son isomorfos entonces existe  $\alpha \in \text{Aff}(n)$  tal que  $\Gamma' = \alpha\Gamma\alpha^{-1}$ .

O sea, todo isomorfismo entre grupos cristalográficos se realiza mediante un cambio afín de coordenadas.

TEOREMA 1.1.4 (Bieberbach 3, 1912). *Hay un número finito de clases de isomorfismo de grupos cristalográficos de  $\mathbb{R}^n$ , para cada  $n > 0$ .*

Sea  $\Gamma \subset \text{Is}(\mathbb{R}^n)$  un grupo cristalográfico. Por el primer teorema de Bieberbach  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  es un retículo de  $\mathbb{R}^n$  al que denotaremos por  $\Lambda$ . Dicho retículo queda caracterizado como el único subgrupo normal abeliano maximal de  $\Gamma$  ([Ch2, pág. 18]). Sea  $F := r(\Gamma)$ . Luego,  $\Gamma$  satisface la siguiente sucesión exacta

$$(1.1.3) \quad 0 \rightarrow \Lambda \rightarrow \Gamma \xrightarrow{r} F \rightarrow 1$$

donde  $F \simeq \Lambda \backslash \Gamma$  es finito. A  $\Lambda$  y  $F$  se los llama *retículo de traslaciones* y *grupo puntual* de  $\Gamma$ , respectivamente. En el caso en que  $\Gamma$  es un grupo de Bieberbach,  $F$  usualmente se llama *grupo de holonomía* de  $\Gamma$  (ver Sección 1.3). Toda sucesión exacta de esta forma induce una acción de  $F$  en  $\Lambda$  por conjugación. Como  $BL_\lambda B^{-1} = L_{B\lambda}$  para  $B \in O(n), \lambda \in \Lambda$ , en este caso la acción está dada por evaluación  $B \cdot \lambda = B\lambda$ . Dicha acción induce una representación entera  $F \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ , llamada *representación entera de holonomía*. Notar que dicha representación *no determina* al grupo  $\Gamma$ .

Sea  $\Lambda^* = \{\lambda' \in \mathbb{R}^n : \lambda' \cdot \lambda \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}$  el *retículo dual* de  $\Lambda$  y, para cada  $\mu \geq 0$ , sea  $\Lambda_\mu^* = \{\lambda \in \Lambda^* : \|\lambda\| = \mu\}$ . Si  $B \in O(n)$  ponemos

$$(1.1.4) \quad (\Lambda^*)^B = \{\lambda \in \Lambda^* : B\lambda = \lambda\} \quad \text{y} \quad (\Lambda_\mu^*)^B = \{\lambda \in \Lambda_\mu^* : B\lambda = \lambda\}$$

y similarmente para  $\Lambda$ . Además, ponemos

$$(1.1.5) \quad n_B := \dim \ker(B - Id) = \dim(\mathbb{R}^n)^B.$$

Si  $\Gamma$  es un grupo de Bieberbach, el hecho de que  $\Gamma$  es sin torsión implica que  $n_B > 0$  para todo  $\gamma = BL_b \in \Gamma$ . Como  $B$  preserva  $\Lambda$  y  $\Lambda^*$ , también tenemos que  $(\Lambda^*)^B \neq 0$ . En el estudio del espectro del operador de Dirac en variedades compactas planas hará falta considerar el siguiente subconjunto de  $F$ .

DEFINICIÓN 1.1.5. Si  $\Gamma$  es un grupo de Bieberbach con holonomía  $F$  ponemos

$$(1.1.6) \quad F_1 = F_1(\Gamma) := \{B \in F = r(\Gamma) : n_B = 1\}$$

donde  $n_B$  es como en (1.1.5).

## 1.2. Variedades compactas planas

Una *variedad plana* es una variedad conexa, completa y sin borde  $M$  con curvatura seccional nula. O sea,  $M$  es una variedad Riemanniana conexa sin borde cuya conexión Riemanniana  $\nabla$  es plana, es decir  $\nabla$  tiene tensor de curvatura  $R \equiv 0$ . Sólo consideraremos variedades planas que sean compactas.

Consideremos  $\mathbb{R}^n$  con el producto interno canónico. La conexión de Levi-Civita de  $\mathbb{R}^n$  es plana. Sea  $\Gamma \subset \text{Is}(\mathbb{R}^n)$  un grupo de Bieberbach. Como  $\Gamma$  es discreto y sin torsión,  $\Gamma$  actúa libremente en  $\mathbb{R}^n$ . Luego, el cociente  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  es una  $n$ -variedad compacta, pues  $\Gamma$  es cocompacto, y  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  es un cubrimiento Riemanniano. Luego,  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  resulta una variedad compacta plana con grupo fundamental  $\pi_1(\Gamma \backslash \mathbb{R}^n) \simeq \Gamma$ . Es un hecho notable que estas son todas las variedades compactas planas debido al siguiente teorema ([Wo, pág. 69], [Ch2, pág. 63]):

TEOREMA 1.2.1 (Killing-Hopf).  *$M$  es una variedad (Riemanniana) conexa y completa de dimensión  $n$  con curvatura constante  $K = 0$  si y sólo si  $M$  es isométrica a  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  donde  $\Gamma \subset \text{Is}(\mathbb{R}^n)$  es un subgrupo que actúa en forma libre y propiamente discontinua. Más aún,  $M$  es compacta si y sólo si  $\Gamma$  es Bieberbach.*

Luego, el estudio y la clasificación de las variedades compactas planas  $M_\Gamma$  se reduce al correspondiente estudio y clasificación de los grupos de Bieberbach  $\Gamma$ .

Denotaremos por  $M_\Gamma$  a la variedad  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  salvo cuando  $\Gamma = \Lambda$  en cuyo caso ponemos  $T_\Lambda := \Lambda \backslash \mathbb{R}^n$ . En el caso general, como  $\Lambda \subset \Gamma$  es un retículo de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T_\Lambda$  es homeomorfo al toro  $T^n \simeq \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$  y la proyección  $\pi : T_\Lambda \rightarrow M_\Gamma$  es un mapa de cubrimiento.

Reinterpretando los teoremas de Bieberbach para grupos en el contexto de variedades compactas planas tenemos:

TEOREMA 1.2.2. Sean  $M$  y  $M'$  variedades compactas planas de dim  $n$ .

(i)  $M$  está cubierta por un toro plano  $T^n$  y el cubrimiento  $\pi : T^n \rightarrow M$  es una isometría local.

(ii)  $M$  es afínmente equivalente a  $M'$  si y sólo si el grupo fundamental  $\pi_1(M)$  es isomorfo a  $\pi_1(M')$ .

(iii) Hay un número finito de clases de equivalencia afín de variedades compactas planas, en cada dimensión.

En dimensiones bajas ( $1 \leq n \leq 6$ ) las variedades compactas planas están clasificadas salvo difeomorfismos (ver Sección 1.5). En dimensión 1, hay una única variedad: el círculo (o toro unidimensional)  $S^1 = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}$ . En dimensión 2, hay sólo dos: el toro  $T^2 = \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2 \simeq \langle L_{e_1}, L_{e_2} \rangle \backslash \mathbb{R}^2$  y la botella de Klein  $K^2 = \Gamma \backslash \mathbb{R}^2$  con

$$\Gamma = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_{\frac{e_2}{2}}, L_{e_1}, L_{e_2} \right\rangle$$

donde  $\{e_1, e_2\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Se tiene que  $K^2$  es no orientable y  $F \simeq \mathbb{Z}_2$ . Existen 10 variedades en dimensión 3 ([**HW**], [**Wo**]), 6 de las cuales son orientables con grupos de holonomía  $\{1\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$  y  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . De las 4 no orientables, dos tienen grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2$  y dos  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  (ver la nota sobre “platycosms”).

**Variedades de tipo diagonal.** Describimos ahora una clase especial muy interesante de variedades compactas planas. Un grupo de Bieberbach  $\Gamma$  se dice *de tipo diagonal* si existe una  $\mathbb{Z}$ -base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  del retículo  $\Lambda$  tal que para cada elemento  $BL_b \in \Gamma$ ,  $Be_i = \pm e_i$  para  $1 \leq i \leq n$  (ver [**MR4**]). Similarmente,  $M_\Gamma$  se dice *de tipo diagonal*, si  $\Gamma$  lo es. Si  $\Gamma$  es de tipo diagonal, conjugando  $\Gamma$  por una isometría, se puede asumir que  $\Lambda$  es el retículo canónico y además para cada  $\gamma = BL_b \in \Gamma$ , se tiene que  $b \in \frac{1}{2}\Lambda$  ([**MR4**, Lem. 1.4]). Estas variedades tienen grupo de holonomía  $F \simeq \mathbb{Z}_2^k$  para algún  $1 \leq k \leq n - 1$ .

Una familia importante de variedades de dimensión  $n$  de este tipo es la formada por las variedades con grupo de holonomía  $F \simeq \mathbb{Z}_2^{n-1}$ . Muy recientemente Rossetti probó, en [**RS**], que todas estas variedades son de tipo diagonal. Allí, esta familia recibe el nombre de *variedades de Hantzsche-Wendt generalizadas* (o *GHW-variedades*). Las variedades orientables de dimensión impar  $n$  con  $F \simeq \mathbb{Z}_2^{n-1}$ , llamadas *variedades de Hantzsche-Wendt* (o *HW-variedades*), fueron estudiadas previamente en [**MR**] y [**MR2**] y son esferas racionales de homología.

### 1.3. Holonomía

Sea  $M$  una variedad conexa con una conexión en su fibrado tangente  $TM$ . Para cada  $x \in M$  y cada curva cerrada diferenciable a trozos  $\alpha$  con punto inicial y final  $x$ , se tiene la traslación paralela  $\tau_\alpha : T_x M \rightarrow T_x M$  de vectores tangentes a lo largo de  $\alpha$ . Fijado  $x$ , estas  $\tau_\alpha$  forman un grupo  $\Psi_x$  de transformaciones lineales de  $T_x M$ , llamado grupo de holonomía lineal en  $x$ . Si  $z \in M$  y  $\beta$  es una curva de  $x$  a  $z$ , entonces  $\tau \mapsto \tau_\beta \cdot \tau \cdot \tau_\beta^{-1}$  es un

isomorfismo de  $\Psi_x$  sobre  $\Psi_z$ . Luego todos los grupos de holonomía lineal  $\Psi_x$  son equivalentes y hablamos de *el grupo de holonomía lineal  $\Psi$  de  $M$* .

El siguiente resultado caracteriza el grupo de holonomía de una variedad plana.

**TEOREMA 1.3.1.** *Sea  $M$  una variedad conexa completa plana, es decir  $M = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  con  $\Gamma \subset \text{Aff}(n)$  un subgrupo discreto. Entonces, el grupo de holonomía lineal de  $M$  está dado por*

$$\Psi = \{B \in GL_n(\mathbb{R}) : BL_b \in \Gamma\}.$$

*Las formas bilineales simétricas definidas positivas  $\Psi$ -invariantes están en correspondencia con las métricas Riemannianas planas completas de  $M$ .*

De aquí resulta claro que si  $\Gamma$  es un grupo de Bieberbach que satisface una sucesión exacta como (1.1.3), la variedad compacta plana asociada  $M_\Gamma$  tiene grupo de holonomía  $\Psi = r(\Gamma) = F \subset O(n)$ . Además,  $M_\Gamma$  es orientable si y sólo si  $F \subset SO(n)$  (ver [Wo]). Ahora, por el primer teorema de Bieberbach sabemos que  $F$  es finito. El teorema y otros resultados implican la recíproca.

**COROLARIO 1.3.2.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana compacta conexa. Entonces  $M$  es plana si y sólo si tiene grupo de holonomía finito.*

*Nota.* Usaremos la siguiente terminología acuñada por Charlap (ver [Ch]): si  $F$  es un grupo, una  $F$ -variedad es una variedad con grupo de holonomía isomorfo a  $F$ . Por el corolario anterior, si  $F$  es finito, una  $F$ -variedad es una variedad compacta plana  $M_\Gamma$  (con holonomía  $F$ ).

Por último, no queremos dejar de mencionar el sorprendente resultado de Auslander y Kuranishi ([AK]) que afirma que todo grupo finito es el grupo de holonomía de alguna variedad compacta plana, lo cual nos dice que las variedades compactas planas forman una familia muy abundante.

#### 1.4. Espectro de Laplacianos en fibrados

Recordamos aquí un resultado de [MR3] y [MR4] sobre el espectro de operadores de Laplace en fibrados vectoriales sobre variedades compactas planas, que usaremos en los ejemplos del Capítulo 7 al comparar Dirac-isospectralidad con otros tipos de isospectralidad.

Si  $G = \text{Is}(\mathbb{R}^n)$  y  $\tau$  es una representación de dimensión finita del grupo  $K = O(n)$ , se forma el fibrado vectorial  $E_\tau$  sobre  $G/K \simeq \mathbb{R}^n$  asociado a  $\tau$  y se puede considerar el fibrado vectorial correspondiente  $\Gamma \backslash E_\tau$  sobre  $\Gamma \backslash G/K = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n = M_\Gamma$ . Sea  $-\Delta_\tau$  el Laplaciano de conexión sobre este fibrado. Denotemos como es usual por  $\chi_\tau$  y  $d_\tau$  al carácter y la dimensión de  $\tau$ , respectivamente. Por [MR4, Thm. 2.1], la multiplicidad del autovalor  $4\pi^2\mu$  de  $-\Delta_\tau$  está dada por

$$(1.4.1) \quad d_{\tau,\mu}(\Gamma) = \frac{1}{|F|} \sum_{\gamma=BL_b \in \Lambda \backslash \Gamma} \chi_\tau(B) e_{\mu,\gamma}$$

donde

$$(1.4.2) \quad e_{\mu,\gamma} = \sum_{\substack{v \in (\Lambda^*)^B \\ \|v\|^2 = \mu}} e^{-2\pi i v \cdot b}.$$

Si  $\tau = \tau_p$ , la representación  $p$ -exterior de  $O(n)$ , entonces  $-\Delta_{\tau_p}$  corresponde al operador de Hodge-Laplace actuando en  $p$ -formas. En este caso escribiremos  $\Delta_p$ ,  $\chi_p(B)$  y  $d_{p,\mu}(\Gamma)$  en lugar de  $\Delta_{\tau_p}$ ,  $\chi_{\tau_p}(B)$  y  $d_{\tau_p,\mu}(\Gamma)$ , respectivamente.

Luego, el  $p$ -Laplaciano  $-\Delta_p$ ,  $0 \leq p \leq n$ , tiene autovalores  $4\pi^2\mu$  con multiplicidades  $d_{p,\mu}$  dadas por la fórmula (1.4.1). En el caso particular de variedades compactas planas de tipo diagonal los caracteres  $\chi_p(B)$  están dados por valores enteros de polinomios ortogonales discretos  $K_p^n(x)$  (ver [MR3, Rem. 3.6] y [MR4]). En efecto, se tiene:

$$(1.4.3) \quad \chi_p(B) = \text{tr}_{\tau_p}(B) = K_p^n(n - n_B),$$

donde

$$(1.4.4) \quad K_p^n(x) := \sum_{t=0}^p (-1)^t \binom{x}{t} \binom{n-x}{p-t}$$

es el  $p$ -ésimo polinomio de Krawtchouk de orden  $n$ .

### 1.5. Apéndice: la clasificación de las variedades compactas planas

Los 17 grupos cristalográficos del plano eran intuitivamente “conocidos” por los moros, quienes decoraron los palacios de la *Alhambra* con diversos modelos geométricos de cada uno de ellos, y por el gran grabadista holandés M. C. Escher quién también los utilizó a todos en muchos de sus bellos trabajos. Matemáticamente, hubo que esperar hasta los años ‘20 en que Niggli ([Ni]) y Pólya ([Pó]) los describieron, independientemente uno del otro. Sin embargo, los grupos cristalográficos de  $\mathbb{R}^3$  (grupos de simetría de las estructuras cristalinas) eran conocidos desde mucho antes y fueron encontrados independientemente por Feodoroff en 1885, Schönflies en 1891 y Barlow en 1894. Recientemente, Conway *et al* ([CDHT]) dieron una nueva y más simple enumeración de los grupos cristalográficos en dimensión 3.

En 1933, Nowacki ([No]) aisló, de los 219 grupos cristalográficos en dimensión 3 que figuran en la Tabla Internacional, los 10 grupos sin torsión. En 1934, Hantzsche y Wendt ([HW]) dieron la clasificación afín de las variedades compactas de dimensión 3 independientemente de la cristalografía. Este resultado se puede encontrar en [Wo] donde también se considera el caso no compacto y se da, además, una clasificación más fina teniendo en cuenta las clases de isometrías. La clasificación de los grupos de Bieberbach de dimensión 4 fue obtenida con la ayuda de computadoras por Brown *et al* ([BBN+, ‘78]) y en dimensión 5 y 6 más recientemente por Cid y Schulz ([CS, ‘01]).



En la siguiente tabla damos el número de grupos cristalográficos y de Bieberbach en dimensiones bajas:

dimensión	1	2	3	4	5	6
# gr. cristalográficos	2	17	219	4.783	222.018	28.927.922
# gr. de Bieberbach	1	2	10	74	1.060	38.746

En cuanto a dimensiones arbitrarias, en 1956, Calabi ([Ca]) dió un método recursivo para obtener la clasificación afín de las variedades compactas planas de dimensión  $n + 1$  a partir de la clasificación correspondiente en dimensión  $n$ . En la década del '60, Charlap atacó el problema desde el grupo de holonomía  $F$ , en lugar de la dimensión, y dió un método que reduce la clasificación a un problema cohomológico (ver [Ch] o [Ch2]). Siguiendo este método algebraico pudo clasificar todas las  $\mathbb{Z}_p$ -variedades con  $p$  primo.

### Notas.

(1) *Notación.* Sea  $B \in O(n)$  y  $b, x \in \mathbb{R}^n$ . En algunos textos la acción del grupo de isometrías en  $\mathbb{R}^n$  se toma como  $(B, b)x = Bx + b$  que difiere levemente de la notación que adoptamos,  $BL_b(x) = Bx + Bb$ . Luego,  $BL_b$  debe interpretarse como  $(B, B^{-1}b)$  en la otra notación.

(2)  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades e isospectralidad en formas arbitrarias. En [MPR] se prueba, usando propiedades de los polinomios de Krawtchouk, que si se considera el “Laplaciano total”  $\Delta_f = \oplus \sum_p \Delta_p$ , o sea el Laplaciano actuando en formas arbitrarias, entonces para cada  $k$  fijo, con  $0 \leq k \leq n - 1$ , todas las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades cubiertas por el mismo toro (o por toros isospectrales) son mutuamente  $\Delta_f$ -isospectrales.

(3) *Platycosms.* Recientemente, Conway y Rossetti en [CoRo] (también [RC]) estudiaron en detalle las variedades compactas planas de dimensión 3, dando una nueva nomenclatura sistemática que describe algunas de las propiedades de estas variedades. Allí, proponen llamarlas *platycosms*, o sea “universos planos”. Los símbolos y nombres propuestos son los siguientes:

nombre [Wo]	$F$	orientable	símbolo	nombre [CoRo]
$\mathcal{G}_1$	1	✓	$c1$	<i>torocosm</i>
$\mathcal{G}_2$	$\mathbb{Z}_2$	✓	$c2$	<i>dicosm</i>
$\mathcal{G}_3$	$\mathbb{Z}_3$	✓	$c3$	<i>tricosm</i>
$\mathcal{G}_4$	$\mathbb{Z}_4$	✓	$c4$	<i>tetracosm</i>
$\mathcal{G}_5$	$\mathbb{Z}_6$	✓	$c6$	<i>hexacosm</i>
$\mathcal{G}_6$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	✓	$c22$	<i>didicosm</i>
$\mathcal{B}_1$	$\mathbb{Z}_2$	×	$+a1$	<i>first amphicosm</i>
$\mathcal{B}_2$	$\mathbb{Z}_2$	×	$-a1$	<i>second amphicosm</i>
$\mathcal{B}_3$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	×	$+a2$	<i>first amphidicosm</i>
$\mathcal{B}_4$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	×	$-a2$	<i>second amphidicosm</i>

Además, los “platycosms” orientables con grupo de holonomía cíclico se llaman *helicosms*.

(4) *Referencias.* La bibliografía básica para este capítulo es [Ch2], [Wo], [MR2], [MR3] y [MR4].

## El grupo spin y la representación spinorial

El grupo y la representación spin resultan objetos fundamentales para el estudio del operador de Dirac,  $D$ , ya que son ingredientes necesarios en su definición. El grupo spin interviene en la definición de las estructuras spin de una variedad Riemanniana  $M$  (ver Capítulo 3) y  $D$  es un operador diferencial, sólo definido para variedades  $M$  que admiten tales estructuras, actuando en secciones suaves de un fibrado vectorial de  $M$  asociado a la representación spinorial (ver Capítulo 5).

### 2.1. Definiciones y propiedades elementales.

**Álgebras de Clifford.** Sea  $(V, q)$  una forma cuadrática de dimensión  $n$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , es decir,  $V$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y  $q : V \rightarrow \mathbb{K}$  satisface  $q(kv) = k^2q(v)$  para todo  $k \in \mathbb{K}$ ,  $v \in V$ . Si  $T(V)$  denota el álgebra tensorial de  $V$ , el *álgebra de Clifford* de  $(V, q)$  se define por

$$Cl(V, q) := T(V) / \langle v \otimes v + q(v)1 \rangle.$$

Luego,  $Cl(V, q)$  es un álgebra asociativa con unidad generada por  $V$  y  $\mathbb{K}$ , sujeta a las condiciones  $v^2 = -q(v)$  para todo  $v \in V$ . Si  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es una base de  $V$  entonces el conjunto  $\{f_{i_1} \cdots f_{i_j} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n\}$  es una base de  $Cl(V, q)$  y  $\dim Cl(V, q) = 2^n$ . Es claro que  $V \subset Cl(V, q)$  y si  $B$  denota la forma bilineal asociada a  $q$  entonces  $vw + wv = -2B(v, w)$  para todo  $v, w \in V$ . En particular, si  $v$  y  $w$  son  $B$ -ortogonales entonces  $v$  y  $w$  anticonmutan, es decir  $vw + wv = 0$ .

Existe una involución canónica  $\alpha$  en  $Cl(V)$  dada por

$$\alpha(v_1 \dots v_k) = (-1)^k v_1 \dots v_k,$$

con  $v_i \in V$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Como  $\alpha^2 = Id$ , se tiene la descomposición

$$Cl(V) = Cl^0(V) \oplus Cl^1(V)$$

donde

$$Cl^0(V) = \{v \in Cl(V) : \alpha(v) = v\}, \quad Cl^1(V) = \{v \in Cl(V) : \alpha(v) = -v\}$$

son las llamadas parte *par* e *impar* de  $Cl(V)$ , respectivamente. Notar que  $Cl^0(V)$  es una subálgebra de  $Cl(V)$  pero  $Cl^1(V)$  no.

Sólo nos interesará el caso en que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  y  $q$  es definida. Consideremos las álgebras

$$(2.1.1) \quad Cl^\pm(n) := Cl(\mathbb{R}^n, \mp \|\cdot\|^2), \quad Cl(n) := Cl(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|^2).$$

Resulta que  $\mathbb{C}l(n) \simeq Cl^\pm(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , las complexificaciones de  $Cl^\pm(n)$ . Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  denota la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  entonces

$$(2.1.2) \quad \begin{aligned} e_i e_j &= -e_j e_i && \text{para ambas } Cl^\pm(n), && (i \neq j), \\ e_i^2 &= \pm 1 && \text{en } Cl^\pm(n), && (1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

Los dos isomorfismos de periodicidad  $Cl^\pm(n+8) \simeq Cl^\pm(n) \otimes Cl^\pm(8)$  y  $Cl(n+2) \simeq Cl(n) \otimes Cl(2)$  junto con  $Cl^-(8) \simeq Cl^+(8) \simeq \mathbb{R}(16)$  y  $Cl(2) \simeq \mathbb{C}(2)$  permiten clasificar las álgebras de Clifford reales  $Cl^\pm(n)$  y complejas  $\mathbb{C}l(n)$  para todo  $n$ . La clasificación está dada por la siguiente tabla:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$Cl^-(n)$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$Cl^+(n)$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$Cl(n)$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

donde  $\mathbb{K}(n)$  es el álgebra de matrices  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ . Resulta que  $Cl^-(n) \simeq Cl^+(n)$  para  $n \equiv 0(4)$  y  $Cl^-(n) \not\simeq Cl^+(n)$  para  $n \not\equiv 0(4)$ .

**Grupos pin y spin.** El grupo de unidades  $Cl(V, q)^*$  de  $Cl(V, q)$  es un grupo de Lie cuya álgebra de Lie es  $Cl(V, q)$  con el corchete  $[v, w] = vw - wv$ . En  $Cl(V, q)^*$  se definen los subgrupos

$$\text{Pin}(V, q) := \{v_1 \cdots v_k : q(v_j) = \pm 1, 1 \leq j \leq k, k \in \mathbb{N}\}$$

y  $\text{Spin}(V, q) := \text{Pin}(V, q) \cap Cl^0(V, q)$ . En el caso particular en que  $V = \mathbb{R}^n$  y  $q(x) = \mp \|x\|^2$ , se tiene que

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} \text{Pin}^\pm(n) &= \{v_1 \cdots v_k : \|v_j\| = 1, 1 \leq j \leq k, k \in \mathbb{N}\}, \\ \text{Spin}(n) &= \{v_1 \cdots v_{2k} : \|v_j\| = 1, 1 \leq j \leq 2k, k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

son grupos de Lie compactos en  $Cl^\pm(n)$ . El grupo  $\text{Spin}(n)$  es conexo ( $n \geq 2$ ) y simplemente conexo ( $n \geq 3$ ) mientras que  $\text{Pin}^\pm(n)$  tiene 2 componentes conexas. En general,  $\text{Pin}^+(n) \neq \text{Pin}^-(n)$  pero sus componentes conexas de la identidad coinciden y  $(\text{Pin}^\pm(n))_o = \text{Spin}(n)$ . Notar que como  $\mathbb{C}l(n-1) \subset \mathbb{C}l(n)$  naturalmente, el grupo  $\text{Spin}(n-1)$  puede verse como subgrupo de  $\text{Spin}(n)$ .

Sea  $O^\pm(n) := O(\mathbb{R}^n, \mp \|\cdot\|^2)$ , luego  $O(n) = O^-(n) \simeq O^+(n)$  y similarmente para  $SO(n)$ . Los morfismos de grupos de Lie

$$(2.1.4) \quad \mu_\pm : \text{Pin}^\pm(n) \rightarrow O^\pm(n), \quad \mu_\pm(v) = (x \mapsto \alpha(v)xv^{-1}),$$

donde  $\alpha$  es la involución canónica,  $v \in \text{Pin}^\pm(n)$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , son epimorfismos con  $\ker(\mu_\pm) = \{-1, 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$ . Restringiendo a la componente conexa de la identidad tenemos el cubrimiento doble

$$(2.1.5) \quad \mu : \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n), \quad \mu(v) = (x \mapsto vxv^{-1}).$$

Luego,  $\mu$  es el cubrimiento universal de  $SO(n)$  para  $n \geq 3$ .

Si  $B_j$  es una matriz para  $1 \leq j \leq m$ , denotaremos por  $\text{diag}(B_1, \dots, B_m)$  la matriz de bloques que tiene el bloque  $B_j$  en la posición "diagonal"  $j$ .

Sea  $B(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  con  $t \in \mathbb{R}$ , y para  $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$  con  $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  ponemos

$$(2.1.6) \quad x_0(t_1, \dots, t_m) := \begin{cases} \text{diag}(B(t_1), \dots, B(t_m)), & \text{si } n = 2m \\ \text{diag}(B(t_1), \dots, B(t_m), 1), & \text{si } n = 2m + 1 \end{cases}$$

$$x(t_1, \dots, t_m) := \prod_{j=1}^m (\cos t_j + \sin t_j e_{2j-1} e_{2j}) \in \text{Spin}(n).$$

Es inmediato chequear que los elementos  $x(t_1, \dots, t_m)$  satisfacen, para  $1 \leq j \leq m$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , las siguientes propiedades:

$$(2.1.7) \quad x(t_1, \dots, t_m) = x(t_1, \dots, t_j, 0, \dots, 0) x(0, \dots, 0, t_{j+1}, \dots, t_m),$$

$$(2.1.8) \quad x(t_1, \dots, t_m)^k = x(kt_1, \dots, kt_m),$$

$$(2.1.9) \quad -x(t_1, \dots, t_m) = x(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + \pi, t_{j+1}, \dots, t_m).$$

*Nota.* Cuando sea conveniente, usaremos la siguiente notación:

$$(2.1.10) \quad x_{k_1, k_2, \dots, k_s}(t_1, \dots, t_s) := x(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{k_1}, \underbrace{t_2, \dots, t_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{t_s, \dots, t_s}_{k_s}).$$

Toros maximales en  $\text{Spin}(n)$  y  $\text{SO}(n)$  están dados respectivamente por

$$(2.1.11) \quad T = \{x(t_1, \dots, t_m) : t_j \in \mathbb{R}\}, \quad T_0 = \{x_0(t_1, \dots, t_m) : t_j \in \mathbb{R}\}.$$

La restricción  $\mu : T \rightarrow T_0$  es un cubrimiento doble (ver [LM]) y

$$(2.1.12) \quad \mu(x(t_1, \dots, t_m)) = x_0(2t_1, \dots, 2t_m).$$

Sea  $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$  con  $(E_{ij})_{ij} = 1$  y  $(E_{ij})_{kl} = 0$  para todo  $(k, l) \neq (i, j)$  y ponemos  $F_{ij} := E_{ji} - E_{ij}$ . Las álgebras de Lie de  $\text{Spin}(n)$  y  $\text{SO}(n)$  son  $\mathfrak{spin}(n) = \text{span}\{e_i e_j : 1 \leq i < j \leq n\}$  y  $\mathfrak{so}(n) = \text{span}\{F_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ . Como toros maximales en  $\mathfrak{spin}(n)$  y  $\mathfrak{so}(n)$  están dados por álgebras de Lie de toros maximales de  $\text{Spin}(n)$  y  $\text{SO}(n)$ , respectivamente, tenemos

$$\mathfrak{t} = \text{span}\{e_{2j-1} e_{2j} : 1 \leq j \leq m\},$$

$$\mathfrak{t}_0 = \{\text{diag}(C(t_1), \dots, C(t_m)) : t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}\}, \quad C(t_j) = \begin{pmatrix} 0 & it_j \\ -it_j & 0 \end{pmatrix}.$$

**Representación spinorial.** Vimos que las álgebras de Clifford  $Cl^\pm(n)$  y  $Cl(n)$  son álgebras matriciales de la forma  $\mathbb{K}(2^m)$  ó  $\mathbb{K}(2^m) \oplus \mathbb{K}(2^m)$  para algún  $m$ , con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ó  $\mathbb{H}$ . Dado que  $\mathbb{K}(n)$  es simple como  $\mathbb{R}$ -álgebra la representación estándar  $\mathbb{K}(n) \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  es la única representación real irreducible de  $\mathbb{K}(n)$ , salvo equivalencia. Sólo nos hará falta considerar representaciones complejas de  $Cl^\pm(n)$  y  $Cl(n)$ .

Sea  $(V, q)$  una forma cuadrática sobre  $\mathbb{K}$ , con  $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ . Una representación compleja de  $Cl(V, q)$  es un homomorfismo  $\tau : Cl(V, q) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$  de  $\mathbb{K}$ -álgebras, donde  $W$  es un espacio vectorial complejo de dimensión finita. En este caso, la acción de  $V$  en  $W$  se llama *multiplicación de Clifford a izquierda* y se denota por

$$v \cdot w := \tau(v)(w).$$

Consideremos  $(L, S)$  una representación compleja irreducible del álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}(n)$ , restringida a  $\text{Spin}(n)$ .  $(L, S)$  es una representación unitaria de  $\text{Spin}(n)$ , fiel, que no desciende a  $\text{SO}(n)$ . El espacio vectorial complejo  $S$  tiene dimensión  $2^m$  con  $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  y se lo llama *espacio de spinores*. Tenemos que

$$S = \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} S_{\lambda_I}$$

donde  $S_{\lambda_I}$  denota el espacio peso correspondiente al peso  $\lambda_I : \mathfrak{t} \rightarrow i\mathbb{R}$  dado por

$$(2.1.13) \quad \lambda_I = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \right) - \sum_{i \in I} \varepsilon_i.$$

Aquí  $\varepsilon_j$  está dado en el álgebra de Lie  $\mathfrak{t}$  de  $T$  por

$$\varepsilon_j \left( \sum_{k=1}^m c_k e_{2k-1} e_{2k} \right) = 2ic_j.$$

Todos los pesos tienen multiplicidad 1. Si  $n$  es impar, entonces  $(L, S)$  es irreducible para  $\text{Spin}(n)$  y se la llama *representación spinorial*. Si  $n$  es par, entonces los subespacios

$$(2.1.14) \quad S^+ := \sum_{|I|=par} S_{\lambda_I}, \quad S^- := \sum_{|I|=impar} S_{\lambda_I}.$$

son  $\text{Spin}(n)$ -invariantes e irreducibles de dimensión  $2^{m-1}$ . Si  $L^\pm$  denota la acción de  $L$  restringida a  $S^\pm$  entonces  $(L^\pm, S^\pm)$  son llamadas *representaciones medio-spinoriales* de  $\text{Spin}(n)$ . Escribiremos  $(L_n, S_n)$  y  $(L_n^\pm, S_n^\pm)$  en lugar de  $(L, S)$  y  $(L^\pm, S^\pm)$ , respectivamente, cuando queramos especificar la dimensión  $n$ . Tenemos los siguientes hechos conocidos:

$$(2.1.15) \quad \begin{aligned} (L_n^\pm|_{\text{Spin}(n-1)}, S_n^\pm) &\simeq (L_{n-1}, S_{n-1}) && n \text{ par,} \\ (L_n|_{\text{Spin}(n-1)}, S_n) &\simeq (L_{n-1}^+, S_{n-1}^+) \oplus (L_{n-1}^-, S_{n-1}^-) && n \text{ impar.} \end{aligned}$$

## 2.2. Algunos hechos sobre el grupo y la representación spin

En esta sección se reúnen algunos hechos sobre clases de conjugación en  $\text{Spin}(n)$ , toros maximales y representación spinorial que serán usados en los Capítulos 5 y 6 en las demostraciones de algunos de los resultados principales del trabajo.

Cuando calculemos el espectro del operador de Dirac, en la fórmula de multiplicidades aparecerán las trazas de la representación spin. Basta conocer estas trazas en el toro maximal  $T$ . Sea  $\xi_I$  el carácter asociado al peso  $\lambda_I$ , es decir,  $\xi_I : T \rightarrow \mathbb{S}^1$  y  $\xi_I \circ \exp = e^{\lambda_I}$  para cada  $I \subset I_m := \{1, \dots, m\}$ .

Luego, si  $g = x(t_1, \dots, t_m) \in T$ , se tiene que  $g = \exp(\sum_{j=1}^m t_j e_{2j-1} e_{2j})$  y

$$(2.2.1) \quad \text{tr}L(g) = \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} g^{\xi_I} = \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} e^{\lambda_I(\sum_{j=1}^m t_j e_{2j-1} e_{2j})}.$$

En el siguiente resultado damos los valores de los caracteres de  $L_n$  y  $L_n^\pm$  en elementos del toro maximal  $T$ . Esto será útil tanto en las fórmulas generales como en las aplicaciones.

LEMA 2.2.1. *Si  $n = 2m$ , entonces*

$$(2.2.2) \quad \chi_{L_n^\pm}(x(t_1, \dots, t_m)) = 2^{m-1} \left( \prod_{j=1}^m \cos t_j \pm i^m \prod_{j=1}^m \sin t_j \right).$$

*Si  $n = 2m$  ó  $n = 2m + 1$ , entonces*

$$(2.2.3) \quad \chi_{L_n}(x(t_1, \dots, t_m)) = 2^m \prod_{j=1}^m \cos t_j.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que  $n$  es par,  $n = 2m$ , y procedamos por inducción en  $m$ . Para  $m = 1$ , (2.2.2) claramente se cumple. Por otra parte tenemos que  $\chi_{L_{n+2}^+}(x(t_1, \dots, t_{m+1}))$  es igual a

$$\begin{aligned} &= e^{i(\sum_{j=1}^{m+1} t_j)} \sum_{\substack{I \subset I_{m+1} \\ |I| \text{ par}}} e^{-2i \sum_{j \in I} t_j} \\ &= e^{it_{m+1}} e^{i(\sum_{j=1}^m t_j)} \left( \sum_{\substack{I \subset I_m \\ |I| \text{ par}}} e^{-2i \sum_{j \in I} t_j} + e^{-2it_{m+1}} \sum_{\substack{I \subset I_m \\ |I| \text{ impar}}} e^{-2i \sum_{j \in I} t_j} \right) \\ &= e^{it_{m+1}} \chi_{L_n^+}(x(t_1, \dots, t_m)) + e^{-it_{m+1}} \chi_{L_n^-}(x(t_1, \dots, t_m)) \\ &= 2^m \left( e^{it_{m+1}} \left( \prod_{j=1}^m \cos t_j + i^m \prod_{j=1}^m \sin t_j \right) + e^{-it_{m+1}} \left( \prod_{j=1}^m \cos t_j - i^m \prod_{j=1}^m \sin t_j \right) \right) \\ &= 2^{m+1} \left( \prod_{j=1}^{m+1} \cos t_j + i^{m+1} \prod_{j=1}^{m+1} \sin t_j \right) \end{aligned}$$

donde usamos (2.1.13) y (2.2.1). El cálculo para  $\chi_{L_{n+2}^-}(x(t_1, \dots, t_{m+1}))$  es análogo.

Sumando  $\chi_{L_n^+}(x(t_1, \dots, t_m))$  y  $\chi_{L_n^-}(x(t_1, \dots, t_m))$  obtenemos la expresión para  $\chi_{L_n}(x(t_1, \dots, t_m))$ , si  $n = 2m$ . Ahora, si  $n = 2m + 1$ , entonces  $\chi_{L_n}(x(t_1, \dots, t_m)) = \chi_{L_{n-1}}(x(t_1, \dots, t_m))$ , y el resultado sigue.  $\square$

El lema siguiente da algunos hecho útiles sobre clases de conjugación de elementos en  $\text{Spin}(n)$ . Incluimos una prueba por completitud.

LEMA 2.2.2. Sean  $x, y \in \text{Spin}(n-1)$  elementos conjugados en  $\text{Spin}(n)$ .

(i) Si  $n$  es par, entonces  $x$  e  $y$  son conjugados en  $\text{Spin}(n-1)$ .

(ii) Si  $n$  es impar, entonces  $y$  es conjugado a  $x$  ó a  $-e_1 x e_1$  en  $\text{Spin}(n-1)$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $n = 2m$  es par, el mapa restricción del anillo de representación  $R(\text{Spin}(2m))$  a  $R(\text{Spin}(2m-1))$  es sobreyectivo, por lo tanto vale la afirmación en el lema.

Si  $n = 2m + 1$ , podemos asumir que  $x = x(t_1, \dots, t_m), y = x(t'_1, \dots, t'_m)$  yacen en el toro maximal, donde  $x(t_1, \dots, t_m) = \prod_{j=1}^m (\cos t_j + \sin t_j e_{2j-1} e_{2j})$ .

Ahora, si  $x$  y  $y$  son conjugados en  $\text{Spin}(2m+1)$ , entonces  $\mu(x), \mu(y)$  son conjugados en  $\text{SO}(2m+1)$  y esto implica, luego de reordenar si es necesario, que debemos tener  $t'_i = \pm t_i$ , para  $1 \leq i \leq m$ .

Además si  $j \leq m$  tenemos

$$\begin{aligned} e_{2j-1} e_n x(t_1, \dots, t_m) (e_{2j-1} e_n)^{-1} &= e_{2j-1} x(t_1, \dots, t_j, \dots, t_m) (e_{2j-1})^{-1} \\ &= x(t_1, \dots, -t_j, \dots, t_m). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $x = x(t_1, \dots, t_m)$ , entonces

$$(e_{2j-1} e_{2k-1}) x (e_{2j-1} e_{2k-1})^{-1} = x(t_1, \dots, -t_j, \dots, -t_k, \dots, t_m)$$

para  $1 \leq j, k \leq m$ . Luego, para  $t_1, \dots, t_m$  fijos, entre los elementos de la forma  $x(\pm t_1, \dots, \pm t_m)$ , hay a lo sumo 2 clases de conjugación en  $\text{Spin}(2m)$  representados por  $x(\pm t_1, t_2, \dots, t_m)$ .

Ahora por el Lema 2.2.1, tenemos que

$$\chi_{L_{n-1}^\pm}(x(t_1, \dots, t_m)) = 2^{m-1} \left( \prod_{j=1}^m \cos t_j \pm i^m \prod_{j=1}^m \sin t_j \right).$$

Esto implica que  $x(t_1, t_2, \dots, t_m)$  y  $x(-t_1, t_2, \dots, t_m)$  no son conjugados salvo que  $t_j \in \pi\mathbb{Z}$  para algún  $j$ . Por otra parte, si este es el caso, entonces es claro que  $e_1 e_{2j-1} \in \text{Spin}(n-1)$  conjuga un elemento en el otro. Esto completa la prueba del lema.  $\square$

OBSERVACIÓN 2.2.3. El lema muestra que, genéricamente, si  $n$  es impar, los elementos  $x(t_1, t_2, \dots, t_m)$  y  $x(-t_1, t_2, \dots, t_m)$  son conjugados en  $\text{Spin}(n)$  pero no en  $\text{Spin}(n-1)$ .

Consideramos ahora el caso especial cuando  $t_i \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$  para todo  $i$ , luego  $\mu(x)$  tiene orden 2 (ó 1). Pongamos

$$(2.2.4) \quad g_h := e_1 e_2 \cdots e_{2h-1} e_{2h} \in \text{Spin}(n)$$

para  $1 \leq h \leq m$  con  $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Luego

$$g_h = x(\underbrace{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}}_h, 0, \dots, 0) \quad \text{y} \quad -g_h = x(\underbrace{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}}_h, 0, \dots, 0).$$



COROLARIO 2.2.4. Sea  $g_h$  como en (2.2.4). Se tiene:

- (i) Si  $h < m$ , entonces  $g_h$  y  $-g_h$  son conjugados en  $\text{Spin}(n-1)$ .
- (ii) Si  $h = m$  y  $n = 2m$ , entonces  $\chi_{L_n^\pm} = \pm 2^{m-1}i^m$ , por lo tanto  $g_m$  y  $-g_m$  no son conjugados.
- (iii) Si  $h = m$  y  $n = 2m+1$ , entonces  $\chi_{L_{n-1}^+}(\pm g_m) = \pm 2^{m-1}i^m$ , por lo tanto  $g_m$  y  $-g_m$  son conjugados en  $\text{Spin}(n)$  pero no en  $\text{Spin}(n-1)$ .

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación en el corolario sigue inmediatamente de la prueba del Lema 2.2.2. Las restantes afirmaciones son claras en vista del Lema 2.2.1.  $\square$

Para cada  $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  se tiene la multiplicación de Clifford a izquierda por  $u$  en  $S$  dada por  $u \cdot w = L(u)(w)$  para  $w \in S$ . Fijamos un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $S$  tal que  $L(u)$  es skew-Hermitiano, por lo tanto  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es  $\text{Spin}(n)$ -invariante. Notar que  $L(u)^2 = -\|u\|^2 \text{Id}$ . Luego,  $S$  se descompone como  $S = S_u^+ \oplus S_u^-$ , donde  $S_u^\pm$  denota los autoespacios de  $L(u)$ , de dimensión  $2^{m-1}$ , asociados a los autovalores  $\mp i\|u\|$ .

DEFINICIÓN 2.2.5. Si  $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ponemos

$$(2.2.5) \quad \text{Spin}(n-1, u) := \{g \in \text{Spin}(n) : gug^{-1} = u\}.$$

O sea,  $\text{Spin}(n-1, u)$  es el subgrupo de  $\text{Spin}(n)$  formado por los elementos  $g$  tal que  $\mu(g)u = u$ .

Claramente  $\text{Spin}(n-1, e_n) = \text{Spin}(n-1)$ . Para un  $u$  general, existe  $h_u \in \text{Spin}(n)$  tal que  $h_u u h_u^{-1} = \|u\| e_n$ . Entonces

$$h_u \text{Spin}(n-1, u) h_u^{-1} = \text{Spin}(n-1).$$

Observamos que para cada  $g \in \text{Spin}(n-1, u)$ ,  $L(g)$  conmuta con  $L(u)$ , por lo tanto  $L(g)$  preserva los autoespacios  $S_u^\pm$ .

Usaremos el siguiente lema en la prueba del Teorema 5.2.5 del Capítulo 5.

LEMA 2.2.6. Sea  $\text{Spin}(n-1, u)$  como en (2.2.5). Entonces:

- (i) Como  $\text{Spin}(n-1)$ -módulos tenemos que  $S_{e_n}^\pm \simeq (L_{n-1}^\pm, S_{n-1}^\pm)$  si  $n$  es impar y  $S_{e_n}^\pm \simeq (L_{n-1}, S_{n-1})$  si  $n$  es par.
- (ii) Como  $\text{Spin}(n-1, u)$ -módulos tenemos que  $S_u^\pm = L(h_u)S_{n-1}^\pm$ , si  $n$  es impar, y  $S_u^\pm = L(h_u)S_{n-1}$ , si  $n$  es par, con la acción dada por  $L(h_u x h_u^{-1}) = L(h_u)L(x)L(h_u^{-1})$  para cada  $x \in \text{Spin}(n-1)$ .

DEMOSTRACIÓN.  $L(e_n)$  conmuta con la acción de  $\text{Spin}(n-1)$  en  $S_n$  y, por otra parte,  $S_n = S_{n-1}^+ \oplus S_{n-1}^-$  como  $\text{Spin}(n-1)$ -módulo.

Si  $n$  es impar, entonces  $S_{n-1}^\pm$  son representaciones no equivalentes de  $\text{Spin}(n-1)$ , luego  $L(e_n)S_{n-1}^\pm = S_{n-1}^\pm$  y por el lema de Schur,  $L(e_n)$  debe actuar por multiplicación por un escalar en cada uno de ellas. Usando la descripción explícita de  $L$  en [Kn, p. 286-288] uno verifica que  $L(e_n)$  actúa por  $\mp i$  en  $S_{n-1}^\pm$ , esto es  $S_{e_n}^\pm \simeq S_{n-1}^\pm$ .

Si  $n$  es par, entonces ambos  $S_n^\pm$  se restringen a  $S_{n-1}$  como  $\text{Spin}(n-1)$ -módulos. Como los  $\pm i$ -autoespacios de  $L(e_n)$  son estables por  $\text{Spin}(n-1)$ , ambos deben ser equivalentes a  $S_{n-1}$ .

Las afirmaciones en (ii) se verifican fácilmente.  $\square$

***Notas.***

(1) Referencias para este capítulo son [LM], [Fr2], [BGV], [GLP] y [MP2].

## Parte 2

# Resultados sobre estructuras spin



## CAPÍTULO 3

### Estructuras $\text{pin}^\pm$ y $\text{spin}$

Toda variedad Riemanniana  $M$  tiene asociados de manera natural operadores diferenciales elípticos de segundo orden, a saber, el Laplaciano  $\Delta_p$  actuando en  $p$ -formas diferenciales para  $0 \leq p \leq n = \dim M$ . La relación entre el  $\Delta_p$ -espectro de  $M$ ,  $\text{Spec}_p(M)$ , y la geometría de  $M$  ha sido intensamente estudiada.

El operador de Dirac,  $D$ , sin embargo, no se puede definir para una variedad Riemanniana arbitraria  $M$ . Para que esto sea posible  $M$  debe poseer una estructura topológica adicional: una estructura  $\text{spin}$ , si  $M$  es orientable, y una estructura  $\text{pin}^+$  o  $\text{pin}^-$ , si  $M$  es no orientable.

Se sabe que no toda variedad Riemanniana  $M$  admite estructuras  $\text{spin}$ . En el caso que nos interesa, hay ejemplos de variedades compactas planas que no son  $\text{spin}$  (ver [AuSz], [Va], [IK] y [LS]). Por otro lado, Friedrich probó que cualquier toro plano  $n$ -dimensional admite  $2^n$  estructuras  $\text{spin}$  distintas (ver [Fr]) y Pfäffle encontró todas las estructuras  $\text{spin}$  para las 6 variedades compactas planas orientables en dimensión 3 (ver [Pf]).

En este capítulo daremos condiciones necesarias y suficientes en términos algebraicos para que una variedad compacta plana  $M_\Gamma$  con grupo abeliano de holonomía  $F$  admita estructuras  $\text{pin}^\pm$  o  $\text{spin}$ . En los casos  $F \simeq \mathbb{Z}_2^k$  y  $F \simeq \mathbb{Z}_m$ , en que estamos más interesados, las condiciones serán más simples. En particular, probaremos que toda  $\mathbb{Z}_2$ -variedad orientable (y de tipo diagonal) de dimensión  $n$  admite (exactamente  $2^n$ ) estructuras  $\text{spin}$ .

#### 3.1. Estructuras $\text{pin}^\pm$ y $\text{spin}$ en variedades compactas planas.

Si  $M$  es una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ , denotamos por  $B(M) = \bigcup_{x \in M} B_x(M)$  su fibrado de marcos y por  $\pi : B(M) \rightarrow M$  la proyección canónica. Esto es, si  $x \in M$ ,  $B_x(M)$  es el conjunto de bases ortonormales ordenadas  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $T_x(M)$  y  $\pi((v_1, \dots, v_n)) = x$ . Ahora,  $B(M)$  es un fibrado principal sobre  $M$  con fibra  $O(n)$  y, si  $M$  es orientable, el fibrado de marcos orientados  $B^+(M)$  es un  $SO(n)$ -fibrado principal.

DEFINICIÓN 3.1.1. Una *estructura  $\text{pin}^\pm$*  en  $M$  es un cubrimiento doble equivariante  $p : \tilde{B}(M) \rightarrow B(M)$  tal que  $\tilde{\pi} : \tilde{B}(M) \rightarrow M$  es un fibrado principal con fibra  $\text{Pin}^\pm(n)$  y  $\pi \circ p = \tilde{\pi}$ . Similarmente, una *estructura  $\text{spin}$*  en una variedad orientable  $M$  es un cubrimiento doble equivariante  $p : \tilde{B}^+(M) \rightarrow B^+(M)$  donde  $\tilde{\pi} : \tilde{B}^+(M) \rightarrow M$  es un fibrado principal con fibra  $\text{Spin}(n)$  y  $\pi \circ p = \tilde{\pi}$ .

Una variedad en la que se ha elegido una estructura  $\text{spin}$  o  $\text{pin}^\pm$  se llama una *variedad spin* o *pin $^\pm$* , respectivamente. Denotaremos por  $\text{Spin}(M)$  al conjunto de estructuras  $\text{spin}$  de una variedad  $\text{spin}$   $M$ .

Por ejemplo, un cubrimiento doble  $p : B(M) \rightarrow M$  es una estructura  $\text{pin}^\pm$  de  $M$  sí y sólo si el siguiente diagrama conmuta, donde los mapas verticales son las acciones correspondientes.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{B}(M) \times \text{Pin}^\pm(n) & \xrightarrow{p \times \mu^\pm} & B(M) \times O(n) \\
 \downarrow \cdot & & \downarrow \cdot \\
 \tilde{B}(M) & \xrightarrow{p} & B(M) \\
 \searrow \tilde{\pi} & & \swarrow \pi \\
 & M &
 \end{array}$$

**OBSERVACIÓN 3.1.2.** Notar que si  $M$  es orientable, cualquier estructura  $\text{pin}^\pm$  en  $M$  define una estructura  $\text{spin}$  y recíprocamente. Por otra parte, las estructuras  $\text{pin}^\pm$  en variedades difeomorfas están en correspondencia biunívoca.

Las definiciones de estructuras  $\text{pin}^\pm$  y  $\text{spin}$  de  $M$  se pueden poner en términos de clases de Stiefel-Whitney, o sea, de ciertas clases características  $w_i(V)$  de fibrados vectoriales reales  $V$  tomando valores en  $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ . Las clases de Stiefel-Whitney de  $M$ ,  $w_i(M)$ , se definen como las clases de Stiefel-Whitney del fibrado tangente  $TM$ . La orientabilidad de  $M$  es equivalente a  $w_1(M) = 0$ . Al respecto, tenemos el siguiente resultado ([**LM**, Thm. 2.1] o [**GLP**, Lem. 1.3.7]):

**TEOREMA 3.1.3.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana. Entonces*

(i)  *$M$  es spin si y sólo si  $w_1(M) = w_2(M) = 0$ . En este caso,  $\text{Spin}(M)$  está en correspondencia con  $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$ .*

(ii)  *$M$  es  $\text{pin}^+$  si y sólo si  $w_2(M) = 0$ .*

(iii)  *$M$  es  $\text{pin}^-$  si y sólo si  $w_2(M) + w_1^2(M) = 0$ .*

**EJEMPLO 3.1.4.** (i) Por el teorema anterior, toda variedad 2-conexa es  $\text{spin}$ . En particular, esferas de homotopía y grupos de Lie simplemente conexos son  $\text{spin}$ .

(ii) La esfera  $\mathbb{S}^n$  es  $\text{spin}$  para todo  $n$ .

(iii)  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  es  $\text{spin}$  si y sólo si  $n \equiv 3(4)$ ,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es  $\text{spin}$  si y sólo si  $n$  es impar y  $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$  es  $\text{spin}$  para todo  $n$ .

(iv) Si  $\Sigma_g$  es una superficie de Riemann de género  $g$  entonces  $\Sigma_g$  tiene  $2^{2g}$  estructuras  $\text{spin}$ .

(v) La suma conexa y el producto cartesiano de variedades  $\text{spin}$  es  $\text{spin}$ . Sin embargo, el producto cartesiano de estructuras  $\text{pin}^\pm$  no es en general  $\text{pin}^\pm$ .

Nos interesarán las estructuras spin y  $\text{pin}^\pm$  en cocientes  $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ , donde  $\Gamma$  es un grupo de Bieberbach. Si  $M = \mathbb{R}^n$ , se tiene que  $B(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \times O(n)$ . Es claro que  $\mathbb{R}^n \times \text{Pin}^\pm(n)$  son fibrados principales con fibra  $\text{Pin}^\pm(n)$  y que los homomorfismos  $Id \times \mu_\pm : \mathbb{R}^n \times \text{Pin}^\pm(n) \rightarrow \mathbb{R}^n \times O(n)$  son cubrimientos dobles equivariantes. Similarmente, tenemos que  $\mathbb{R}^n \times \text{Spin}(n)$  es un fibrado principal con fibra  $\text{Spin}(n)$  y es un cubrimiento doble equivariante de  $B^+(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \times \text{SO}(n)$ . Luego, tenemos estructuras spin y  $\text{pin}^\pm$  en  $\mathbb{R}^n$  y, como  $\mathbb{R}^n$  es contráctil, éstas son las únicas tales estructuras posibles.

Ahora, si  $\Gamma$  es un grupo de Bieberbach tenemos una acción a izquierda de  $\Gamma$  en  $B(\mathbb{R}^n)$  dada por  $\gamma \cdot (x, (w_1, \dots, w_n)) = (\gamma x, (\gamma_* w_1, \dots, \gamma_* w_n))$ . Si  $\gamma = BL_b$  entonces  $\gamma_* w_j = w_j B$ . Fijamos  $(v_1, \dots, v_n) \in B(\mathbb{R}^n)$ . Como  $(w_1, \dots, w_n) = (v_1 k, \dots, v_n k)$  para algún  $k \in O(n)$ , no es difícil ver que  $\gamma_* w_j = (v_j k) B = v_j (Bk)$ . Luego, la acción de  $\Gamma$  en  $B(\mathbb{R}^n)$  corresponde a la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^n \times O(n)$  dada por  $\gamma \cdot (x, k) = (\gamma x, Bk)$ .

Ahora, supongamos que existe un morfismo de grupo  $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \text{Spin}(n)$  (resp.  $\varepsilon_\pm : \Gamma \rightarrow \text{Pin}^\pm(n)$ ) tal que  $\mu(\varepsilon(\gamma)) = r(\gamma)$  (resp.  $\mu_\pm(\varepsilon_\pm(\gamma)) = r(\gamma)$ ). O sea, supongamos que  $\varepsilon$  conmuta el diagrama

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} & \text{Spin}(n) & \\ & \nearrow \varepsilon & \downarrow \mu \\ \Gamma & \xrightarrow{r} & \text{SO}(n) \end{array}$$

En este caso podemos levantar la acción a izquierda de  $\Gamma$  en  $B^+(\mathbb{R}^n)$  (resp. en  $B(\mathbb{R}^n)$ ) a  $\tilde{B}^+(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \times \text{Spin}(n)$  (resp. a  $\tilde{B}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \times \text{Pin}^\pm(n)$ ) vía

$$\gamma \cdot (x, \tilde{k}) = (\gamma x, \varepsilon(\gamma) \tilde{k}).$$

Luego, tenemos la estructura spin

$$(3.1.2) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma \backslash (\mathbb{R}^n \times \text{Spin}(n)) & \xrightarrow{\overline{Id \times \mu}} & \Gamma \backslash (\mathbb{R}^n \times \text{SO}(n)) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Gamma \backslash \mathbb{R}^n & \end{array}$$

para  $M_\Gamma$ , pues  $\Gamma \backslash B(\mathbb{R}^n) = B(\Gamma \backslash \mathbb{R}^n)$  y  $\overline{Id \times \mu}$  es equivariante. Similarmente para las estructuras  $\text{pin}^\pm$  en  $M_\Gamma$ .

De esta manera, para cada homomorfismo  $\varepsilon$  ó  $\varepsilon_\pm$  como arriba, obtenemos una estructura spin o  $\text{pin}^\pm$  en  $M_\Gamma$ , respectivamente. Resulta que todas las estructuras spin y  $\text{pin}^\pm$  en  $M_\Gamma$  se obtienen de este modo (ver [Fr2], [LM]).

**DEFINICIÓN 3.1.5.** Como  $r(L_\lambda) = Id$  para  $\lambda \in \Lambda$ , entonces  $\varepsilon(\lambda) = \pm 1$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Sea  $\delta_\varepsilon := \varepsilon|_\Lambda$ , el carácter de  $\Lambda$  inducido por  $\varepsilon$ . Diremos que una estructura spin  $\varepsilon$  en una variedad compacta plana  $M_\Gamma$  es de *tipo trivial* si  $\delta_\varepsilon \equiv 1$ . Para un toro  $T_\Lambda$ , la única estructura de este tipo es la estructura trivial correspondiente a  $\varepsilon \equiv 1$ .

El toro  $n$ -dimensional admite  $2^n$  estructuras spin. En efecto, si  $T_\Lambda = \Lambda \backslash \mathbb{R}^n$ , y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  es una  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda$ , entonces un homomorfismo  $\varepsilon$  como arriba está determinado por la  $n$ -upla  $\varepsilon(L_{\lambda_i}) \in \{\pm 1\}$ , para  $1 \leq i \leq n$  (ver [Fr]). En la Sección 3.2 mostraremos que éste es también el número de tales estructuras para variedades compactas planas, de tipo diagonal, con grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2$ .

### 3.2. Estructuras $\text{pin}^\pm$ en $F$ -variedades, $F$ abeliano.

En esta sección estudiaremos la existencia de estructuras  $\text{pin}^\pm$  y  $\text{spin}$  en variedades compactas planas  $M_\Gamma$  con grupo de holonomía abeliano,  $F$ , y mostraremos que el número de tales estructuras es 0 ó  $2^r$  para algún  $r \geq k$ , donde  $k$  es el mínimo número de generadores de  $F$ .

Sea  $\Gamma$  un grupo de Bieberbach con grupo de holonomía  $F = \langle B_1, \dots, B_k \rangle$  abeliano y retículo de traslaciones  $\Lambda$ . Consideraremos variedades  $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  con  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k, \Lambda \rangle$  donde  $\gamma_i = B_i L_{b_i}$ ,  $B_i \in \text{O}(n)$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_i \Lambda = \Lambda$  y  $B_i B_j = B_j B_i$  para cada  $1 \leq i, j \leq k$ . Dos casos particulares serán de especial interés en este trabajo:  $F \simeq \mathbb{Z}_2^k$  y  $F \simeq \mathbb{Z}_m$ . En el primer caso  $B_i^2 = \text{Id}$  para  $1 \leq i \leq k$  y en el segundo  $B_1^m = \text{Id}$ .

Supongamos que  $M_\Gamma$  admite una estructura  $\text{pin}^\pm$ , es decir, existe un homomorfismo de grupos  $\varepsilon_\pm : \Gamma \rightarrow \text{Pin}^\pm(n)$  tal que  $\mu_\pm \circ \varepsilon_\pm = r$ . Entonces, necesariamente

$$\varepsilon_\pm(L_\lambda) \in \{-1, 1\}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Luego, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  es una  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda$  y ponemos  $\delta_i := \varepsilon_\pm(L_{\lambda_i})$ , para todo  $\lambda = \sum_i m_i \lambda_i \in \Lambda$  con  $m_i \in \mathbb{Z}$ , tenemos

$$(3.2.1) \quad \varepsilon_\pm(L_\lambda) = \prod_i \delta_i^{m_i} = \prod_{m_i \text{ impar}} \delta_i.$$

Si  $\gamma = BL_b \in \Gamma$ , fijamos un elemento distinguido (aunque arbitrario) en  $\mu_\pm^{-1}(B)$ , denotado por  $u_\pm(B)$ . Si  $M_\Gamma$  es orientable, escribimos  $u(B)$  (o  $u_B$ ) en lugar de  $u_\pm(B)$ . Luego,

$$(3.2.2) \quad \varepsilon_\pm(\gamma) = \sigma_B u_\pm(B),$$

donde  $\sigma_B \in \{\pm 1\}$  depende de  $\gamma$  y de la elección de  $u_\pm(B)$ .

El morfismo  $\varepsilon_\pm$  está determinado por su acción en los generadores de  $\Gamma$ , esto es, por la  $(n+k)$ -upla

$$(3.2.3) \quad (\delta_1, \dots, \delta_n, \sigma_1 u_\pm(B_1), \dots, \sigma_k u_\pm(B_k)) \in \{-1, 1\}^n \times (\text{Pin}^\pm(n))^k$$

donde  $\delta_i = \varepsilon_\pm(L_{\lambda_i})$  y  $\sigma_i$  está definido por la ecuación  $\varepsilon_\pm(\gamma_i) = \sigma_i u_\pm(B_i)$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Una vez fijados los  $u_\pm(B_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , podemos identificar

$$(3.2.4) \quad \varepsilon_\pm \equiv (\delta_1, \dots, \delta_n, \sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \{-1, 1\}^{n+k}.$$

Ahora, como  $\varepsilon_\pm$  es un homomorfismo, para cada  $\gamma = BL_b \in \Gamma$ ,  $\lambda \in \Lambda$  tenemos que

$$\varepsilon_\pm(L_{B\lambda}) = \varepsilon_\pm(\gamma L_\lambda \gamma^{-1}) = \varepsilon_\pm(\gamma) \varepsilon_\pm(L_\lambda) \varepsilon_\pm(\gamma^{-1}) = \varepsilon_\pm(L_\lambda)$$



y también

$$\varepsilon_\pm(\gamma^m) = \varepsilon_\pm(\gamma)^m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

En particular,  $\varepsilon_\pm$  debe satisfacer las siguientes condiciones, para cada  $\gamma = BL_b, \gamma' = B'L'_b \in \Gamma$ :

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} (\varepsilon_1) \quad & \varepsilon_\pm(\gamma^{o(B)}) = (\sigma_B u_\pm(B))^{o(B)} \\ (\varepsilon_2) \quad & \varepsilon_\pm(L_{(B-Id)\lambda}) = 1, \quad \lambda \in \Lambda \\ (\varepsilon_3) \quad & \varepsilon_\pm([\gamma^{-1}, (\gamma')^{-1}]) = [u_\pm(B)^{-1}, u_\pm(B')^{-1}] \end{aligned}$$

donde  $o(B)$  denota el orden de  $B$  y  $\sigma_B$  es como en (3.2.2).

Como  $F$  es abeliano, se tiene que  $[\Gamma, \Gamma] \subset \Lambda$ . En efecto, si  $\gamma = BL_b$  entonces  $\gamma^{-1} = L_{-b}B^{-1} = B^{-1}L_{-Bb}$  y se tiene

$$\begin{aligned} [\gamma_1, \gamma_2] &= B_1L_{b_1}B_2L_{b_2}B_1^{-1}L_{-B_1b_1}B_2^{-1}L_{-B_2b_2} \\ &= B_1B_2B_1^{-1}B_2^{-1}L_{B_2B_1(B_2^{-1}-Id)b_1+B_2(B_1-Id)b_2} \\ &= L_{B_2B_1(B_2^{-1}-Id)b_1+B_2(B_1-Id)b_2}. \end{aligned}$$

Además, si  $m = o(B)$  entonces  $\gamma^m \in L_\Lambda$ . Luego,  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  y  $(\varepsilon_3)$  son condiciones sobre  $\varepsilon_\pm$  en  $\Lambda$ , es decir sobre el carácter

$$\delta_{\varepsilon_\pm} = (\varepsilon_\pm)|_\Lambda \in \text{Hom}(\Lambda, \{-1, 1\}).$$

Notar que  $B \in F$  actúa en  $\chi \in \text{Hom}(\Lambda, \{-1, 1\})$  por  $B \cdot \chi(\lambda) = \chi(B\lambda)$  y que la condición  $(\varepsilon_2)$  dice que  $\delta_{\varepsilon_\pm} \in \text{Hom}(\Lambda, \{-1, 1\})^F$ .

Definimos los siguientes conjuntos

$$(3.2.6) \quad \begin{aligned} \hat{\Lambda}(\Gamma) &:= \{\chi \in \text{Hom}(\Lambda, \{-1, 1\}) : \chi \text{ satisface } (\varepsilon_1) \text{ y } (\varepsilon_2)\}, \\ \hat{\Lambda}_c(\Gamma) &:= \{\chi \in \hat{\Lambda}(\Gamma) : \chi \text{ satisface } (\varepsilon_3)\}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado dice que las condiciones  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  y  $(\varepsilon_3)$ , necesarias para la existencia de estructuras  $\text{pin}^\pm$  de  $M_\Gamma$ , son también suficientes y da una parametrización del conjunto  $\text{Pin}^\pm(M_\Gamma)$  de tales estructuras.

**TEOREMA 3.2.1.** *Si  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k, \Lambda \rangle$  es un grupo de Bieberbach con grupo de holonomía abeliano  $F = \langle B_1, \dots, B_k \rangle$  y  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  son como en (3.2.2), entonces el mapa  $\varepsilon_\pm \mapsto (\varepsilon_\pm|_\Lambda, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$  define una correspondencia biunívoca*

$$\text{Pin}^\pm(M_\Gamma) \leftrightarrow \hat{\Lambda}_c(\Gamma) \times \{-1, 1\}^k$$

entre el conjunto de estructuras  $\text{pin}^\pm$  en  $M_\Gamma$ ,  $\text{Pin}^\pm(M_\Gamma)$ , y el conjunto  $\hat{\Lambda}_c(\Gamma) \times \{-1, 1\}^k$ .

*El número de estructuras  $\text{pin}^\pm$  en  $M_\Gamma$  es 0 ó  $2^r$  para algún  $r \geq k$ . En particular, si  $F \simeq \mathbb{Z}_2^k$  (ó  $F \simeq \mathbb{Z}_m$ ) entonces  $\text{Pin}^\pm(M_\Gamma) \equiv \hat{\Lambda}(\Gamma) \times \{-1, 1\}^k$  (resp.  $\hat{\Lambda}(\Gamma) \times \{-1, 1\}$ ), es decir, la condición  $(\varepsilon_3)$  es superflua en estos casos.*

**DEMOSTRACIÓN.** Para simplificar, escribiremos  $\varepsilon, \mu, u_B$  en lugar de  $\varepsilon_\pm, \mu_\pm, u_\pm(B)$ .

Todo elemento  $\gamma \in \Gamma$  se puede escribir como un producto de generadores  $\gamma_i = B_i L_{b_i}$  y  $L_\lambda \in \Lambda$ . Reordenando, por normalidad de  $\Lambda$  en  $\Gamma$ , vemos que todo  $\gamma \in \Gamma$  se puede escribir unívocamente como

$$(3.2.7) \quad \gamma = \gamma_{i_1}^{s_{i_1}} \cdots \gamma_{i_r}^{s_{i_r}} L_\lambda, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq k, \lambda \in \Lambda$$

donde  $0 \leq s_{i_j} < o(B_{i_j})$  para cada  $1 \leq j \leq r$  y  $r \in \mathbb{N}_0$ .

Sea  $\varepsilon \in \hat{\Lambda}_c(\Gamma)$ . Para  $1 \leq i \leq k$ , fijados  $u_{B_i} \in \mu^{-1}(B_i)$  tomamos  $\varepsilon(\gamma_i) = \sigma_i u_{B_i}$  con  $\sigma_i \in \{\pm 1\}$ . Ahora, definimos (en la notación de (3.2.7)) para  $\gamma \in \Gamma$  arbitrario:

$$(3.2.8) \quad \varepsilon(\gamma) = \varepsilon(\gamma_{i_1})^{s_{i_1}} \cdots \varepsilon(\gamma_{i_r})^{s_{i_r}} \varepsilon(L_\lambda).$$

Luego, tenemos un mapa bien definido  $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \text{Pin}^\pm(n)$  tal que  $\mu \circ \varepsilon = r$  y afirmamos que es un homomorfismo. Para probar esto debemos mostrar que

$$(3.2.9) \quad \varepsilon(\gamma L_\lambda \gamma' L_{\lambda'}) = \varepsilon(\gamma L_\lambda) \varepsilon(\gamma' L_{\lambda'})$$

para cada  $\gamma = \gamma_{i_1}^{s_{i_1}} \cdots \gamma_{i_r}^{s_{i_r}}$ ,  $\gamma' = \gamma_{j_1}^{s_{j_1}} \cdots \gamma_{j_t}^{s_{j_t}}$  con  $i_1 < \cdots < i_r$ ,  $j_1 < \cdots < j_t$  y para cada  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ .

Primero notamos que podemos eliminar  $\lambda, \lambda'$  en (3.2.9). En efecto, supongamos que para  $\gamma = \gamma_{i_1}^{s_{i_1}} \cdots \gamma_{i_r}^{s_{i_r}} = B L_b$ ,  $\gamma' = \gamma_{j_1}^{s_{j_1}} \cdots \gamma_{j_t}^{s_{j_t}} = B' L_{b'}$   $\in \Gamma$  con  $i_1 < \cdots < i_r$ ,  $j_1 < \cdots < j_t$ , se cumple que  $\varepsilon(\gamma \gamma') = \varepsilon(\gamma) \varepsilon(\gamma')$ . Sea  $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_{r+t}$  una reordenación de  $\{i_1, \dots, i_r\} \cup \{j_1, \dots, j_t\}$ . Usando repetidas veces la igualdad  $\gamma_i \gamma_j = \gamma_j \gamma_i [\gamma_i^{-1}, \gamma_j^{-1}]$  tenemos que

$$(3.2.10) \quad \gamma \gamma' = \gamma_{i_1}^{s_{i_1}} \cdots \gamma_{i_r}^{s_{i_r}} \gamma_{j_1}^{s_{j_1}} \cdots \gamma_{j_t}^{s_{j_t}} = \gamma_{k_1}^{s_{k_1}} \cdots \gamma_{k_{r+t}}^{s_{k_{r+t}}} L_{\lambda_{\gamma \gamma'}}$$

para un cierto  $\lambda_{\gamma \gamma'} \in \Lambda$  que depende de todos los conmutadores  $[\gamma_{i_u}^{-s_{i_u}}, \gamma_{j_v}^{-s_{j_v}}]$  con  $i_u > j_v$ .

Ahora, por (3.2.10), (3.2.8) y la condición  $(\varepsilon_2)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon(\gamma L_\lambda \gamma' L_{\lambda'}) &= \varepsilon(\gamma \gamma' L_{(B')^{-1} \lambda + \lambda'}) \\ &= \varepsilon(\gamma_{k_1}^{s_{k_1}} \cdots \gamma_{k_{r+t}}^{s_{k_{r+t}}} L_{\lambda_{\gamma \gamma'}} L_{(B')^{-1} \lambda + \lambda'}) \\ &= \varepsilon(\gamma_{k_1}^{s_{k_1}})^{s_{k_1}} \cdots \varepsilon(\gamma_{k_{r+t}}^{s_{k_{r+t}}})^{s_{k_{r+t}}} \varepsilon(L_{\lambda_{\gamma \gamma'}}) \varepsilon(L_{(B')^{-1} \lambda + \lambda'}) \\ &= \varepsilon(\gamma \gamma') \varepsilon(L_{(B')^{-1} \lambda + \lambda'}) \\ &= \varepsilon(\gamma) \varepsilon(\gamma') \varepsilon(L_\lambda) \varepsilon(L_{\lambda'}) \\ &= \varepsilon(\gamma L_\lambda) \varepsilon(\gamma' L_{\lambda'}). \end{aligned}$$

Como paso preliminar en la prueba de (3.2.9) (con  $\lambda = \lambda' = 0$ ) mostraremos primero que

$$(3.2.11) \quad \varepsilon(\gamma_i^{s_i} \gamma_j^{s_j}) = \varepsilon(\gamma_i^{s_i}) \varepsilon(\gamma_j^{s_j}), \text{ para cada } i, j.$$

Esto sigue de la definición de  $\varepsilon$ , si  $i < j$  ó si  $i = j$  y  $s_i + s_j \not\equiv 0 \pmod{o(B_i)}$ , y de la condición  $(\varepsilon_1)$ , si  $i = j$  y  $s_i + s_j \equiv 0 \pmod{o(B_i)}$ . Asumimos entonces

que  $j < i$ . Luego podemos escribir  $\gamma_i^{s_i} \gamma_j^{s_j} = \gamma_j^{s_j} \gamma_i^{s_i} [\gamma_i^{-s_i}, \gamma_j^{-s_j}]$ . Como  $[\gamma_i^{-s_i}, \gamma_j^{-s_j}] \in \Lambda$ , por la definición de  $\varepsilon$  y la condición  $(\varepsilon_3)$  tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon(\gamma_i^{s_i} \gamma_j^{s_j}) &= \varepsilon(\gamma_j)^{s_j} \varepsilon(\gamma_i)^{s_i} \varepsilon([\gamma_i^{-s_i}, \gamma_j^{-s_j}]) \\ &= \varepsilon(\gamma_j)^{s_j} \varepsilon(\gamma_i)^{s_i} [\varepsilon(\gamma_i^{s_i})^{-1}, \varepsilon(\gamma_j^{s_j})^{-1}] \end{aligned}$$

y de acá sale (3.2.11).

En el caso general, (3.2.9) (con  $\lambda = \lambda' = 0$ ) se puede probar mediante un argumento inductivo. Primero, sea  $t = 1$ ,  $r$  arbitrario. El caso  $r = 1$  es (3.2.11), de modo que asumimos  $r > 1$ . Si  $j_1 > i_r$ , entonces la afirmación es clara por la definición de  $\varepsilon$ , mientras que si  $j_1 = i_r$ , podemos usar  $(\varepsilon_1)$  e inducción. Suponemos entonces que existe  $\alpha$  tal que  $i_{\alpha-1} \leq j_1 < i_\alpha$ . En verdad, tomaremos  $i_{\alpha-1} < j_1$ . La prueba cuando  $i_{\alpha-1} = j_1$  es similar, pero más simple.

Si ponemos  $u_\alpha = \gamma_{i_\alpha}^{s_{i_\alpha}} \cdots \gamma_{i_r}^{s_{i_r}}$  entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon(\gamma_{i_1}^{s_{i_1}} \cdots \gamma_{i_r}^{s_{i_r}} \gamma_{j_1}^{s_{j_1}}) &= \varepsilon(\gamma_{i_1}^{s_{i_1}} \cdots \gamma_{i_{\alpha-1}}^{s_{i_{\alpha-1}}} \gamma_{j_1}^{s_{j_1}} u_\alpha [u_\alpha^{-1}, \gamma_{j_1}^{-s_{j_1}}]) \\ &= \varepsilon(\gamma_{i_1})^{s_{i_1}} \cdots \varepsilon(\gamma_{i_{\alpha-1}})^{s_{i_{\alpha-1}}} \varepsilon(\gamma_{j_1})^{s_{j_1}} \varepsilon(u_\alpha) \varepsilon([u_\alpha^{-1}, \gamma_{j_1}^{-s_{j_1}}]) \\ (\text{por } (\varepsilon_3)) &= \varepsilon(\gamma_{i_1})^{s_{i_1}} \cdots \varepsilon(\gamma_{i_{\alpha-1}})^{s_{i_{\alpha-1}}} \varepsilon(u_\alpha) \varepsilon(\gamma_{j_1}^{s_{j_1}}) \\ &= \varepsilon(\gamma_{i_1}^{s_{i_1}} \cdots \gamma_{i_r}^{s_{i_r}}) \varepsilon(\gamma_{j_1}^{s_{j_1}}). \end{aligned}$$

El argumento para  $t$  arbitrario es bastante similar y lo omitiremos.

Con respecto a la última afirmación del teorema veamos que se cumple la condición  $(\varepsilon_3)$  y que no impone ninguna nueva relación sobre los  $\delta_i$ .

Si  $F \simeq \mathbb{Z}_2^k$ , sean  $\gamma_i, \gamma_j$  generadores de  $\Gamma$ . Como  $\gamma_j \gamma_i = B_j B_i L_{B_j b_i + b_j}$  tenemos  $\varepsilon(\gamma_j \gamma_i) = \sigma_{j_i} u_{B_j B_i}$ . Luego,  $o(B_i) = o(B_j) = 2$  y, por la condición  $(\varepsilon_1)$  se cumple

$$(3.2.12) \quad \varepsilon((\gamma_j \gamma_i)^2) = (u_{B_j B_i})^2 = \varepsilon(\gamma_j \gamma_i)^2 = \varepsilon(\gamma_j) \varepsilon(\gamma_i) \varepsilon(\gamma_j) \varepsilon(\gamma_i).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \varepsilon((\gamma_j \gamma_i)^2) &= \varepsilon(\gamma_j \gamma_j \gamma_i [\gamma_i^{-1}, \gamma_j^{-1}] \gamma_i) \\ &= \varepsilon(\gamma_j^2 \gamma_i^2 (\gamma_i^{-1} [\gamma_i^{-1}, \gamma_j^{-1}] \gamma_i)) \\ &= \varepsilon(\gamma_j^2) \varepsilon(\gamma_i^2) \varepsilon(\gamma_i^{-1} [\gamma_i^{-1}, \gamma_j^{-1}] \gamma_i) \\ &= \varepsilon(\gamma_j)^2 \varepsilon(\gamma_i)^2 \varepsilon([\gamma_i^{-1}, \gamma_j^{-1}]) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado la condición  $(\varepsilon_2)$  y el hecho que los conmutadores pertenecen a  $\Lambda$ . Juntando esta expresión con (3.2.12) sale que

$$\varepsilon([\gamma_i^{-1}, \gamma_j^{-1}]) = [\varepsilon(\gamma_i)^{-1}, \varepsilon(\gamma_j)^{-1}]$$

para todo par de generadores  $\gamma_i, \gamma_j$  de  $\Gamma$ . Es claro que de acá se obtiene la condición  $(\varepsilon_3)$ .

El caso cíclico,  $F \simeq \mathbb{Z}_m$ , resulta de observar que el argumento de la prueba no requiere la condición  $(\varepsilon_3)$  cuando hay un único generador  $B$  de

$F$ . Mostraremos que vale (3.2.9) usando sólo (3.2.8) y la condición  $(\varepsilon_2)$ . En efecto, si  $\Gamma = \langle \gamma, L_\Lambda \rangle$  con  $\gamma = BL_b$ , observar que  $\gamma^k = B^k L_{b(k)}$  donde  $b(k) := (\sum_{i=0}^{k-1} B^{-i})b$ . Tenemos  $\gamma^k \gamma^l = B^{k+l} L_{B^{-l}b(k)+b(l)}$  y también  $\gamma^k \gamma^l = \gamma^{k+l} = B^{k+l} L_{b(k+l)}$ . Luego, usando estas relaciones y la condición  $(\varepsilon_2)$  tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon(\gamma^k L_\lambda \gamma^l L_{\lambda'}) &= \varepsilon(B^k L_{b(k)+\lambda} B^l L_{b(l)+\lambda'}) = \varepsilon(B^{k+l} L_{B^{-l}(b(k)+\lambda)+b(l)+\lambda'}) \\ &= \varepsilon(\gamma^{k+l} L_{B^{-l}\lambda+\lambda'}) = \varepsilon(\gamma)^{k+l} \varepsilon(L_\lambda) \varepsilon(L'_\lambda) = \varepsilon(\gamma^k L_\lambda) \varepsilon(\gamma^l L_{\lambda'}) \end{aligned}$$

para todo  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ .

Esto completa la demostración del teorema.  $\square$

**OBSERVACIÓN 3.2.2.** Para determinar si existen estructuras  $\text{pin}^\pm$  en  $M_\Gamma$  con  $F = \langle B_1, \dots, B_k \rangle$  abeliano hay que ver si se pueden elegir  $\delta_i \in \{\pm 1\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , que satisfagan el sistema de ecuaciones determinado por las condiciones (3.2.5). Si estas ecuaciones no tienen solución para ninguna elección de los  $\delta_i$ , entonces  $M_\Gamma$  no tiene estructuras  $\text{pin}^\pm$ . Por el contrario, si tal  $n$ -upla existe y  $\{e_i\}_{i=1}^n$  es una  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda$  definimos  $\varepsilon(L_{e_i}) = \delta_i$ . Ahora,  $\varepsilon$  se extiende linealmente a  $\Lambda$  y a todo  $\Gamma$  mediante (3.2.8). Luego, sólo basta calcular explícitamente las preimágenes  $\mu^{-1}(B_i) \in \text{Spin}(n)$  en los generadores de  $F$ . Para cada elección de  $\sigma_j \in \{\pm 1\}$ ,  $1 \leq j \leq k$ , como en (3.2.2), tenemos una estructura  $\text{pin}^\pm$  como en (3.2.4).

**OBSERVACIÓN 3.2.3.** Vimos que para  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades la condición  $(\varepsilon_3)$  es automática si valen  $(\varepsilon_1)$  y  $(\varepsilon_2)$ . Para variedades de tipo diagonal la condición  $(\varepsilon_2)$  siempre vale pues  $(B - Id)\Lambda \subset 2\Lambda$  para todo  $BL_b \in \Gamma$ . Además, para variedades cuya representación de holonomía se descompone como suma de representaciones enteras de rango  $\leq 2$ , la condición  $(\varepsilon_2)$  se puede expresar en términos más sencillos (ver por ejemplo (3.3.9)).

En la próxima sección estudiaremos en mayor detalle el caso de las  $\mathbb{Z}_2$ -variedades y mostraremos en particular que éstas siempre admiten estructuras  $\text{pin}^\pm$ . Por el contrario, usando el criterio de la observación siguiente, en el Ejemplo 7.3.1 mostramos que las HW-variedades (ver Sección 1.2) de dimensión  $4k + 1$  no admiten estructuras  $\text{spin}$  y que en dimensión  $4k + 3$  las HW-variedades en la familia  $\mathcal{H}_1$  (ver [MR]) no admiten estructuras  $\text{spin}$ . Usando el criterio de la Observación 3.2.4 se puede ver que las 62 HW-variedades de dimensión 7 no son  $\text{spin}$ . Ver nota (4).

**OBSERVACIÓN 3.2.4.** El teorema previo muestra que hay restricciones para que  $M_\Gamma$  admita una estructura  $\text{pin}^\pm$ . Como consecuencia, para  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades tenemos el criterio simple siguiente:

*Supongamos que existen  $\gamma = BL_b, \gamma' = B'L_{b'} \in \Gamma$  con  $\gamma^2 = \gamma'^2$  y tal que para  $u_+(B) \in \mu_+^{-1}(B)$  y  $u_+(B') \in \mu_+^{-1}(B')$  se tiene  $u_+(B)^2 = -u_+(B')^2$ . Entonces  $M_\Gamma$  no admite estructuras  $\text{pin}^+$ .*

De hecho, una estructura  $\varepsilon_+$  así debería satisfacer  $\varepsilon_+(\gamma) = \pm u_+(B)$ ,  $\varepsilon_+(\gamma') = \pm u_+(B')$  y  $\varepsilon_+(\gamma^2) = \varepsilon_+(\gamma'^2)$ , esto es,  $u_+(B)^2 = u_+(B')^2$  contra lo supuesto.

El mismo criterio, con los cambios obvios, vale para la no existencia de estructuras  $\text{pin}^-$ , o estructuras spin en el caso orientable.

**OBSERVACIÓN 3.2.5.** En contraste con la Observación 3.2.4, aplicando el procedimiento de duplicación en [JR] (ver también [BDM], [DM2]), podemos obtener variedades compactas planas spin de tipo diagonal con grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2^k$ , para cada  $k \geq 1$ .

Sea  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k, L_\Lambda \rangle$  un grupo de Bieberbach de tipo diagonal de dimensión  $n$  con grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2^k$ . Se define

$$d\Gamma := \langle d\gamma_1, \dots, d\gamma_k, L_{\Lambda \oplus \Lambda} \rangle \quad \text{donde} \quad d\gamma := \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} L_{(b,b)}$$

si  $\gamma = BL_b \in \Gamma$  (ver Def. 3.1 en [DM2]). Luego,  $d\Gamma$  es un grupo de Bieberbach de dimensión  $2n$  con grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2^k$ . La variedad  $M_{d\Gamma} = d\Gamma \backslash \mathbb{R}^{2n}$  es una variedad compacta plana de tipo diagonal, orientable y Kähler.

Si  $\Gamma$  es orientable, entonces  $M_{d\Gamma}$  es spin. En efecto, en la notación del Lema 3.3.2 en la próxima sección, como  $h \in 4\mathbb{Z}$  para  $M_{d\Gamma}$ , tenemos que  $u^2(B) = u_{0,h}^2 = 1$  por (3.3.8). Por lo tanto, la condición  $(\varepsilon_1)$  toma la forma  $\varepsilon(\gamma^2) = 1$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ . De este modo, siempre es posible definir estructuras spin para  $M_{d\Gamma}$ , por ejemplo podemos tomar cualquiera de los  $2^k$  homomorfismos  $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \text{Spin}(n)$  tales que  $\varepsilon|_\Lambda \equiv 1$ .

Si  $\Gamma$  no es orientable, es claro que, aplicando este procedimiento 2 veces se tiene que la  $4n$ -variedad  $M_{d^2\Gamma}$  (que es hiperkähler, ver Prop. 3.2 en [DM2]) resulta spin.

### 3.3. $\mathbb{Z}_2$ -variedades.

En esta última sección estudiaremos en algún detalle el caso especial de las  $\mathbb{Z}_2$ -variedades, donde se puede dar una descripción explícita de las estructuras  $\text{pin}^\pm$ . Sea  $J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Para cada  $0 \leq j, h < n$ , sea

$$(3.3.1) \quad B_{j,h} := \text{diag}(\underbrace{J, \dots, J}_j, \underbrace{-1, \dots, -1}_h, \underbrace{1, \dots, 1}_l)$$

donde  $n = 2j + h + l$ ,  $j + h \neq 0$  y  $l \geq 1$ . Luego  $B_{j,h} \in O(n)$ ,  $B_{j,h}^2 = Id$  y  $B_{j,h} \in SO(n)$  si y sólo si  $j + h$  es par. Sea  $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_n$  el retículo canónico de  $\mathbb{R}^n$  y para  $j, h$  como antes definimos los grupos

$$(3.3.2) \quad \Gamma_{j,h} := \langle B_{j,h} L_{\frac{e_n}{2}}, \Lambda \rangle.$$

Tenemos que  $\Lambda$  es estable por  $B_{j,h}$  y  $(B_{j,h} + Id)\frac{e_n}{2} = e_n \in \Lambda \setminus (B_{j,h} + Id)\Lambda$ . Luego, por la Proposición 2.1 en [DM], cada  $\Gamma_{j,h}$  es un grupo de Bieberbach. De esta modo, si  $M_{j,h} = \Gamma_{j,h} \backslash \mathbb{R}^n$ , tenemos una familia

$$(3.3.3) \quad \mathcal{F} = \{M_{j,h} : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, 0 \leq h < n - 2j, j + h \neq 0\}$$

de variedades compactas planas con grupo de holonomía  $F \simeq \mathbb{Z}_2$ . La proposición siguiente reúne algunos resultados sobre  $\mathbb{Z}_2$ -variedades. Como su prueba no es fácil de hallar en la literatura incluimos una por completitud.

PROPOSICIÓN 3.3.1. *La familia  $\mathcal{F}$  es un sistema completo de representantes de clases de difeomorfismos de  $\mathbb{Z}_2$ -variedades de dimensión  $n$ . Además tenemos:*

$$(3.3.4) \quad H_1(M_{j,h}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{j+l} \oplus \mathbb{Z}_2^h.$$

Para  $1 \leq p \leq n$ ,

$$(3.3.5) \quad \beta_p(M_{j,h}) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{j+h}{2i} \binom{j+l}{p-2i}.$$

Si  $\beta_1(M_{j,h}) = \beta_1(M_{j',h'})$ , entonces  $\beta_p(M_{j,h}) = \beta_p(M_{j',h'})$  para cada  $p \geq 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero que las variedades  $M_{j,h} \in \mathcal{F}$  no son homeomorfas de a pares. Veamos que  $H_1(M_{j,h}, \mathbb{Z}) \simeq \Gamma_{j,h}/[\Gamma_{j,h}, \Gamma_{j,h}]$ . Para  $\gamma = B_{j,h}L_{\frac{e_n}{2}}$ , tenemos

$$\begin{aligned} [\Gamma_{j,h}, \Gamma_{j,h}] &= \langle [\gamma, L_{e_i}] = L_{(B_{j,h}-Id)e_i} : 1 \leq i \leq n \rangle \\ &= \langle L_{e_2-e_1}, \dots, L_{e_{2j}-e_{2j-1}}, L_{2e_{2j+1}}, \dots, L_{2e_{2j+h}} \rangle. \end{aligned}$$

Usando esta información y que  $\gamma^2 = L_{e_n}$  es fácil ver que

$$H_1(M_{j,h}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{j+l} \oplus \mathbb{Z}_2^h.$$

Luego, si  $M_{j,h}$  y  $M_{j',h'}$  son homeomorfas entonces  $h = h'$  y  $j+l = j'+l'$ , por lo tanto  $j = j'$ , puesto que  $n = 2j + h + l$ , como se afirmaba.

Para mostrar que la familia  $\mathcal{F}$  es un sistema completo de representantes de las clases de difeomorfismo de  $\mathbb{Z}_2$ -variedades, usaremos un resultado en [Ch2] (esto se puede probar directamente usando el hecho de que toda representación entera de  $\mathbb{Z}_2$  se descompone unívocamente como suma de representaciones indescomponibles de rango  $\leq 2$  dadas por  $1, -1$  o  $J$ ).

La cardinalidad de  $\mathcal{F}$  es igual a  $\left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n-2j) \right) - 1$ , pues debemos excluir el caso  $j = h = 0$  correspondiente a  $B_{0,0} = Id$ . Luego tenemos

$$(3.3.6) \quad \#\mathcal{F} = (n - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor) (\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1) - 1 = \begin{cases} \frac{n^2+2n-4}{4} & n \text{ par} \\ \frac{n^2+2n-3}{4} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Por otra parte, si  $p$  es un primo y el número de clase de  $p$ ,  $h(p)$ , cumple  $h(p) = 1$ , Charlap obtuvo una fórmula para el número  $N_p^n$  de clases de difeomorfismo de las  $\mathbb{Z}_p$ -variedades de dimensión  $n$  (ver [Ch2, pág. 153]). Para  $p = 2$ , como  $h(2) = 1$ , este número está dado por:

$$N_2^n = \frac{1}{2} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 3) + \frac{1}{2} \left( (n-1) - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \right) \left( n - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \right).$$

Así, obtenemos que  $N_2 = \frac{1}{8}(n-2)(n+4) + \frac{1}{8}n(n+2) = \frac{n^2+2n-4}{4}$  para  $n$  par, y  $N_2 = \frac{1}{4}(n-1)(n+3) = \frac{n^2+2n-3}{4}$ , para  $n$  impar. Esto muestra que  $\#\mathcal{F} = N_2$ , como se había afirmado.

Para determinar el  $p$ -ésimo número de Betti de  $M_{j,h}$  para  $1 \leq p \leq n$ , observamos que  $B_{j,h}$  actúa diagonalmente en la base

$$e_1 \pm e_2, \dots, e_{2j-1} \pm e_{2j}, e_{2j+1}, \dots, e_n,$$

con  $j+l$  (resp.  $j+h$ ) autovectores con autovalor 1 (resp.  $-1$ ). Luego, un producto exterior de  $p$  elementos de esta base será invariante por  $B_{j,h}$ , si y sólo si un número par de ellos tiene autovalor  $-1$ . Por lo tanto tenemos

$$\beta_p(M_{j,h}) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{j+h}{2i} \binom{j+l}{p-2i}$$

como se afirmaba. Ahora, si  $\beta_1(M_{j,h}) = \beta_1(M_{j',h'})$  entonces  $j+l = j'+l'$  y por lo tanto  $j+h = j'+h'$ . Luego,  $\beta_p(M_{j,h}) = \beta_p(M_{j',h'})$ , para cada  $1 \leq p \leq n$ .  $\square$

En los Teoremas 3.3.3 y 4.1.1 necesitaremos conocer algunas preimágenes en  $\text{Pin}^\pm(n)$  por  $\mu_\pm$ , y también sus cuadrados.

LEMA 3.3.2. Sean  $j, h$  y  $B_{j,h}$  como en (3.3.1) y  $\mu_\pm : \text{Pin}^\pm(n) \rightarrow O(n)$  los mapas de cubrimiento canónicos. Si ponemos

$$(3.3.7) \quad u_{j,h}^\pm := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^j (e_1 - e_2) \cdots (e_{2j-1} - e_{2j}) e_{2j+1} \cdots e_{2j+h},$$

entonces  $\mu_+^{-1}(B_{j,h}) = \{\pm u_{j,h}^+\}$ ,  $\mu_-^{-1}(B_{j,h}) = \{\pm u_{j,h}^-\}$  y además

$$(3.3.8) \quad (u_{j,h}^+)^2 = (-1)^{jh + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + \lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \quad (u_{j,h}^-)^2 = (-1)^{jh + \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor}.$$

En particular,  $(u_{0,h}^+)^2 = (-1)^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}$  y  $(u_{0,h}^-)^2 = (-1)^{\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor}$ . Si  $B_{j,h} \in SO(n)$ , o sea si  $j+h$  es par, entonces  $u_{j,h}^2 = (-1)^{\frac{j+h}{2}}$ .

Si  $B \in O(n)$  es conjugada a  $B_{j,h}$ , y  $u_\pm(B) \in \mu_\pm^{-1}(B)$ , entonces  $u_\pm^2(B) = (u_{j,h}^\pm)^2$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $\mu_\pm(e_i) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$  con  $-1$  en la  $i$ -ésima posición, es claro que  $\mu_+^{-1}(B_{0,h}) = \mu_-^{-1}(B_{0,h}) = \{\pm e_1 \dots e_h\}$ . Si  $n = 2$ , podemos escribir  $J$  como un producto  $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Por lo tanto, usando (2.1.12) obtenemos que

$$\mu_+^{-1}(J) = \mu_-^{-1}(J) = \left\{ \pm e_1 \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) e_1 e_2 \right) \right\} = \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (e_1 - e_2) \right\}.$$

Argumentando de manera similar para  $n$  arbitrario, sigue la primera afirmación en el lema.

Por otro lado, usando (2.1.2) y calculando, uno ve que tanto  $(e_1 \dots e_h)^2$  como  $2^{-h}((e_1 - e_2) \cdots (e_{2h-1} - e_{2h}))^2$  son iguales a  $(-1)^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}$  en  $Cl^+(n)$  y a  $(-1)^{\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor}$  en  $Cl^-(n)$ , respectivamente. Esto implica las identidades (3.3.8).

Ahora, supongamos que  $B = CB_{j,h}C^{-1}$  con  $C \in O(n)$ . Si  $u_+(C) \in \mu_+(C)^{-1}$ , entonces se tiene que  $u_+(B) = \pm u_+(C) u_{j,h}^+ u_+(C)^{-1}$  y por lo tanto  $u_+^2(B) = u_+(C) (u_{j,h}^+)^2 u_+(C)^{-1} = (u_{j,h}^+)^2$ . La verificación para  $u_-^2(B)$  es idéntica.  $\square$

El siguiente resultado asegura que toda  $\mathbb{Z}_2$ -variedad es  $\text{pin}^\pm$ .

**TEOREMA 3.3.3.** *Toda  $\mathbb{Z}_2$ -variedad  $M_\Gamma$  admite estructuras  $\text{pin}^\pm$  (y  $\text{spin}$ , si  $M_\Gamma$  es orientable). Si  $\Gamma = \Gamma_{j,h}$  entonces  $M_\Gamma$  tiene exactamente  $2^{n-j}$  estructuras  $\text{pin}^\pm$  parametrizadas por las  $(n+1)$ -uplas  $(\delta_1, \dots, \delta_n, \sigma) \in \{\pm 1\}^{n+1}$  que satisfacen:*

$$(3.3.9) \quad \delta_1 = \delta_2, \dots, \delta_{2j-1} = \delta_{2j},$$

$$(3.3.10) \quad \delta_n = \begin{cases} (-1)^{jh}(-1)^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}(-1)^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} & \text{para estructuras } \text{pin}^+ \\ (-1)^{jh}(-1)^{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}(-1)^{\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor} & \text{para estructuras } \text{pin}^-. \end{cases}$$

En particular, en el caso de estructuras  $\text{spin}$  tenemos  $\delta_n = (-1)^{\frac{j+h}{2}}$ .

*Nota.* Por (3.2.3), el Teorema 3.3.3, junto con la Proposición 3.3.1 y el Lema 3.3.2, dan una descripción explícita de todas las estructuras  $\text{pin}^\pm$  de las  $\mathbb{Z}_2$ -variedades.

**DEMOSTRACIÓN.** En vista de la Proposición 3.3.1, tenemos que  $\Gamma \simeq \Gamma_{j,h}$  para algún  $j, h$ , luego  $M_\Gamma$  es difeomorfa a  $M_{j,h}$ . Así, como las estructuras  $\text{pin}^\pm$  en variedades difeomorfas están en correspondencia biunívoca, podemos asumir que  $\Gamma = \Gamma_{j,h}$ .

Hemos visto en la Observación 3.2.3 que la ecuación  $(\varepsilon_2)$  siempre vale para  $\mathbb{Z}_2$ -variedades de tipo diagonal. Sin embargo, en el caso no-diagonal,  $(\varepsilon_2)$  da una restricción. A saber, sea  $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i e_i$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}$ . Entonces

$$(B_{j,h} - \text{Id})\lambda = \sum_{i=1}^j (m_{2i} - m_{2i-1})e_{2i-1} + (m_{2i-1} - m_{2i})e_{2i} - 2 \sum_{i=1}^h m_{2j+i}e_{2j+i}.$$

Luego,  $(\varepsilon_2)$  vale si y sólo si

$$\delta_1^{(m_2 - m_1)} \delta_2^{(m_1 - m_2)} \dots \delta_{2j-1}^{(m_{2j} - m_{2j-1})} \delta_{2j}^{(m_{2j-1} - m_{2j})} = 1$$

para todo  $m_1, \dots, m_{2j} \in \mathbb{Z}$ , o equivalentemente,

$$\delta_1 = \delta_2, \dots, \delta_{2j-1} = \delta_{2j}.$$

Cada una de estas relaciones divide por 2 el número de estructuras. Por lo tanto obtenemos un máximo de  $2^{n-j+1}$  estructuras  $\text{pin}^\pm$  para  $M_{j,h}$ . Además, la ecuación  $(\varepsilon_1)$  da otra restricción pues  $\varepsilon_\pm(\gamma^2) = \varepsilon_\pm(L_{(B+\text{Id})b}) = \varepsilon_\pm(\gamma)^2$ . Ahora  $(B + \text{Id})b = e_n$ , y por consiguiente, por (3.3.8), la ecuación  $(\varepsilon_1)$  se lee:

$$(3.3.11) \quad \delta_n = \begin{cases} (-1)^{jh}(-1)^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}(-1)^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} & \text{en } Cl^+(n) \\ (-1)^{jh}(-1)^{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}(-1)^{\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor} & \text{en } Cl^-(n). \end{cases}$$

Luego, la restricción impuesta por (3.3.11) divide por 2 el número de estructuras y tenemos un total de  $2^{n-j}$  estructuras  $\text{pin}^\pm$  en  $M_\Gamma$  para  $\Gamma = \Gamma_{j,h}$ .

□



EJEMPLO 3.3.4. Para ilustrar el Teorema 3.3.3, damos una lista explícita de las 28  $\mathbb{Z}_2$ -variedades Riemannianas  $(M, \varepsilon)$  de dimensión 3, con retículo canónico de traslaciones  $\Lambda$ , que admiten estructuras  $\text{pin}^\pm$ .

Hay 3 clases de difeomorfismo, una de las cuales se parte en 2 clases de isometría, luego hay 4 clases de isometría, correspondientes a los grupos  $\Gamma_{1,0} = \langle [J \ 1] L_{\frac{e_3}{2}}, \Lambda \rangle$ ,  $\Gamma_{0,1} = \langle \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} L_{\frac{e_3}{2}}, \Lambda \rangle$ ,  $\Gamma'_{0,1} = \langle \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} L_{\frac{e_2+e_3}{2}}, \Lambda \rangle$  y  $\Gamma_{0,2} = \langle \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} L_{\frac{e_3}{2}}, \Lambda \rangle$ .

Observamos que  $M_{0,1}$  y  $M'_{0,1}$  no son isométricas, como se puede ver calculando el radio de inyectividad, esto es  $\frac{1}{2}$  de la longitud de la geodésica cerrada más corta. En efecto, usando resultados en [MR5] uno puede ver fácilmente que estas longitudes son iguales a  $\frac{1}{2}$  y a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , respectivamente.

Los pares  $(M, \varepsilon)$  son listados en la siguiente tabla, y fueron obtenidos usando el Lema 3.3.2 y el Teorema 3.2.1.

Estructuras  $\text{pin}^\pm$  en  $\mathbb{Z}_2$ -variedades de dimensión 3.

$M_\Gamma$	cond. $(\varepsilon_1)$	cond. $(\varepsilon_2)$	estructuras $\text{pin}^\pm$	#
$M_{1,0}$	$\delta_3 = \pm 1$	$\delta_1 = \delta_2$	$\varepsilon_\pm = (\delta_1, \delta_1, \pm 1; \sigma \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_2))$	$2^2$
$M_{0,1}$	$\delta_3 = \pm 1$	—	$\varepsilon_\pm = (\delta_1, \delta_2, \pm 1; \sigma e_1)$	$2^3$
$M'_{0,1}$	$\delta_2 \delta_3 = \pm 1$	—	$\varepsilon_\pm = (\delta_1, \delta_2, \pm \delta_2; \sigma e_1)$	$2^3$
$M_{0,2}$	$\delta_3 = -1$	—	$\varepsilon_\pm = (\delta_1, \delta_2, -1; \sigma e_1 e_2)$	$2^3$

Queremos remarcar aquí que las estructuras  $\text{spin}$  de  $M_{0,2}$  se encuentran calculadas en [Pf].

EJEMPLO 3.3.5. Para finalizar la sección calculamos el número, que denotaremos por  $P_2^n$ , de  $\mathbb{Z}_2$ -variedades Riemannianas diferentes que son  $\text{pin}^\pm$ . Esto es, si para  $j, h$  fijos denotamos por  $\{M_{j,h}^s\}$  las distintas clases de isometría en la clase de difeomorfismo de  $M_{j,h}$ , calcularemos el número de pares  $(M_{j,h}^s, \varepsilon^\pm)$  donde  $\varepsilon^\pm$  es cada posible estructura  $\text{pin}^\pm$  de  $M_{j,h}^s$ , cuando  $j, h, s$  varían.

Para  $j, h$  fijos existen  $n - 2j - h = l$  clases de isometría en las clase de difeomorfismo representada por  $M_{j,h}$ , determinadas por los  $l$  vectores acompañantes  $b = \frac{e_{n-2j-h+1} + \dots + e_n}{2}, \dots, \frac{e_n}{2}$ , y cada representante  $M_{j,h}^s$ , con  $0 \leq s \leq l - 1$ , tiene  $2^{n-j}$  estructuras  $\text{pin}^\pm$  diferentes. Para  $n \geq 3$ , como  $1 \leq h \leq n - 1$  para  $j = 0$  y  $0 \leq h \leq n - 2j - 1$  para  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  tenemos:

$$\begin{aligned}
P_2^n &= \sum_{h=1}^{n-1} (n-h) 2^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{h=0}^{n-2j-1} (n-2j-h) 2^{n-j} \\
&= 2^n \left( \binom{n}{2} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\binom{n+1}{2} - (2n+1)j + 2j^2}{2^j} \right).
\end{aligned}$$

Llamando  $S_n^k := \sum_{j=1}^n \frac{j^k}{2^j}$  y poniendo  $q = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  obtenemos:

$$(3.3.12) \quad P_2^n = 2^n \left( \binom{n}{2} + 2S_q^2 - (2n+1)S_q^1 + \binom{n+1}{2} S_q^0 \right).$$

Ahora, uno puede chequear que  $S_n^k$  satisface la relación de recurrencia

$$S_n^k + a_1^k S_1^0 + \cdots + a_{n-1}^k S_{n-1}^0 = n^k S_n^0$$

donde  $a_i^k = (i+1)^k - i^k$ . Por ejemplo, se tienen los valores:  $S_n^0 = 1 - (\frac{1}{2})^n$ ,  $S_n^1 = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ ,  $S_n^2 = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$ . Sustituyendo éstos en (3.3.12) finalmente llegamos a que  $P_2^n$  es igual a

$$2^n(n^2 - 4n + 10) - 2^{n-q} \left\{ 2q^2 - (2n-7)q + \left( \frac{n^2-7n+20}{2} \right) \right\}.$$

Esto es,

$$(3.3.13) \quad P_2^n = \begin{cases} (n^2 - 4n + 10) \cdot 2^n - 10 \cdot 2^{\frac{n}{2}} & \text{para } n \text{ par} \\ (n^2 - 4n + 10) \cdot 2^n - 7 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} & \text{para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Por ejemplo:  $P_2^3 = 28$ ,  $P_2^4 = 120$ ,  $P_2^5 = 424$  y  $P_2^6 = 1328$ . Comparar con  $N_2^3 = 3$ ,  $N_2^4 = 5$ ,  $N_2^5 = 8$  y  $N_2^6 = 11$ .

### Notas.

(1) Algunas referencias estándar para este capítulo son [LM], [Fr2], [BGV] y [GLP]. Para más información sobre estructuras pin y spin consultar [MP], [Mil], [Fr], [BD] y [CGT].

(2) Una definición alternativa de estructura spin propuesta por Hirsch a Milnor ([Mil]) es la siguiente. Sea  $M$  una variedad conexa y  $p : P_{\text{SO}} \rightarrow M$  un  $\text{SO}(n)$ -fibrado principal. Una estructura spin en  $M$  es una clase de cohomología  $\alpha \in H^1(P_{\text{SO}}, \mathbb{Z}_2)$  cuya restricción a cada fibra  $F_x = p^{-1}(x)$ ,  $x \in M$ , es un generador del grupo cíclico  $H^1(F_x) \simeq \mathbb{Z}_2$ . En el trabajo citado, Milnor da además dos definiciones alternativas más de estructuras spin.

(3) Supuestamente Vasquez ha dado, para cada  $n \geq 1$ , una HW variedad de dimensión  $2n+1$ ,  $M_{\Gamma_{2n+1}} = G_{2n} \backslash \mathbb{R}^{2n+1}$  tal que  $w_{2i}(M_{\Gamma_{2n+1}}) \neq 0$  para  $0 \leq 2i \leq n$  (ver [Va, Prop. 5.5]). En particular,  $M_{\Gamma_{2n+1}}$  no puede admitir una estructura spin. Sin embargo, este ejemplo parece estar mal puesto que, como se señala en [IK], el grupo  $\bar{G}_{2n}$  tiene elementos de orden finito, luego  $M_{\Gamma_{2n+1}}$  no es una variedad diferenciable.

(4) Recientemente, J. P. Rossetti ha probado (comunicación personal) que ninguna HW-variedad es spin. La prueba usa el criterio dado en la Observación 3.2.4.

## CAPÍTULO 4

### ¿Se pueden oír las estructuras spin?

Gordon, Webb y Wolpert ([GoWW, '92]) dieron una respuesta negativa a la pregunta de Kac: “*Can one hear the shape of a drum?*” ([Ka, '66]). Hace un tiempo, siguiendo el espíritu de ese famoso trabajo, David Webb formuló la siguiente pregunta: “*se pueden oír las estructuras spin de una variedad Riemanniana compacta?*” En otras palabras, si dos variedades son isospectrales, ¿es verdad que ambas son spin o que ninguna lo es? Daremos una respuesta negativa a esta pregunta tanto para las estructuras spin como para las estructuras  $\text{pin}^\pm$ .

Más concretamente, construiremos pares  $M, M'$  de  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedades isospectrales de dimensión  $n \geq 4$  (usando resultados de isospectralidad en [MR2]), y determinaremos las estructuras  $\text{pin}^\pm$  o spin, mostrando que, para algunas de ellas,  $M$  tiene una estructura  $\text{pin}^\pm$  o spin, mientras que  $M'$  no.

#### 4.1. Los pares isospectrales

Sean  $\{M_j, M'_j\}$ ,  $1 \leq j \leq 5$ , los pares de  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedades definidos por

$$M_j = \Gamma_j \backslash \mathbb{R}^4, \quad M'_j = \Gamma'_j \backslash \mathbb{R}^4$$

donde los grupos  $\Gamma_j = \langle \gamma_1, \gamma_2, \Lambda \rangle$ ,  $\Gamma'_j = \langle \gamma'_1, \gamma'_2, \Lambda \rangle$  están dados, módulo  $\Lambda$ , en la Tabla 4.1.1 más abajo, con

$$\gamma_i = B_i L_{b_i}, \quad \gamma'_i = B_i L_{b'_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$B_3 = B_1 B_2, \quad b_3 = B_2 b_1 + b_2, \quad b'_3 = B'_2 b'_1 + b'_2$$

y donde  $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_n$  es el retículo canónico. Además, tomamos  $B_i = B'_i$ . En todos los casos las matrices  $B_i$  son diagonales y están escritas como vectores columna. También indicamos los vectores de traslación  $b_i, b'_i$  como vectores columna, excluyendo las coordenadas que son iguales a cero. También usaremos el par  $\{\tilde{M}_1, \tilde{M}'_1\}$  de  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedades de dimensión 6 obtenidas a partir del par  $\{M_1, M'_1\}$  adjuntándole los caracteres  $(-1, 1, -1)$  y  $(1, -1, -1)$  a  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , y manteniendo  $b_i, b'_i$  sin cambios.

Observar que sólo  $M_5, M'_5, \tilde{M}_1, \tilde{M}'_1$  son orientables.

TABLA 4.1.1 Pares de variedades isospectrales

$\{M_1, M'_1\}$ $\{\tilde{M}_1, \tilde{M}'_1\}$	$B_1$	$L_{b_1}$	$L_{b'_1}$	$B_2$	$L_{b_2}$	$L_{b'_2}$	$B_3$	$L_{b_3}$	$L_{b'_3}$
	1			1	1/2	1/2	1	1/2	1/2
	1		1/2	1	1/2		1	1/2	1/2
	1	1/2		-1			-1	1/2	
	-1			1		1/2	-1		1/2
	-1			1			-1		
	1			-1			-1		
$\{M_2, M'_2\}$	$B_1$	$L_{b_1}$	$L_{b'_1}$	$B_2$	$L_{b_2}$	$L_{b'_2}$	$B_3$	$L_{b_3}$	$L_{b'_3}$
	1			1		1/2	1		1/2
	1		1/2	1	1/2	1/2	1	1/2	
	1	1/2		-1			-1	1/2	
	-1			1	1/2		-1	1/2	
$\{M_3, M'_3\}$	$B_1$	$L_{b_1}$	$L_{b'_1}$	$B_2$	$L_{b_2}$	$L_{b'_2}$	$B_3$	$L_{b_3}$	$L_{b'_3}$
	1			-1			-1		
	1		1/2	-1			-1		1/2
	-1			-1	1/2		1	1/2	
	1	1/2		1	1/2	1/2	1		1/2
$\{M_4, M'_4\}$	$B_1$	$L_{b_1}$	$L_{b'_1}$	$B_2$	$L_{b_2}$	$L_{b'_2}$	$B_3$	$L_{b_3}$	$L_{b'_3}$
	1	1/2		-1			-1	1/2	
	1	1/2	1/2	-1			-1	1/2	1/2
	-1			-1		1/2	1		1/2
	1		1/2	1	1/2	1/2	1	1/2	
$\{M_5, M'_5\}$	$B_1$	$L_{b_1}$	$L_{b'_1}$	$B_2$	$L_{b_2}$	$L_{b'_2}$	$B_3$	$L_{b_3}$	$L_{b'_3}$
	-1			1		1/2	-1		1/2
	-1			-1	1/2	1/2	1	1/2	1/2
	1		1/2	-1			-1		1/2
	1	1/2		1	1/2		1		

A los fines de mostrar la isospectralidad de estos pares necesitaremos recordar algunos resultados conocidos.

Para  $BL_b \in \Gamma$  tenemos  $n_B = |\{1 \leq i \leq n : Be_i = e_i\}|$  y ponemos

$$n_B(\frac{1}{2}) := |\{1 \leq i \leq n : Be_i = e_i \text{ y } b \cdot e_i \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}\}|.$$

Si  $0 \leq t \leq d \leq n$ , los números de Sunada para  $\Gamma$  están definidos por

$$(4.1.1) \quad c_{d,t}(\Gamma) := |\{BL_b \in \Gamma : n_B = d \text{ y } n_B(\frac{1}{2}) = t\}|.$$

En [MR2, Thm. 3.3] se muestra que la igualdad de los números de Sunada  $c_{d,t}(\Gamma) = c_{d,t}(\Gamma')$  para todo  $d, t$ , es equivalente a la validez de las condiciones en el teorema de Sunada (ver [Sun2]) para  $M_\Gamma$  y  $M_{\Gamma'}$ . En particular esto implica que  $M_\Gamma$  y  $M_{\Gamma'}$  son isospectrales en  $p$ -formas para  $0 \leq p \leq n$ . Este método fue usado en [MR] y [MR5] para probar la isospectralidad de los pares  $M_5, M'_5$  y  $M_2, M'_2$  respectivamente. El método de agregar caracteres manteniendo la isospectralidad ya fue usado en [MR].

TEOREMA 4.1.1. *Cada uno de los pares  $M_i, M'_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , y  $\tilde{M}_1, \tilde{M}'_1$  es un par isospectral.*

*El número de estructuras  $\text{pin}^\pm$  y  $\text{spin}$  en  $M_i, M'_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , y  $\tilde{M}_1, \tilde{M}'_1$  están dados en la siguiente tabla.*

Pares	$M_1$	$M'_1$	$\tilde{M}_1$	$\tilde{M}'_1$	$M_2$	$M'_2$	$M_3$	$M'_3$	$M_4$	$M'_4$	$M_5$	$M'_5$
$\text{pin}^+$	–	$2^3$	–	$2^5$	$2^3$	–	–	$2^4$	$2^4$	$2^3$	$2^4$	$2^3$
$\text{pin}^-$	$2^4$	$2^3$	–	$2^5$	$2^3$	–	–	–	–	$2^3$	$2^4$	$2^3$
$\text{spin}$	–	–	–	$2^5$	–	–	–	–	–	–	$2^4$	$2^3$

*Algunos de los pares isospectrales en la tabla muestran que no se puede oír la existencia de estructuras  $\text{pin}^\pm$  o  $\text{spin}$  en una variedad Riemanniana compacta.*

DEMOSTRACIÓN. Como todas las variedades son de tipo diagonal, para mostrar que estos pares son isospectrales basta chequear la igualdad de los números de Sunada (ver (4.1.1)). Es fácil ver de la Tabla 4.1.1 que los números de Sunada no triviales, además de  $c_{4,0} = 1$  que corresponde a la identidad, son:  $c_{2,2} = c_{3,1} = c_{3,2} = 1$  para  $M_1$  y  $M'_1$ ;  $c_{2,2} = c_{4,1} = c_{4,2} = 1$  para  $\tilde{M}_1$  y  $\tilde{M}'_1$ ;  $c_{2,1} = c_{3,1} = c_{3,2} = 1$  para  $M_2$  y  $M'_2$ ;  $c_{1,1} = c_{2,1} = c_{3,1} = 1$  para  $M_3$  y  $M'_3$ ;  $c_{1,1} = c_{2,1} = c_{3,2} = 1$  para  $M_4$  y  $M'_4$ ; y  $c_{2,1} = 3$  para  $M_5$  y  $M'_5$ . Luego, sigue que cada uno de los pares  $M_i, M'_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , y  $\tilde{M}_1, \tilde{M}'_1$  es un par isospectral en funciones.

Usaremos ahora el Teorema 3.2.1 para determinar las estructuras  $\text{spin}$  y  $\text{pin}^\pm$  en  $M_1, M'_1, \dots, M_5, M'_5, \tilde{M}_1$  y  $\tilde{M}'_1$ . Por la Observación 3.2.3 sólo necesitamos mirar la condición  $(\varepsilon_1)$ .

Primero miramos el par  $M_1, M'_1$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= L_{e_3}, & \gamma_2^2 &= L_{e_1+e_2} = \gamma_3^2; \\ \gamma_1'^2 &= L_{e_2}, & \gamma_2'^2 &= L_{e_1+e_4}, & \gamma_3'^2 &= L_{e_1+e_2}. \end{aligned}$$

Luego, por (2.1.12) y el Lema 3.3.2:

$$\begin{aligned} u_\pm^2(B_1) &= u_\pm^2(B'_1) = (\sigma_1 e_4)^2 = \pm 1, \\ u_\pm^2(B_2) &= u_\pm^2(B'_2) = (\sigma_2 e_3)^2 = \pm 1, \\ u_\pm^2(B_3) &= u_\pm^2(B'_3) = (\sigma_3 e_3 e_4)^2 = -1 \end{aligned}$$

con  $\sigma_i \in \{\pm 1\}$ . Por el criterio de la Observación 3.2.4, resulta que  $M_1$  no tiene estructuras  $\text{pin}^+$ , pues  $\gamma_2^2 = \gamma_3^2$  pero  $u_\pm^2(B_2) = 1$  mientras que  $u_\pm^2(B_3) = -1$ .

Además, por las ecuaciones previas, si  $\delta_i = \varepsilon_\pm(L_{e_i})$ , la condición  $(\varepsilon_1)$  da  $\delta_3 = \pm 1$ ,  $\delta_1 \delta_2 = \pm 1$  y  $\delta_1 \delta_2 = -1$ . Las dos últimas ecuaciones no son compatibles en  $Cl^+(n)$ , y así vemos una vez más que  $M_1$  no admite estructuras  $\text{pin}^+$ . Sin embargo, tiene  $2^4$  estructuras  $\text{pin}^-$  dadas por

$$\varepsilon_-(M_1) = (\delta_1, -\delta_1, -1, \delta_4; \sigma_1 e_4, \sigma_2 e_3)$$

donde  $\delta_i, \sigma_j \in \{\pm 1\}$  son arbitrarios para  $i = 1, 4, j = 1, 2$ . Similarmente, la condición  $(\varepsilon_1)$  para  $M'_1$  da  $\delta_2 = \pm 1$ ,  $\delta_1 \delta_4 = \pm 1$  y  $\delta_1 \delta_2 = -1$ . Luego,  $M'_1$  tiene  $2^3$  estructuras  $\text{pin}^\pm$  dadas por

$$\varepsilon_\pm(M'_1) = (\mp 1, \pm 1, \delta_3, -1; \sigma_1 e_4, \sigma_2 e_3)$$

con  $\delta_3, \sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm 1\}$ . De este modo, hemos mostrado que  $M_1, M'_1$  es un par isospectral tal que  $M_1$  no admite estructuras  $\text{pin}^+$  mientras que  $M'_1$  posee  $2^3$  estructuras  $\text{pin}^+$ .

Observamos que las variedades orientables  $\tilde{M}_1, \tilde{M}'_1$  tienen las mismas propiedades. Estas variedades son todavía isospectrales (otra vez hay igualdad de los números de Sunada) y  $\gamma_i^2$  y  $\gamma_i'^2$  son los mismos que antes, para  $1 \leq i \leq 3$ .

Ahora, si buscamos estructuras spin  $\varepsilon$  en  $\tilde{M}_1, \tilde{M}'_1$ , tenemos

$$\begin{aligned} u^2(B_1) = u^2(B'_1) &= (\sigma_1 e_4 e_5)^2 = -1, & u^2(B_2) = u^2(B'_2) &= (\sigma_2 e_3 e_6)^2 = -1, \\ u^2(B_3) = u^2(B'_3) &= (\sigma_3 e_3 e_4 e_5 e_6)^2 = 1. \end{aligned}$$

Para  $\tilde{M}_1$  tenemos que  $\gamma_2^2 = \gamma_3^2 = L_{e_1+e_2}$ , entonces  $\varepsilon(\gamma_2^2) = \varepsilon(\gamma_3^2)$ , una contradicción, dado que  $u^2(B_2) = -1$  y  $u^2(B_3) = 1$ . Luego, no hay estructuras spin en  $\tilde{M}_1$ . Por otra parte, para  $\tilde{M}'_1$ , tenemos que  $\gamma_1'^2 = L_{e_2}$ ,  $\gamma_2'^2 = L_{e_1+e_4}$ ,  $\gamma_3'^2 = L_{e_1+e_2}$ . Luego,  $\delta_2 = -1$ ,  $\delta_1 \delta_4 = -1$ ,  $\delta_1 \delta_2 = 1$ , por lo tanto hay  $2^5$  estructuras spin dadas por

$$\varepsilon = (-1, -1, \delta_3, 1, \delta_5, \delta_6; \sigma_1 e_4 e_5, \sigma_2 e_3 e_6)$$

con  $\delta_3, \delta_5, \delta_6, \sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm 1\}$ .

Esto prueba la afirmación y muestra que no se puede oír la existencia de estructuras spin en una variedad Riemanniana compacta.

Consideramos a continuación los restantes pares  $M_i, M'_i$ ,  $2 \leq i \leq 5$ . Los cálculos son completamente similares a los de los casos tratados antes, de modo que omitiremos los detalles, y sólo daremos la información necesaria en varias tablas. Por conveniencia, también incluiremos al par  $M_1, M'_1$ .

Notar que tanto las variedades  $M_1, M'_1, M_2, M'_2$ , como  $M_3, M'_3, M_4, M'_4$ , tienen la misma representación de holonomía. Además, todas las matrices que aparecen en la Tabla 4.1.1 son conjugadas a  $B_{0,1}$ ,  $B_{0,2}$  ó  $B_{0,3}$ . Por el Lema 3.3.2 sabemos que  $(u_{0,1}^\pm)^2 = \pm 1$ ,  $(u_{0,2}^\pm)^2 = -1$  y  $(u_{0,3}^\pm)^2 = \mp 1$  para  $\text{Pin}^\pm(n)$ . Luego tenemos:

CUADRO 4.1.2

variedades	$u_\pm^2(B_1)$	$u_\pm^2(B_2)$	$u_\pm^2(B_3)$
$M_1, M'_1, M_2, M'_2$	$\pm 1$	$\pm 1$	$-1$
$M_3, M'_3, M_4, M'_4$	$\pm 1$	$\mp 1$	$-1$
$M_5, M'_5$	$-1$	$-1$	$-1$

Se tiene que  $\gamma_i^2 = L_{\lambda_i} \in \Lambda$ . En el Cuadro 4.1.3 damos los vectores  $\lambda_i$  para  $1 \leq i \leq 3$  y para todo  $M_j, M'_j$ ,  $1 \leq j \leq 5$ .

CUADRO 4.1.3

	$M_1$	$M'_1$	$M_2$	$M'_2$	$M_3$	$M'_3$	$M_4$	$M'_4$	$M_5$	$M'_5$
$\gamma_1^2$	$e_3$	$e_2$	$e_3$	$e_2$	$e_4$	$e_2$	$e_1 + e_2$	$e_2 + e_4$	$e_4$	$e_3$
$\gamma_2^2$	$e_1 + e_2$	$e_1 + e_4$	$e_2 + e_4$	$e_1 + e_2$	$e_4$	$e_4$	$e_4$	$e_4$	$e_4$	$e_1$
$\gamma_3^2$	$e_1 + e_2$	$e_1 + e_2$	$e_2$	$e_1$	$e_3$	$e_4$	$e_4$	$e_3$	$e_2$	$e_2$

Usando la información de los Cuadros 4.1.2 y 4.1.3 obtenemos las ecuaciones que deben satisfacer los  $\delta_i$ 's, como resultado de la condición  $(\varepsilon_1)$ .

CUADRO 4.1.4. Ecuaciones para  $\delta_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
$M_1$	$\delta_3 = \pm 1$	$\delta_1 \delta_2 = \pm 1$	$\delta_1 \delta_2 = -1$
$M'_1$	$\delta_2 = \pm 1$	$\delta_1 \delta_4 = \pm 1$	$\delta_1 \delta_2 = -1$
$M_2$	$\delta_3 = \pm 1$	$\delta_2 \delta_4 = \pm 1$	$\delta_2 = -1$
$M'_2$	$\delta_2 = \pm 1$	$\delta_1 \delta_2 = \pm 1$	$\delta_1 = -1$
$M_3$	$\delta_4 = \pm 1$	$\delta_4 = \mp 1$	$\delta_3 = -1$
$M'_3$	$\delta_2 = \pm 1$	$\delta_4 = \mp 1$	$\delta_4 = -1$
$M_4$	$\delta_1 \delta_2 = \pm 1$	$\delta_4 = \mp 1$	$\delta_4 = -1$
$M'_4$	$\delta_2 \delta_4 = \pm 1$	$\delta_4 = \mp 1$	$\delta_3 = -1$
$M_5$	$\delta_4 = -1$	$\delta_4 = -1$	$\delta_2 = -1$
$M'_5$	$\delta_3 = -1$	$\delta_1 = -1$	$\delta_2 = -1$

Mirando el Cuadro 4.1.4 inmediatamente vemos que  $M_1$  no admite estructuras  $\text{pin}^+$ , que  $M'_2$  y  $M_3$  no poseen estructuras  $\text{pin}^\pm$  y que  $M'_3$  y  $M_4$  no pueden tener estructuras  $\text{pin}^-$ , pues las ecuaciones correspondientes no resultan compatibles. Listamos ahora todos los caracteres  $\delta_{\varepsilon_\pm} = (\varepsilon_\pm)|_\Lambda$ , correspondientes a las estructuras  $\text{pin}^\pm$  y  $\text{spin}$  en los restantes casos.

$$\begin{aligned}
\delta_{\varepsilon_-}(M_1) &= (\delta_1, -\delta_1, -1, \delta_4), & \delta_{\varepsilon_\pm}(M'_1) &= (\mp 1, \pm 1, \delta_3, -1), \\
\delta_{\varepsilon_\pm}(M_2) &= (\delta_1, -1, \pm 1, \mp 1), & \delta_{\varepsilon_+}(M'_3) &= (\delta_1, 1, \delta_3, -1), \\
\delta_{\varepsilon_+}(M_4) &= (\delta_1, \delta_1, \delta_3, -1), & \delta_{\varepsilon_\pm}(M'_4) &= (\delta_1, -1, -1, \mp 1), \\
\delta_{\varepsilon}(M_5) &= (\delta_1, -1, \delta_3, -1), & \delta_{\varepsilon}(M'_5) &= (-1, -1, -1, \delta_4).
\end{aligned}$$

Ahora, para cada elección de  $\delta_{\varepsilon_\pm} = (\varepsilon_\pm)|_\Lambda$  existen  $2^2 = 4$  estructuras que corresponden a las posibles elecciones de  $\sigma_1, \sigma_2$ , luego es fácil verificar que el número de estructuras  $\text{pin}^+$ ,  $\text{pin}^-$  o  $\text{spin}$  es como el que se indica en el enunciado del teorema.  $\square$

OBSERVACIÓN 4.1.2. El procedimiento de agregar caracteres apropiados a  $M_1$  y  $M'_1$  para obtener variedades orientables, donde  $M_1$  admite estructuras spin mientras que  $M'_1$  no, también se puede aplicar a los restantes pares  $M_i, M'_i$ ,  $2 \leq i \leq 4$ . Alternativamente, podemos también usar el método descrito en la Observación 3.2.5. En efecto, consideremos las  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedades orientables  $M_{d\Gamma_1}, M_{d\Gamma'_1}$  de dimensión 8 obtenidas al duplicar los grupos de Bieberbach  $\Gamma_1, \Gamma'_1$  (ver Cuadro 4.1.5). Las variedades resultantes están ahora dotadas de una estructura Kähler.

CUADRO 4.1.5

$B_1$	$L_{b_1}$	$L_{b'_1}$	$B_2$	$L_{b_2}$	$L_{b'_2}$	$B_3$	$L_{b_3}$	$L_{b'_3}$
1			1	1/2	1/2	1	1/2	1/2
1		1/2	1	1/2		1	1/2	1/2
1	1/2		-1			-1	1/2	
-1			1		1/2	-1		1/2
1			1	1/2	1/2	1	1/2	1/2
1		1/2	1	1/2		1	1/2	1/2
1	1/2		-1			-1	1/2	
-1			1		1/2	-1		1/2

Comparando los números de Sunada, vemos que  $M_{d\Gamma_1}$  y  $M_{d\Gamma'_1}$  son isospectrales. Ahora miramos la condición  $(\varepsilon_1)$  en (3.2.5). Para  $d\Gamma_1$  tenemos

$$\delta_3\delta_7 = -1, \quad \delta_1\delta_2\delta_5\delta_6 = -1, \quad \delta_1\delta_2\delta_5\delta_6 = 1.$$

Las dos últimas ecuaciones son claramente no compatibles, por lo tanto  $M_{d\Gamma_1}$  no admite estructuras spin. Por otro lado, para  $d\Gamma'_1$  tenemos

$$\delta_2\delta_6 = -1, \quad \delta_1\delta_4\delta_5\delta_8 = -1, \quad \delta_1\delta_2\delta_5\delta_6 = 1,$$

por lo tanto esta variedad admite  $2^7$  estructuras spin dadas por

$$\varepsilon = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, -\delta_1, -\delta_2, \delta_7, \delta_4, \sigma_1 e_4 e_8, \sigma_2 e_3 e_7).$$



## Parte 3

# Resultados generales sobre el operador de Dirac



## El espectro del operador de Dirac torcido en variedades compactas planas

En este capítulo introducimos el operador de Dirac,  $D_\rho$ , actuando en secciones del fibrado spinorial  $S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon)$  (ver (5.1.2)) torcido por una representación unitaria de dimensión finita  $\rho$  de  $\Gamma$ . Daremos fórmulas explícitas para las multiplicidades de los autovalores del operador  $D_\rho$  en una variedad compacta plana spin  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  arbitraria. En particular, daremos la dimensión del espacio de spinores armónicos  $h = \dim \ker D_\rho$ . También daremos una expresión general para la serie eta  $\eta_\rho(s)$  asociada a  $D_\rho$ . Como aplicación, usaremos esta expresión para calcular la serie  $\eta_\rho(s)$  y los invariantes  $\eta_\rho$  de  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades (Capítulo 6), de ciertas  $\mathbb{Z}_p$ -variedades, con  $p$  primo (Capítulo 8) y de una familia de  $\mathbb{Z}_4$ -variedades (Capítulo 9).

### 5.1. Operadores de Dirac torcidos

*Fibrados spinoriales.* Sea  $M_\Gamma$  una variedad plana spin con estructura spin  $\varepsilon$  dada por (3.1.1) y (3.1.2). Los fibrados vectoriales complejos sobre  $M_\Gamma$  están en correspondencia biunívoca con las representaciones unitarias complejas  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{U}(V)$  de  $\Gamma$ . Por conveniencia, en este trabajo sólo consideraremos representaciones  $\rho$  de  $\Gamma$  tales que  $\rho|_\Lambda = 1$ .

Recordemos que si  $(L, S)$  es la representación spin entonces  $\dim(S) = 2^m$  con  $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Además, si  $n$  es impar entonces  $L$  es irreducible, mientras que si  $n$  es par,  $S = S^+ \oplus S^-$ , donde  $S^\pm$  son subespacios invariantes irreducibles de dimensión  $2^{m-1}$ . Sea  $V$  un espacio vectorial. Como  $\tilde{B}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathrm{Spin}(n)$ , el grupo  $\mathrm{Spin}(n)$  actúa a derecha en  $\tilde{B}(\mathbb{R}^n) \times S \otimes V$  (ver Sección 3.1) por

$$(b, w \otimes v) \cdot g = (bg, L(g^{-1})(w) \otimes v)$$

y esta acción define una relación de equivalencia tal que

$$((x, g), w \otimes v) \sim ((x, 1), L(g)(w) \otimes v)$$

para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $g \in \mathrm{Spin}(n)$ ,  $w \otimes v \in S \otimes V$ .

Existe un isomorfismo de fibrados del fibrado asociado  $\tilde{B}(\mathbb{R}^n) \times_{L \otimes Id} S \otimes V$  sobre el fibrado vectorial  $\mathbb{R}^n \times (S \otimes V)$ , dado por

$$\overline{((x, g), w \otimes v)} \mapsto (x, L(g)(w) \otimes v).$$

Consideremos  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{U}(V)$  una representación unitaria de dimensión finita de  $\Gamma$  tal que  $\rho|_\Lambda = 1$ . Incorporando esta  $\rho$  a la acción de  $\Gamma$  se tiene

que  $\gamma \cdot \overline{((x, g), w \otimes v)} = \overline{((\gamma x, \varepsilon(\gamma)g), w \otimes \rho(\gamma)v)}$  (ver discusión después de (3.1.1)), y la correspondiente acción de  $\gamma = BL_b \in \Gamma$  en  $\mathbb{R}^n \times (S \otimes V)$  está dada por

$$(5.1.1) \quad \gamma \cdot (x, w \otimes v) = (\gamma x, L(\varepsilon(\gamma))(w) \otimes \rho(\gamma)(v)).$$

De este modo tenemos que el fibrado  $\Gamma \backslash (\tilde{B}(\mathbb{R}^n) \times_{L \otimes Id} (S \otimes V)) \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  definido por  $\varepsilon$ , es isomorfo a

$$(5.1.2) \quad S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon) := \Gamma \backslash (\mathbb{R}^n \times (S \otimes V)) \longrightarrow \Gamma \backslash \mathbb{R}^n = M_\Gamma.$$

Este último es el *fibrado spinorial de  $M_\Gamma$  torcido por  $\rho$*  (o con coeficientes en  $V$ ). Tal fibrado depende de  $\varepsilon$  y de  $\rho$ .

*Campos spinoriales.* Denotemos por  $\Gamma^\infty(S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon))$  el espacio de secciones  $\mathcal{C}^\infty$  de  $S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon)$ , o sea el espacio de *campos spinoriales* de  $M_\Gamma$ . Sea  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times (S \otimes V)$  dada por  $\psi(x) = (x, f(x))$  donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow S \otimes V$  es diferenciable. Tenemos que  $\psi$  define una sección de  $\Gamma \backslash (\mathbb{R}^n \times (S \otimes V))$  si y sólo si  $\psi(\gamma x) \sim \psi(x)$ , esto es, si y sólo si  $\psi(\gamma x) = \tilde{\gamma}\psi(x)$ , para algún  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ . Es decir, si y sólo si  $\tilde{\gamma}x = \gamma x$  y  $\tilde{\gamma}f(x) = f(\gamma x)$ . Como  $\Gamma$  actúa libremente en  $\mathbb{R}^n$ , este es el caso si y sólo si  $\tilde{\gamma} = \gamma$  y más aún  $f$  satisface  $f(\gamma x) = (L \circ \varepsilon \otimes \rho)(\gamma)f(x)$ . En otras palabras, podemos identificar

$$\Gamma^\infty(S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon)) \equiv \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow S \otimes V \text{ suave} : f(\gamma x) = (L \circ \varepsilon \otimes \rho)(\gamma)f(x)\}.$$

En particular, en el caso del toro  $T_\Lambda = \Lambda \backslash \mathbb{R}^n$ , si  $\psi(x) = (x, f(x))$  es una sección de  $\Lambda \backslash (\mathbb{R}^n \times (S \otimes V))$  entonces, puesto que  $\rho|_\Lambda = 1$ ,

$$(5.1.3) \quad f(x + \lambda) = (L(\varepsilon(\lambda)) \otimes \rho(\lambda))f(x) = \delta_\varepsilon(\lambda)f(x)$$

donde  $\delta_\varepsilon$  es el carácter de  $\Lambda$  inducido por  $\varepsilon$  (ver Definición 3.1.5). Luego  $f$  es  $\delta_\varepsilon$ -equivariante. Recíprocamente, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow S \otimes V$  es  $\delta_\varepsilon$ -equivariante entonces  $\psi(x) = (x, f(x))$  es un campo spinorial en  $T_\Lambda$ .

Ahora,  $\delta_\varepsilon \in \text{Hom}(\Lambda, \{\pm 1\})$ , por lo tanto existe  $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\delta_\varepsilon(\lambda) = e^{2\pi i u_\varepsilon \cdot \lambda}$$

para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Sea

$$\Lambda_\varepsilon^* := \Lambda^* + u_\varepsilon$$

donde  $\Lambda^*$  es el retículo dual de  $\Lambda$ . O sea,  $\Lambda^* = \{\lambda' \in \mathbb{R}^n : e^{2\pi i \lambda' \cdot \lambda} = 1, \lambda \in \Lambda\}$  y  $\Lambda_\varepsilon^* = \{\lambda' \in \mathbb{R}^n : e^{2\pi i \lambda' \cdot \lambda} = \delta_\varepsilon(\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  es una  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda$ , sea  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$  la base dual y definimos los conjuntos

$$(5.1.4) \quad J_\varepsilon^\pm := \{i \in \{1, \dots, n\} : \delta_\varepsilon(\lambda_i) = \varepsilon(L\lambda_i) = \pm 1\}.$$

Entonces tenemos

$$(5.1.5) \quad u_\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i \in J_\varepsilon^-} \lambda'_i \quad \text{mod } (\Lambda^*)$$

y además

$$(5.1.6) \quad \Lambda_\varepsilon^* = \bigoplus_{j \in J_\varepsilon^+} \mathbb{Z}\lambda'_j \oplus \bigoplus_{j \in J_\varepsilon^-} (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\lambda'_j.$$

Para  $u \in \Lambda_\varepsilon^*$ ,  $w \in S \otimes V$  consideremos la función

$$(5.1.7) \quad f_{u,w}(x) := f_u(x)w := e^{2\pi i u \cdot x} w.$$

Es claro que  $f_{u,w}$  es  $\delta_\varepsilon$ -equivariante y por lo tanto  $\psi_{u,w}(x) := (x, f_{u,w}(x))$  define un campo spinorial en  $T_\Lambda$ .

*El Laplaciano spinorial y el operador de Dirac.* Sea  $(\rho, V)$  una representación unitaria compleja de dimensión finita de  $\Gamma$  tal que  $\rho|_\Lambda = 1$ . Denotaremos por  $\chi_\rho$  y  $d_\rho$  al carácter y a la dimensión de  $\rho$ , respectivamente.

Si  $M_\Gamma$  es una variedad plana dotada de una estructura spin  $\varepsilon$ , denotemos por  $\Delta_{s,\rho}$  al Laplaciano spinorial torcido por  $\rho$  actuando en secciones  $\mathcal{C}^\infty$  del fibrado  $S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon)$ . Esto es,  $\Delta_{s,\rho} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x)$ . Más precisamente, si  $\psi(x) = (x, f(x))$  es un campo spinorial donde  $f(x) = \sum_{i=1}^d f_i(x)w_i$ , con  $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  y  $\{w_i\}_{i=1}^d$  es una base de  $S \otimes V$ , tenemos

$$(5.1.8) \quad \Delta_{s,\rho} \psi(x) = \left( x, \sum_{i=1}^d \Delta f_i(x)w_i \right),$$

donde  $\Delta$  es el Laplaciano en funciones en  $M_\Gamma$ .

Es fácil ver que para  $u \in \Lambda_\varepsilon^*$ ,  $w \in S \otimes V$ , toda  $f_{u,w}$  como en (5.1.7) es una autofunción de  $\Delta_{s,\rho}$  con autovalor  $-4\pi^2 \|u\|^2$ , es decir

$$\Delta_{s,\rho} f_{u,w} = -4\pi^2 \|u\|^2 f_{u,w}.$$

Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\psi$  como antes. El operador de Dirac torcido por  $\rho$ ,  $D_\rho$ , está definido por

$$(5.1.9) \quad D_\rho \psi(x) = \left( x, \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right)$$

donde  $e_i$  actúa por  $L(e_i) \otimes Id$  en  $S \otimes V$ . A menudo haremos abuso de notación y asumiremos que  $D_\rho$  actúa en la función  $f$ , donde  $\psi(x) = (x, f(x))$ , escribiendo

$$D_\rho f(x) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(x),$$

donde  $\cdot$  denota multiplicación de Clifford por  $e_i$ .

Se tiene que  $D_\rho$  es un operador diferencial elíptico de primer orden definido en el fibrado spinorial  $S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon)$  de  $M_\Gamma$ . Además,  $D_\rho$  es simétrico, esencialmente autoadjunto y no depende de la base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  elegida. El operador  $D_\rho$  tiene espectro discreto de autovalores reales de multiplicidad finita y satisface

$$D_\rho^2 = -\Delta_{s,\rho}.$$

La elipticidad de  $D_\rho$  asegura que su espectro determina el volumen,  $\text{vol}(M_\Gamma)$ , y la dimensión,  $n$ , de  $M_\Gamma$ . En efecto,  $D_\rho$  satisface la ley asintótica de Weyl:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t^n} = \frac{2^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{vol}(M_\Gamma)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

donde  $N(t)$  es el número de autovalores  $\lambda$  tales que  $|\lambda| \leq t$ .

Denotaremos por  $\text{Spec}_D(M_\Gamma, \varepsilon)$  el espectro de  $D_\rho$  cuando  $\rho$  quede sobrentendida.

**OBSERVACIÓN 5.1.1.** Dada una variedad compacta plana spin  $(M_\Gamma, \varepsilon)$ , para cada representación  $\rho$  del grupo fundamental  $\pi_1(M_\Gamma) = \Gamma$  se tiene un fibrado spinorial  $S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon)$  y un operador de Dirac torcido  $D_\rho$  actuando en secciones de éste. Si uno está interesado en comparar espectros entre pares (o familias) de variedades, el caso más simple es considerar variedades con el mismo operador  $D_\rho$  asociado (por ejemplo,  $(\rho, V) = (1, \mathbb{C})$ ). Dos casos particulares en que  $\rho$  “está fija” se destacan por su interés. El primero es cuando la representación  $\rho$  se “extiende” a  $\text{SO}(n)$ , es decir existe una representación  $\alpha : \text{SO}(n) \rightarrow \text{U}(V)$  tal que  $\rho = r \circ \alpha$ . Notar que  $\rho|_\Lambda = 1$ . En el segundo, se parte de una representación  $\beta : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{U}(V)$  y se toma  $\rho = \beta \circ \varepsilon$ . Ahora,  $\rho|_\Lambda$  resulta un carácter de  $\Lambda$  con imagen  $\{\pm 1\}$ . Claramente, toda representación  $\rho$  de tipo  $\alpha$  como arriba da lugar a una de tipo  $\beta$ .

## 5.2. El espectro del operador de Dirac torcido

Comenzamos calculando la acción de  $D_\rho$  en las secciones  $f_{u,w \otimes v}$  con  $u \in \Lambda_\varepsilon^*$ ,  $w \in \mathbb{S}$ ,  $v \in V$ . Tenemos

$$\begin{aligned} D_\rho f_{u,w \otimes v}(x) &= \sum_{j=1}^n e_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} e^{2\pi i \langle u, x \rangle} w \otimes v \\ &= 2\pi i e^{2\pi i \langle u, x \rangle} u \cdot w \otimes v = 2\pi i u \cdot f_{u,w \otimes v}(x) \end{aligned}$$

donde  $\cdot$  denota multiplicación de Clifford a izquierda, o sea  $u \cdot w = L(u)(w)$ . Ahora, para cada  $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , fijamos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interno en  $\mathbb{S}$  tal que  $L(u)$  es skew-Hermitiano, luego  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es  $\text{Spin}(n)$ -invariante. Notar que  $L(u)^2 = -\|u\|^2 \text{Id}$ .

Para cada  $u \in \Lambda_\varepsilon^*$  con  $\|u\| = \mu$ ,  $\mu > 0$ , sea  $\{w_j^\pm\}_{j=1}^{2^{m-1}}$  una base ortonormal del autoespacio de  $L(u)$  con autovalor asociado  $\mp i\|u\|$ . Sea  $\{v_k\}_{k=1}^{d_\rho}$  una base ortonormal de  $V$ . Si ponemos

$$(5.2.1) \quad f_{u,j,k}^\pm(x) := f_{u,w_j^\pm \otimes v_k}(x) = e^{2\pi i u \cdot x} w_j^\pm \otimes v_k,$$

para  $u \in \Lambda_\varepsilon^*$ ,  $1 \leq j \leq 2^{m-1}$  y  $1 \leq k \leq d_\rho$ , entonces tenemos

$$D_\rho f_{u,j,k}^\pm = \pm 2\pi \|u\| f_{u,j,k}^\pm,$$

es decir,  $f_{u,j,k}^\pm \in H_\mu^\pm$ , el espacio de autosecciones de  $D_\rho$  con autovalor  $\pm 2\pi\mu$ .

En el caso en que  $u = 0$ ,  $w \neq 0$ , por (5.1.3), la función constante  $f_{0,w}(x) = w$  con  $w \in \mathbb{S} \otimes V$  define un campo spinorial si y sólo si

$$f_{0,w}(x + \lambda) = \delta_\varepsilon(\lambda) f_{0,w}(x),$$

para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Esto es, si y sólo si  $\varepsilon = 1$ , la estructura spin trivial. Más aún,  $f_{0,w}$  es una autosección de  $D_\rho$  con autovalor 0, o sea un *spinor*

*armónico*. Recíprocamente, si  $D_\rho f = 0$  entonces también  $\Delta_{s,\rho} f = 0$ . Luego, sigue de (5.1.8) que  $f = f_{0,w}$  para algún  $w \in S \otimes V$ , o sea  $f$  es constante.

Denotaremos por  $H_0$  al espacio de spinores armónicos. Si  $n$  es par, las secciones de la forma  $f_{0,w}$  con  $w \in S^+ \otimes V$  (resp.  $S^- \otimes V$ ) son llamadas a menudo spinores armónicos *positivos* (resp. *negativos*). En este caso

$$H_0 = H_0^+ \oplus H_0^-,$$

donde  $H_0^+$  y  $H_0^-$  denotan respectivamente los espacios de spinores armónicos positivos y negativos.

*Notación.* Si  $\mu > 0$  ponemos  $d_{\rho,\mu}^\pm(\Lambda, \varepsilon) := \dim H_\mu^\pm$ , las multiplicidades de los autovalores  $\pm 2\pi\mu$ . Si  $\mu = 0$ , sea  $d_{\rho,0}(\Lambda, \varepsilon) := \dim H_0$  y, si  $n$  es par,  $d_{\rho,0}^\pm(\Lambda, \varepsilon) := \dim H_0^\pm$ .

El siguiente resultado muestra que el espectro  $\text{Spec}_{D_\rho}(T_\Lambda, \varepsilon)$  del toro  $T_\Lambda$  está determinado por la cardinalidad de los conjuntos

$$(5.2.2) \quad \Lambda_{\varepsilon,\mu}^* := \{v \in \Lambda_\varepsilon^* : \|v\| = \mu\}$$

donde  $\Lambda_\varepsilon^*$  es como en (5.1.6).

**PROPOSICIÓN 5.2.1.** *Sea  $\varepsilon$  una estructura spin en el toro  $T_\Lambda = \Lambda \backslash \mathbb{R}^n$  y sea  $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . En la notación previa, tenemos:*

- (i)  $H_0 = S \otimes V$  si  $\varepsilon = 1$  y  $H_0 = 0$  si  $\varepsilon \neq 1$ .
- (ii) Si  $\mu > 0$ , entonces

$$H_\mu^\pm = \text{span}\{f_{u,j,k}^\pm : u \in \Lambda_{\varepsilon,\mu}^*, 1 \leq j \leq 2^{m-1}, 1 \leq k \leq d_\rho\}$$

donde  $f_{u,j,k}^\pm$  es como en (5.2.1).

La multiplicidad del autovalor  $\pm 2\pi\mu$  de  $D_\rho$  es igual a

$$d_{\rho,\mu}^\pm(\Lambda, \varepsilon) = 2^{m-1} d_\rho |\Lambda_{\varepsilon,\mu}^*|$$

con  $\Lambda_{\varepsilon,\mu}^*$  como en (5.2.2). Más aún,  $\|f_{u,j,k}^\pm\| = \text{vol}(T_\Lambda)^{1/2}$  para cada  $u, j, k$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Las afirmaciones en (i) son claras por los comentarios previos a la proposición. Ahora, definimos el espacio  $L^2(\Lambda \backslash \mathbb{R}^n; \delta_\varepsilon)$  por

$$\left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x + \lambda) = \delta_\varepsilon(\lambda) f(x) \text{ para } \lambda \in \Lambda, x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \int_{T_\Lambda} |f|^2 < \infty \right\}$$

y similarmente  $L^2(\Lambda \backslash \mathbb{R}^n, S \otimes V; \delta_\varepsilon)$  usando funciones a valores en  $S \otimes V$ .

Para cada  $u \in \Lambda_\varepsilon^*$ , la función  $f_u(x) = e^{2\pi i u \cdot x} \in L^2(\Lambda \backslash \mathbb{R}^n; \delta_\varepsilon)$ . En el caso  $\varepsilon = 1$ , el teorema de Stone-Weierstrass implica que el conjunto  $\{f_u : u \in \Lambda^*\}$  es un sistema ortogonal completo de  $L^2(\Lambda \backslash \mathbb{R}^n)$ . Como  $\Lambda_\varepsilon^* = \Lambda^* + u_\varepsilon$ , el conjunto  $\{f_u : u \in \Lambda_\varepsilon^*\}$  es un sistema ortogonal completo de  $L^2(\Lambda \backslash \mathbb{R}^n; \delta_\varepsilon)$ . Ahora, si para cada  $u \in \Lambda_\varepsilon^*$  dado, elegimos una base ortonormal  $\mathcal{B}_u$  de  $S \otimes V$  de autovectores de  $L(u) \otimes Id$ , entonces es claro que esto implica que el conjunto

$$(5.2.3) \quad \{f_{u,w}(x) : u \in \Lambda_\varepsilon^*, w \in \mathcal{B}_u\}$$

es un sistema ortogonal completo de  $L^2(\Lambda \setminus \mathbb{R}^n, \mathbb{S} \otimes V; \delta_\varepsilon)$ . Más aún, cada  $f_{u,w}$  es una autofunción de  $D_\rho$  con autovalor  $\pm 2\pi\|u\|$ , luego vale (ii).  $\square$

OBSERVACIÓN 5.2.2. Si  $\Lambda$  es el retículo canónico (o cúbico), entonces

$$(5.2.4) \quad |\Lambda_{\varepsilon,\mu}^*| = |\{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{j \in J_\varepsilon^+} m_j^2 + \sum_{j \in J_\varepsilon^-} (m_j + \frac{1}{2})^2 = \mu^2\}|,$$

donde  $J_\varepsilon^\pm$  son calculados respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Observamos que  $|J_\varepsilon^-|$  (ó  $|J_\varepsilon^+|$ , ver (5.1.4)) determina la multiplicidad de los autovalores  $\pm 2\pi\mu$ , para cada  $\mu > 0$ , por (5.2.4) y por la fórmula de multiplicidad en (ii) de la Proposición 5.2.1. Luego, para cada  $\rho$  fija,  $Spec_{D_\rho}(T_\Lambda, \varepsilon)$  está determinado por  $|J_\varepsilon^-|$  (ó por  $|J_\varepsilon^+|$ ), es decir

$$Spec_{D_\rho}(T_\Lambda, \varepsilon) = Spec_{D_\rho}(T_\Lambda, \varepsilon') \Leftrightarrow |J_\varepsilon^-| = |J_{\varepsilon'}^-| \Leftrightarrow |J_\varepsilon^+| = |J_{\varepsilon'}^+|.$$

Nuestra meta ahora es obtener una fórmula de multiplicidades para los autovalores  $\pm 2\pi\mu$ ,  $\mu \geq 0$ , del operador de Dirac actuando en campos spinoriales torcidos de una variedad compacta plana spin  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  arbitraria. Veremos que sólo los elementos en  $\Gamma$  tales que  $B \in F_1$  (ver Definición 1.1.5) contribuirán de manera no trivial a la fórmula. Uno de los ingredientes en la fórmula será un signo, asociado a cada par  $\gamma, u$ , con  $\gamma = BL_b$ ,  $u \in \Lambda^*$  fijo por  $B$ . Este signo es crucial y aparece al comparar las clases de conjugación en  $Spin(n-1)$  de dos elementos  $x, y \in Spin(n-1)$  que son conjugados en  $Spin(n)$ . Por el Lema 2.2.2, dados dos elementos  $x, y$  así, entonces  $y$  es conjugado a  $x$  ó a  $-e_1 x e_1$  en  $Spin(n-1)$ .

*Notación.* En lo que sigue escribiremos  $x \sim y$  si  $x$  e  $y$  son elementos de  $Spin(n)$  conjugados en  $Spin(n-1)$ .

Si  $\gamma = BL_b \in \Lambda \setminus \Gamma$  y  $u \in (\mathbb{R}^n)^B \setminus \{0\}$ , sea  $h_u \in Spin(n)$  tal que

$$(5.2.5) \quad h_u u h_u^{-1} = \|u\| e_n.$$

Como  $Bu = u$  se tiene que  $\mu(h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1}) e_n = e_n$ . Luego, por el comentario posterior a la Definición 2.2.5 se cumple que

$$h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1} \in Spin(n-1).$$

Necesitaremos hacer la siguiente elección.

DEFINICIÓN 5.2.3. Fijemos un elemento  $x_\gamma$  en el toro maximal  $T$  de  $Spin(n-1)$  que sea conjugado en  $Spin(n)$  a  $\varepsilon(\gamma)$  (si  $n$  es impar,  $T_n = T_{n-1}$ , ver (2.1.11)). Definimos  $\sigma_\varepsilon(u, x_\gamma) = 1$  si  $h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1}$  es conjugado a  $x_\gamma$  en  $Spin(n-1)$  y  $\sigma_\varepsilon(u, x_\gamma) = -1$  en caso contrario, es decir

$$(5.2.6) \quad \sigma_\varepsilon(u, x_\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1} \sim x_\gamma \\ -1 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Notar que  $\sigma_\varepsilon(u, x_\gamma)$  es independiente de la elección del  $h_u$ . Por conveniencia, simplemente escribiremos  $\sigma(u, x_\gamma)$  cuando  $\varepsilon$  esté sobreentendido.



OBSERVACIÓN 5.2.4. Si  $n$  es par, entonces  $\sigma(u, x_\gamma) = 1$  para todo  $u$ , por Lema 2.2.2. También, si  $\gamma$  es tal que  $n_{B_\gamma} > 1$  entonces, argumentando como al final de la prueba del Lema 2.2.2, vemos que  $\sigma(u, x_\gamma) = 1$  para todo  $u$ . Además, si  $x_\gamma$  no es conjugado a  $-e_1 x_\gamma e_1$  en  $\text{Spin}(n)$ , entonces, por definición,  $\sigma(u, -e_1 x_\gamma e_1) = -\sigma(u, x_\gamma)$ . Más aún

$$\sigma(-u, x_\gamma) = -\sigma(u, x_\gamma) \quad \text{y} \quad \sigma(\alpha u, x_\gamma) = \sigma(u, x_\gamma)$$

para cada  $\alpha > 0$ , pues podemos tomar  $h_{\alpha u} = h_u$ .

Con las notaciones de arriba, para cada  $\gamma = BL_b \in \Gamma$  y  $\mu > 0$ , ponemos

$$(5.2.7) \quad e_{\mu, \gamma, \sigma}(\delta_\varepsilon) := \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B} \sigma(u, x_\gamma) e^{-2\pi i u \cdot b}$$

donde  $(\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B = \{v \in \Lambda_{\varepsilon, \mu}^* : Bv = v\}$  y  $\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*$  es como en (5.2.2). Cuando  $\sigma = 1$  sólo escribimos  $e_{\mu, \gamma}(\delta_\varepsilon)$  en lugar de  $e_{\mu, \gamma, 1}(\delta_\varepsilon)$ , por conveniencia. Notar que  $e_{\mu, Id} = |\Lambda_{\mu, \varepsilon}^*|$ . Como es habitual, denotaremos por  $\chi_\rho$ ,  $\chi_L$  y  $\chi_{L^\pm}$  los caracteres de  $\rho$ ,  $L$  y  $L^\pm$ , respectivamente.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el resultado más importante de este capítulo.

TEOREMA 5.2.5. *Supongamos que  $\Gamma$  un grupo de Bieberbach con retículo de traslaciones  $\Lambda$ , grupo de holonomía  $F \simeq \Lambda \backslash \Gamma$  y que la variedad compacta plana  $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  admite una estructura spin  $\varepsilon$ . Sea  $\rho$  una representación de  $\Gamma$  y  $D_\rho$  el operador de Dirac asociado. Entonces, para cada  $\mu > 0$  la multiplicidad  $d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon)$  del autovalor  $\pm 2\pi\mu$  de  $D_\rho$  está dada por*

$$(5.2.8) \quad d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = \frac{1}{|F|} \sum_{\gamma \in \Lambda \backslash \Gamma} \chi_\rho(\gamma) e_{\mu, \gamma}(\delta_\varepsilon) \chi_{L_{n-1}}(x_\gamma)$$

si  $n$  es par y por

$$(5.2.9) \quad d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = \frac{1}{|F|} \left( \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda \backslash \Gamma \\ B \notin F_1}} \chi_\rho(\gamma) e_{\mu, \gamma}(\delta_\varepsilon) \chi_{L_{n-1}^\pm}(x_\gamma) + \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda \backslash \Gamma \\ B \in F_1}} \chi_\rho(\gamma) \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B} e^{-2\pi i u \cdot b} \chi_{L_{n-1}^{\pm\sigma(u, x_\gamma)}}(x_\gamma) \right)$$

si  $n$  es impar por, donde  $e_{\mu, \gamma}(\delta_\varepsilon)$  es como en (5.2.7),  $F_1$  como en (1.1.6), y  $x_\gamma$ ,  $\sigma(u, x_\gamma)$  como en la Definición 5.2.3.

Sea  $\mu = 0$ . Si  $\varepsilon|_\Lambda \neq 1$  entonces  $d_{\rho, 0}(\Gamma, \varepsilon) = 0$ . Si  $\varepsilon|_\Lambda = 1$  entonces

$$(5.2.10) \quad d_{\rho, 0}(\Gamma, \varepsilon) = \frac{1}{|F|} \sum_{\gamma \in \Lambda \backslash \Gamma} \chi_\rho(\gamma) \chi_{L_n}(\varepsilon(\gamma)) = \dim(S \otimes V)^F.$$

Notar que los sumandos en (5.2.8) y en (5.2.9) son independientes del representante  $\gamma \bmod (\Lambda)$  y de la elección de  $x_\gamma$ , pero en general los factores individuales no lo son.

DEMOSTRACIÓN. Inicialmente procedemos de manera similar a [MR3] y [MR4]. Tenemos que

$$L^2(S_\rho(M_\Gamma, \varepsilon)) \simeq L^2(S_\rho(T_\Lambda, \varepsilon))^\Gamma = \bigoplus_{\mu > 0} \left( (H_\mu^+)^\Gamma \oplus (H_\mu^-)^\Gamma \right) \oplus H_0^\Gamma.$$

Luego,  $d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = \dim (H_\mu^\pm)^\Gamma$ , para  $\mu > 0$ , y  $d_{\rho, 0}(\Gamma, \varepsilon) = \dim H_0^\Gamma$ . Se tiene la proyección  $p_\mu^\pm$  de  $H_\mu^\pm$  sobre  $(H_\mu^\pm)^\Gamma$  dada por

$$p_\mu^\pm = \frac{1}{|\Lambda \backslash \Gamma|} \sum_{\gamma \in \Lambda \backslash \Gamma} \gamma|_{H_\mu^\pm}.$$

Por lo tanto

$$\dim (H_\mu^\pm)^\Gamma = \text{tr } p_\mu^\pm = \frac{1}{|\Lambda \backslash \Gamma|} \sum_{\gamma \in \Lambda \backslash \Gamma} \text{tr}(\gamma|_{H_\mu^\pm})$$

y similarmente para  $\dim H_0^\Gamma$ , con  $H_0$  en lugar de  $H_\mu^\pm$ .

Luego, por (ii) de la Proposición 5.2.1, tenemos que calcular para  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$(5.2.11) \quad \text{tr } \gamma|_{H_\mu^\pm} = \frac{1}{\text{vol}(T_\Lambda)} \sum_{u \in \Lambda_{\varepsilon, \mu}^*} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \sum_{k=1}^{d_\rho} \langle \gamma \cdot f_{u,j,k}^\pm, f_{u,j,k}^\pm \rangle.$$

Recordemos, de (5.1.1), que  $\gamma \in \Gamma$  actúa en secciones  $\psi(x) = (x, f(x))$  via  $\gamma \cdot \psi(x) = (\gamma x, (L \circ \varepsilon \otimes \rho)(\gamma) f(x))$ . Luego hay una acción de  $\gamma$  en  $f$  dada por

$$\gamma \cdot f(x) = (L \circ \varepsilon \otimes \rho)(\gamma) f(\gamma^{-1} x).$$

Como  $\gamma^{-1} = L_{-b} B^{-1}$ , por (5.2.1) tenemos:

$$(5.2.12) \quad \gamma \cdot f_{u,j,k}^\pm(x) = e^{-2\pi i u \cdot b} e^{2\pi i B u \cdot x} L(\varepsilon(\gamma)) w_j^\pm \otimes \rho(\gamma) v_k.$$

Sea

$$\gamma_{u,j,k}^\pm := \langle \gamma \cdot f_{u,j,k}^\pm, f_{u,j,k}^\pm \rangle = \int_{T_\Lambda} \langle \gamma \cdot f_{u,j,k}^\pm(x), f_{u,j,k}^\pm(x) \rangle dx.$$

Ahora, usando (5.2.12) calculamos:

$$\begin{aligned} \gamma_{u,j,k}^\pm &= e^{-2\pi i u \cdot b} \int_{T_\Lambda} \langle f_{Bu}(x) L(\varepsilon(\gamma)) w_j^\pm \otimes \rho(\gamma) v_k, f_u(x) w_j^\pm \otimes v_k \rangle dx \\ &= e^{-2\pi i u \cdot b} \langle L(\varepsilon(\gamma)) w_j^\pm \otimes \rho(\gamma) v_k, w_j^\pm \otimes v_k \rangle \int_{T_\Lambda} e^{2\pi i (Bu - u) \cdot x} dx \\ &= e^{-2\pi i u \cdot b} \langle L(\varepsilon(\gamma)) w_j^\pm \otimes \rho(\gamma) v_k, w_j^\pm \otimes v_k \rangle \text{vol}(T_\Lambda) \delta_{Bu, u}. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que

$$\text{tr } p_\mu^\pm = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Lambda \backslash \Gamma} \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B} \sum_{k=1}^{d_\rho} \langle \rho(\gamma) v_k, v_k \rangle \sum_{j=1}^{2^{m-1}} e^{-2\pi i u \cdot b} \langle L(\varepsilon(\gamma)) w_j^\pm, w_j^\pm \rangle.$$

Ahora, si  $\gamma = BL_b \in \Gamma$  y  $u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B$ , entonces  $\varepsilon(\gamma) \in \text{Spin}(n-1, u)$  (ver (2.2.5)). Por lo tanto  $L(\varepsilon(\gamma))$  preserva los autoespacios  $S_u^\pm$  de  $L(u) \otimes Id$

y podemos considerar la traza de  $(L \circ \varepsilon \otimes \rho)(\gamma)$  restringida a  $S_u^\pm \otimes V$ . Así, finalmente obtenemos

$$(5.2.13) \quad d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = \frac{1}{|F|} \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma} \operatorname{tr} \rho(\gamma) \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B} e^{-2\pi i u \cdot b} \operatorname{tr} L(\varepsilon(\gamma))|_{S_u^\pm}.$$

El próximo objetivo será calcular las trazas  $\operatorname{tr} L(\varepsilon(\gamma))|_{S_u^\pm}$ , mostrando que se pueden expresar como valores de caracteres de representaciones spin. La influencia de  $u$  sólo aparecerá en la determinación del signo. Usaremos las nociones introducidas en la Definición 5.2.3.

Primero notamos que

$$\operatorname{tr} L(\varepsilon(\gamma))|_{S_u^\pm} = \operatorname{tr} L(h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1})|_{S_{e_n}^\pm}.$$

Ahora, usamos el Lema 2.2.6 junto con la Definición 5.2.3. Si  $n$  es impar y  $h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1} \sim x_\gamma$  entonces  $\operatorname{tr} L(h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1})|_{S_{e_n}^\pm} = \operatorname{tr} L_{n-1}^\pm(x_\gamma)$ . Además, si  $h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1} \not\sim x_\gamma$ , entonces  $h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1} \sim -e_1 x_\gamma e_1$ , por lo tanto

$$\operatorname{tr} L(h_u \varepsilon(\gamma) h_u^{-1})|_{S_{e_n}^\pm} = \operatorname{tr} L_{n-1}^\pm(-e_1 x_\gamma e_1) = \operatorname{tr} L_{n-1}^\mp(x_\gamma)$$

pues  $L(e_1)$  manda  $S^\pm$  en  $S^\mp$  ortogonalmente. Para  $n$  par procedemos similarmente. Luego obtenemos:

$$(5.2.14) \quad \operatorname{tr} L(\varepsilon(\gamma))|_{S_u^\pm} = \begin{cases} \operatorname{tr} L_{n-1}(x_\gamma) = \chi_{L_{n-1}}(x_\gamma) & n \text{ par} \\ \operatorname{tr} L_{n-1}^{\pm\sigma(u, x_\gamma)}(x_\gamma) = \chi_{L_{n-1}^{\pm\sigma(u, x_\gamma)}}(x_\gamma) & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Sustituyendo (5.2.14) en (5.2.13) llegamos a que  $d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon)$  es igual a

$$\frac{1}{|F|} \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma} \chi_\rho(\gamma) \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B} e^{-2\pi i u \cdot b} \begin{cases} \chi_{L_{n-1}}(x_\gamma) & n \text{ par} \\ \chi_{L_{n-1}^{\pm\sigma(u, x_\gamma)}}(x_\gamma) & n \text{ impar} \end{cases}$$

como se afirma en la fórmula (5.2.8) para  $n$  par. Si  $n$  es impar, entonces, separando las contribuciones de los elementos  $\gamma = BL_b$  con  $B \in F_1$  de aquellos con  $B \notin F_1$  (ver Observación 5.2.4), llegamos a la fórmula (5.2.9).

En el caso en que  $\mu = 0$  podemos proceder de manera similar. Si identificamos  $w \otimes v \in S \otimes V$  con la función constante  $f_{0, w \otimes v}$ , entonces para  $\gamma \in \Gamma$  tenemos

$$\operatorname{tr} \gamma|_{H_0} = \frac{1}{\operatorname{vol}(T_\Lambda)} \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{k=1}^{d_\rho} \langle \gamma \cdot w_j \otimes v_k, w_j \otimes v_k \rangle = \chi_\rho(\gamma) \chi_{L_n}(\varepsilon(\gamma)).$$

Luego

$$\dim(H_0^\Gamma) = \frac{1}{|F|} \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma} \operatorname{tr} \gamma|_{H_0} = \frac{1}{|F|} \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma} \chi_\rho(\gamma) \chi_{L_n}(\varepsilon(\gamma))$$

como se afirmaba. Con respecto a la última igualdad del teorema,

$$H_0 = \{f_{0, w \otimes v} : (L \circ \varepsilon \otimes \rho)(\gamma)w \otimes v = w \otimes v\} \simeq (S \otimes V)^F,$$

pues  $F \simeq \Lambda \setminus \Gamma$  y  $\Lambda$  actúa trivialmente para  $\varepsilon$  de tipo trivial.  $\square$

OBSERVACIÓN 5.2.6. En ejemplos específicos, las expresiones para las multiplicidades de los autovalores en el teorema se pueden hacer un poco más explícitas sustituyendo  $\chi_{L_{n-1}}(x_\gamma)$ ,  $\chi_{L_{n-1}^\pm}(x_\gamma)$  ó  $\chi_{L_n}(\varepsilon(\gamma))$  por los valores calculados en el Lema 2.2.1 en términos de productos de cosenos y senos de  $t_j(x_\gamma)$ , donde  $x_\gamma = x(t_1(x_\gamma), \dots, t_m(x_\gamma))$  en la notación dada en (2.1.6).

OBSERVACIÓN 5.2.7. Para  $\mu > 0$ , sea

$$d_{\rho,\mu}(\Gamma, \varepsilon) := d_{\rho,\mu}^+(\Gamma, \varepsilon) + d_{\rho,\mu}^-(\Gamma, \varepsilon).$$

Notar que, como  $D_\rho^2 = -\Delta_{s,\rho}$ , entonces  $d_{\rho,\mu}(\Gamma, \varepsilon)$  es precisamente la multiplicidad del autovalor  $4\pi^2\mu^2$  de  $-\Delta_{s,\rho}$ . Luego tenemos:

$$(5.2.15) \quad d_{\rho,\mu}(\Gamma, \varepsilon) = \frac{\alpha(n)}{|F|} \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma} \chi_\rho(\gamma) e_{\mu,\gamma}(\delta_\varepsilon) \chi_{L_{n-1}}(x_\gamma)$$

donde  $\alpha(n) = 1$  ó  $2$  dependiendo si  $n$  es impar o par respectivamente. Es claro que isospectralidad con respecto al operador de Dirac implica isospectralidad con respecto al Laplaciano spinorial, pero veremos que la recíproca no es cierta (ver Ejemplo 7.2.2).

### 5.3. Asimetría espectral. La serie eta y el invariante eta.

Podemos descomponer el espectro de la forma  $Spec_D(M_\Gamma, \varepsilon) = \mathcal{S} \dot{\cup} \mathcal{A}$  donde  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{A}$  son las componentes *simétrica* y *asimétrica* del espectro, respectivamente. Esto es, si  $\lambda = 2\pi\mu$  entonces  $\lambda \in \mathcal{S}$  si y sólo si

$$d_{\rho,\mu}^+(\Gamma, \varepsilon) = d_{\rho,\mu}^-(\Gamma, \varepsilon).$$

Si  $n$  es impar y  $0$  es un autovalor, incluimos  $0 \in \mathcal{S}$  por definición. Decimos que  $Spec_D(M_\Gamma, \varepsilon)$  es *simétrico* si  $\mathcal{A} = \emptyset$ . Cuando este es el caso, el espectro positivo  $Spec_D^+(M_\Gamma, \varepsilon) = \{\lambda \in Spec_D(M_\Gamma, \varepsilon) : \lambda > 0\}$  y  $H_0$  determinan todo el espectro  $Spec_D(M_\Gamma, \varepsilon)$ . La simetría del espectro del operador de Dirac  $D_\rho$  depende de  $\Gamma$  y de la estructura spin  $\varepsilon$  de  $M_\Gamma$ , pero no necesariamente de  $\rho$ .

Como corolario del Teorema 5.2.5 tenemos el siguiente resultado que dice que si todos los elementos del grupo de holonomía de una variedad plana tienen autovalor  $1$  con multiplicidad mayor que  $1$  entonces el espectro del operador de Dirac,  $D_\rho$ , es simétrico. En particular, esto siempre pasa si la dimensión es par.

PROPOSICIÓN 5.3.1. *Sea  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  una variedad compacta plana spin de dimensión  $n$ . Si  $n$  es par, o si  $n$  es impar y  $n_B > 1$  para todo  $\gamma = BL_b \in \Gamma$  (i.e.,  $F_1(\Gamma) = \emptyset$ ), entonces el espectro del operador de Dirac  $D_\rho$  es simétrico.*

DEMOSTRACIÓN. Si  $n$  es par, la afirmación es automática por (5.2.8). Si  $n$  es impar, por (5.2.9) y (2.2.2) vemos que  $d_{\rho,\mu}^+(\Gamma, \varepsilon) - d_{\rho,\mu}^-(\Gamma, \varepsilon)$  es igual a

$$(5.3.1) \quad \frac{(2i)^m}{|F|} \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma} \chi_\rho(\gamma) e_{\mu,\gamma}(\delta_\varepsilon) \prod_{j=1}^m \sin t_j(x_\gamma)$$

donde  $x_\gamma = x(t_1(x_\gamma), \dots, t_m(x_\gamma))$ , en la notación de (2.1.6). Es claro que  $\gamma$  satisface  $n_B > 1$  si y sólo si  $t_k(x_\gamma) \in \pi\mathbb{Z}$ , para algún  $k$ , luego en este caso  $\prod_{j=1}^m \sin t_j(x_\gamma) = 0$ . Así, si  $n_B > 1$  para todo  $\gamma$ , (5.3.1) implica que el espectro del operador de Dirac es simétrico.  $\square$

*Serie eta.* Nuestro próximo objetivo será derivar una expresión para la serie eta asociada a  $D_\rho$ ,  $\eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(s)$ , de una variedad compacta plana arbitraria  $M_\Gamma$  con estructura spin  $\varepsilon$ . La serie eta fue introducida por Atiyah-Patodi-Singer en [APS] como una medida de la asimetría espectral (ver Introducción).

Consideremos

$$(5.3.2) \quad \sum_{\substack{\lambda \in \text{Spec}_D(M_\Gamma, \varepsilon) \\ \lambda \neq 0}} \text{sgn}(\lambda) |\lambda|^{-s} = \frac{1}{(2\pi)^s} \sum_{\mu \in \frac{1}{2\pi}\mathcal{A}} \frac{d_{\rho, \mu}^+(\Gamma, \varepsilon) - d_{\rho, \mu}^-(\Gamma, \varepsilon)}{|\mu|^s}.$$

Se sabe que esta serie converge absolutamente para  $\text{Re}(s) > n = \dim(M_\Gamma)$  y define una función holomorfa  $\eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(s)$  en ese semiplano, que tiene continuación analítica a todo  $\mathbb{C}$  con posibles polos simples en  $\{n - k : k \in \mathbb{N}_0\}$  y que resulta holomorfa en  $s = 0$ . Estos hechos son bastante delicados y están probados en un contexto mucho más general (operadores pseudo-diferenciales de orden  $m \in \mathbb{R}$ ) en tres trabajos [APS, 2, 3] en el caso  $n$  impar, y en [Gi2] para el caso  $n$  par. Ambos casos se encuentran tratados simultáneamente en [Wod]. Luego, se define el *invariante eta* de  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  con respecto a  $D_\rho$  por

$$(5.3.3) \quad \eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)} := \eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(0).$$

Por la Proposición 5.3.1,  $\eta(s) \equiv 0$  si  $n = 2m$  o si  $n = 2m + 1$  y  $F_1 = \emptyset$ . En general, se sabe que si  $n \not\equiv 3 \pmod{4}$  entonces  $\eta(s) \equiv 0$  para toda variedad Riemanniana  $M$ . A menudo escribiremos  $\eta(s)$  y  $\eta$  en lugar de  $\eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(s)$  y  $\eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}$ , para simplificar la notación.

Como consecuencia del cálculo explícito de las multiplicidades (Teorema 5.2.5) y de los caracteres de las representaciones spinoriales (Lema 2.2.1) se puede dar la siguiente expresión para la serie eta de una variedad compacta plana spin arbitraria.

**PROPOSICIÓN 5.3.2.** *Sea  $\Gamma$  un grupo de Bieberbach de dimensión impar  $n = 2m + 1 = 4r + 3$  con grupo de holonomía  $F$  y sea  $\varepsilon$  una estructura spin en  $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ . Entonces la serie eta de  $M_\Gamma$  con respecto a  $D_\rho$  está dada por*

$$(5.3.4) \quad \eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(s) = \frac{(2i)^m}{|F|(2\pi)^s} \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma \\ B \in F_1}} \chi_\rho(\gamma) \prod_{j=1}^m \sin t_j(x_\gamma) \sum_{\mu \in \frac{1}{2\pi}\mathcal{A}} \frac{e_{\mu, \gamma, \sigma}(\delta_\varepsilon)}{|\mu|^s}$$

donde  $e_{\mu, \gamma, \sigma}(\delta_\varepsilon) = \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)_B} \sigma(u, x_\gamma) e^{-2\pi i u \cdot b}$  como en (5.2.7) y, en la notación de (2.1.6),  $x_\gamma = x(t_1(x_\gamma), \dots, t_m(x_\gamma))$ .

DEMOSTRACIÓN. Por (5.2.9) y la Proposición 5.3.1,  $d_{\rho,\mu}^+(\Gamma, \varepsilon) - d_{\rho,\mu}^-(\Gamma, \varepsilon)$  es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|F|} \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma \\ B \in F_1}} \chi_\rho(\gamma) \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon,\mu}^*)^B} e^{-2\pi i u \cdot b} (\chi_{L_{n-1}^{\sigma(u, x_\gamma)}} - \chi_{L_{n-1}^{-\sigma(u, x_\gamma)}})(x_\gamma) \\ &= \frac{1}{|F|} \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma \\ B \in F_1}} \chi_\rho(\gamma) \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon,\mu}^*)^B} e^{-2\pi i u \cdot b} \sigma(u, x_\gamma) (\chi_{L_{n-1}^+} - \chi_{L_{n-1}^-})(x_\gamma). \end{aligned}$$

Ahora, usando (2.2.2) tenemos

$$d_{\rho,\mu}^+(\Gamma, \varepsilon) - d_{\rho,\mu}^-(\Gamma, \varepsilon) = \frac{(2i)^m}{|F|} \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma \\ B \in F_1}} \chi_\rho(\gamma) e_{\mu,\gamma,\sigma}(\delta_\varepsilon) \prod_{j=1}^m \sin t_j(x_\gamma).$$

Sustituyendo esta última expresión en (5.3.2) la proposición sigue.  $\square$

OBSERVACIÓN 5.3.3. Sea  $g \in \text{Spin}(n)$ . Si  $n$  es par,

$$\chi_{L_n^+}(g) - \chi_{L_n^-}(g) = \text{Str } L_n(g)$$

es la *supertraza* de  $L_n(g)$ . Según la Proposición 3.23 en [BGV], tenemos la expresión:

$$\text{Str } L_n(g) = i^{-n/2} \text{sgn}(g) |\det(\text{Id}_{n-1} - \mu(g))|^{1/2}$$

donde  $\text{sgn}(g) \in \{\pm 1\}$  es un signo que está definido en [BGV] justo antes de la Proposición 3.23 y  $\mu$  es el cubrimiento (2.1.5). Luego tenemos una expresión alternativa para la serie  $\eta_{(\Gamma,\rho,\varepsilon)}(s)$  en términos de determinantes dada por:

$$\frac{-(2i)^m}{|F|(2\pi)^s} \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma \\ B \in F_1}} \text{sgn}(x_\gamma) \chi_\rho(\gamma) \sqrt{|\det(\text{Id}_{n-1} - \mu(x_\gamma))|} \sum_{\mu \in \frac{1}{2\pi} \mathcal{A}} \frac{e_{\mu,\gamma,\sigma}(\delta_\varepsilon)}{|\mu|^s}.$$

Aquí, como  $x_\gamma \in \text{Spin}(n-1)$  tenemos que  $\mu(x_\gamma) \in \text{SO}(n-1)$  y por (2.1.12) se tiene  $\mu(x_\gamma) = x_0(2t_1(x_\gamma), \dots, 2t_m(x_\gamma))$ .

OBSERVACIÓN 5.3.4. En la Proposición 6.2.1 daremos una expresión bien explícita de la serie  $\eta(s)$  y calcularemos el invariante  $\eta$  para cualquier  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedad spin. Mostraremos que una variedad  $M_\Gamma$  de este tipo puede tener  $\eta = 0$  ó  $\eta \neq 0$ , dependiendo de la estructura spin.

### Apéndice: Relación con el Teorema del Índice

Sea  $M$  una variedad con borde  $\partial M = N$ . Toda estructura spin  $\varepsilon$  de  $M$  induce una estructura spin  $\varepsilon_N$  en  $N$  (ver [LM]). Siguiendo a [APS], se

puede considerar el operador de Dirac en  $M$ ,  $D_M$ , bajo ciertas condiciones globales de borde. Luego el índice de  $D_M$  está dado por

$$\text{Ind}(D_M) = \hat{A}(M) - \frac{d_0 + \eta_N}{2}$$

donde  $\hat{A}(M) = \int_M \hat{A}(p)$  es el invariante llamado  $\hat{A}$ -genus de  $M$  (aquí,  $\hat{A}(p)$  es el  $\hat{A}$ -polinomio de Hirzebruch en las formas de Pontrjagin  $p_i$ ),  $\eta_N$  es el invariante eta asociado al operador de Dirac restringido a  $N$ ,  $D_N$ , y  $d_0 = \dim \ker D_N$  (ver [APS, Thm. 4.2]). Por este motivo, algunos autores usan  $\frac{1}{2}(d_0 + \eta(0))$  en lugar de  $\eta(0)$  como la definición del invariante  $\eta$  para  $(M, \varepsilon)$ .

Se sabe que si  $M$  es una variedad compacta spin de dimensión  $n$  par entonces  $\hat{A}(M) \in \mathbb{Z}$  y si  $n = 4k$  entonces  $\hat{A}(M) \in 2\mathbb{Z}$ . Por otra parte, toda variedad compacta plana es borde de alguna variedad compacta ([HR]). Entonces aplicando el teorema del índice podemos deducir el siguiente resultado

**PROPOSICIÓN 5.3.5.** *Sea  $(M_\Gamma, \varepsilon_\Gamma)$  una variedad compacta plana spin de dimensión  $n = 4r + 3$ . Si alguna variedad compacta  $M$  tal que  $\partial M = M_\Gamma$  admite una estructura spin  $\varepsilon$  tal que la estructura spin inducida en  $M_\Gamma$ ,  $\varepsilon_{M_\Gamma}$ , coincide con la estructura spin de  $M_\Gamma$ ,  $\varepsilon_\Gamma$ , entonces  $\eta + d_0$  es par, es decir*

$$\varepsilon_{M_\Gamma} = \varepsilon_\Gamma \quad \implies \quad \eta + d_0 \in 2\mathbb{Z}.$$

En muchos casos, por ejemplo para las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades (ver Teorema 6.1.2), si  $\eta \neq 0$  entonces  $d_0 = 0$ , luego la conclusión de la proposición es que  $\eta \in 2\mathbb{Z}$  (ver Proposición 6.2.1). Comparar también con los resultados del Capítulo 8 para  $\mathbb{Z}_p$ -variedades,  $p$  primo, y del Capítulo 9 para  $\mathbb{Z}_4$ -variedades.

Sea  $M_\Gamma$  la única  $\mathbb{Z}_3$ -variedad de dimensión 3 (tricosm). Esta variedad tiene dos estructuras spin  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  y se tiene que  $\eta_{\varepsilon_1} = -\frac{2}{3}$  y  $\eta_{\varepsilon_2} = \frac{4}{3}$  (ver Ejemplo 8.2.5). Por la proposición, como  $d_0 \in \mathbb{Z}$ , si  $M$  es una variedad compacta con borde  $\partial M = M_\Gamma$ , o bien  $M$  no es spin o bien  $M$  es spin pero ninguna estructura spin  $\varepsilon$  de  $M$  es compatible con la de  $M_\Gamma$ , esto es  $\varepsilon_{M_\Gamma} \neq \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ .

**OBSERVACIÓN 5.3.6.** Sea  $N = \partial M$ . No es cierto que toda estructura spin en  $N$  induce una estructura spin en  $M$ . Por ejemplo,  $\mathbb{S}^1 = \partial D^2$  tiene dos estructuras spin, pero  $D^2$  tiene una sola.





## CAPÍTULO 6

### Espectro de Dirac en $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades

En este capítulo estudiaremos el operador de Dirac con más detalle en el caso particular de las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades, una clase muy rica de variedades planas. El grupo de holonomía  $F$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2^k$ , pero la acción de holonomía no es diagonal en general. Aún en el caso en que  $k = 2$  se sabe que hay infinitas representaciones de holonomía indescomponibles y que dan lugar a (al menos) un grupo de Bieberbach (ver [BGR]). Para  $k \geq 3$  no se conoce una clasificación. En dimensión  $n$ , el caso  $k = n - 1$  corresponde a las llamadas variedades de Hantzsche-Wendt generalizadas, estudiadas en [MR] y [RS]. Esta clase, que consiste sólo de variedades de tipo diagonal, es todavía muy grande y será usada en el capítulo 7 para construir familias enormes de variedades Dirac-isospectrales no homeomorfas de a pares.

Si  $\Gamma$  tiene grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2^k$ , entonces  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k, \Lambda \rangle$  donde  $\gamma_i = B_i L_{b_i}$ ,  $B_i \in O(n)$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_i \Lambda = \Lambda$ ,  $B_i^2 = Id$  y  $B_i B_j = B_j B_i$ , para cada  $1 \leq i, j \leq k$ . Veremos que, algo sorprendentemente, las fórmulas de multiplicidades para estas variedades en el Teorema 5.2.5 toman formas extremadamente simples (ver (6.1.4) y (6.1.5)). Esto permitirá exhibir, en un capítulo posterior, conjuntos de variedades Dirac-isospectrales muy grandes. También, caracterizaremos todas las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades spin con espectro de Dirac asimétrico y obtendremos expresiones bien explícitas para la serie eta  $\eta(s)$  y el invariante  $\eta$ .

#### 6.1. Espectro de Dirac y spinores armónicos.

Sea  $F_1$  como en (1.1.6). En el caso de las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades,  $F_1$  es el conjunto de los  $B \in O(n) \cap r(\Gamma)$  tales que  $B$  es conjugado en  $O(n)$  a la matriz diagonal  $diag(-1, \dots, -1, 1)$ . El próximo lema será muy útil en la prueba del Teorema 6.1.2.

**LEMA 6.1.1.** *Si  $\Gamma$  es un grupo de Bieberbach con retículo de traslaciones  $\Lambda$  y grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2^k$  entonces los elementos en  $F_1$  pueden ser simultáneamente diagonalizados en  $\Lambda$ , esto es, existe una base  $f_1, \dots, f_n$  de  $\Lambda$  tal que  $Bf_j = \pm f_j$ , con  $1 \leq j \leq n$ , para cada  $BL_b \in \Gamma$  con  $n_B = 1$ . Más aún,  $\Gamma$  puede ser conjugado por algún  $L_\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^n$ , a un grupo  $\Gamma'$  tal que  $2b \in \Lambda$  para cada  $BL_b \in \Gamma'$  con  $n_B = 1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $BL_b \in \Gamma$  con  $n_B = 1$ . Luego  $B\Lambda = \Lambda$  y es un hecho bien conocido que  $\Lambda$  se descompone, con respecto a la acción de  $B$ , como  $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$  donde  $\Lambda_1$  (resp.  $\Lambda_2$ ) es una suma directa de subrepresentaciones

enteras de rango 1 (resp. 2). Aquí,  $B$  actúa diagonalmente en  $\Lambda_1$  mientras que  $\Lambda_2$  es una suma directa de subgrupos en los que  $B$  actúa por  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Ahora, no es difícil verificar que como  $\Gamma$  es Bieberbach, entonces la proyección  $2b^+ \in \Lambda$  de  $2b$  sobre  $(\mathbb{R}^n)^B$  no puede estar en  $\Lambda_2$ , de otro modo algún elemento de la forma  $BL_{b+\lambda}$ , con  $\lambda \in \Lambda$ , sería de orden finito (ver [DM], Prop. 2.1). Luego, la multiplicidad del autovalor 1 para  $B$  es por lo menos 1 en  $\Lambda_1$ . Si además  $\Lambda_2 \neq 0$ , entonces ésta sería por lo menos 1 en  $\Lambda_2$ , por lo tanto  $n_B \geq 2$ , lo cual es imposible pues  $B \in F_1$ . Luego  $\Lambda_2 = 0$  para todo  $B \in F_1$ , y por lo tanto cada  $B$  así puede ser diagonalizada en una base de  $\Lambda$  (Ver Lemma 3.3 en [RS] para una prueba diferente).

Falta mostrar que esto puede ser hecho simultáneamente en  $\Lambda$  para todos los elementos en  $F_1$ . Para ver esto, enumeramos los elementos en  $F_1$ :  $B_1, \dots, B_r$ . Sea  $f_1, \dots, f_n$  una base de  $\Lambda$  que diagonaliza a  $B_r$ . Reordenando, podemos asumir que  $B_r f_n = f_n$  y  $B_r f_j = -f_j$  para  $1 \leq j \leq n-1$ . Claramente  $f_n$  es ortogonal a  $f_j$  para  $j < n$ . Ahora, para  $i = 1, \dots, r-1$ ,  $B_i f_n = \pm f_n$  pues  $B_i$  conmuta con  $B_r$ , y en verdad se tiene  $B_i f_n = -f_n$ , pues de otro modo tendríamos que  $B_i = B_r$ , puesto que  $B_i \in F_1$ . Ahora, las matrices  $B_1, \dots, B_{r-1} \in F_1$  y dejan invariante a  $\Lambda' := \mathbb{Z}\text{-span}\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ . Así, por inducción,  $B_1, \dots, B_{r-1}$  pueden ser diagonalizadas simultáneamente en alguna  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda'$ . Juntando esta base con  $f_n$  obtenemos una base de  $\Lambda$  que diagonaliza a  $B_1, \dots, B_r$ . La prueba de la segunda afirmación sigue de la misma manera que en el Lemma 1.4 en [MR4].  $\square$

Veremos que para una  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedad spin, sólo el elemento identidad,  $Id$ , y a lo sumo un elemento  $BL_b \in \Gamma$  con  $n_B = 1$ , contribuirán a las fórmulas de multiplicidades de manera no nula.

Observar que dado  $\gamma = BL_b \in \Gamma \setminus \Lambda$ , como  $B^2 = Id$ , entonces  $B$  es conjugada en  $SO(n)$  a una matriz diagonal de la forma

$$\text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{2h}, 1, \dots, 1)$$

con  $1 \leq h \leq m$  donde  $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , por lo tanto  $\varepsilon(\gamma)$  es conjugada en  $\text{Spin}(n)$  a  $\pm g_h$  para algún  $1 \leq h \leq m$ , donde

$$(6.1.1) \quad g_h := e_1 \cdots e_{2h} \in \text{Spin}(n).$$

Más aún, si  $n = 2m$  entonces  $h < m$ , pues  $B = -Id$  no puede ocurrir para  $BL_b \in \Gamma$ , ya que  $\Gamma$  es sin torsión. Luego, resulta que  $g_h \in \text{Spin}(n-1)$  y como  $g_h$  y  $-g_h$  son conjugados (ver Corolario 2.2.4), entonces podemos tomar  $x_\gamma$  en la Definición 5.2.3 igual a  $g_h$ , con  $h$  que depende de  $\gamma$ . De ahora en adelante en este capítulo asumiremos que

$$x_\gamma = g_h.$$

Necesitaremos el hecho que (ver Lema 2.2.1), si  $n = 2m$ , entonces

$$(6.1.2) \quad \chi_{L_n^\pm}(g_h) = \begin{cases} \pm 2^{m-1} i^m & h = m \\ 0 & 1 \leq h < m \end{cases}$$

y además, para un  $n$  arbitrario se tiene

$$(6.1.3) \quad \chi_{L_n}(g_h) = 0 \quad \text{para cada } 1 \leq h \leq m.$$

Estamos ahora en condiciones de enunciar y probar el resultado principal del presente capítulo.

**TEOREMA 6.1.2.** *Sea  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  una  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedad spin de dimensión  $n$ , y sea  $F_1$  como en (1.1.6).*

(i) *Si  $F_1 = \emptyset$ , entonces  $\text{Spec}_{D_\rho}(M_\Gamma, \varepsilon)$  es simétrico y las multiplicidades de los autovalores  $\pm 2\pi\mu$ ,  $\mu > 0$ , de  $D_\rho$  están dados por:*

$$(6.1.4) \quad d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = 2^{m-k-1} d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*|.$$

(ii) *Si  $F_1 \neq \emptyset$  entonces  $\text{Spec}_{D_\rho}(M_\Gamma, \varepsilon)$  es asimétrico si y sólo si se cumple que:  $n = 4r + 3$  y existe  $\gamma = BL_b \in \Gamma$ , con  $n_B = 1$  y  $\chi_\rho(\gamma) \neq 0$ , tal que  $B|_\Lambda = -\delta_\varepsilon \text{Id}$ . En este caso, el espectro asimétrico es el conjunto de autovalores*

$$\mathcal{A} = \text{Spec}_{D_\rho}^A(M_\Gamma, \varepsilon) = \{\pm 2\pi\mu_j : \mu_j = (j + \frac{1}{2})\|f\|^{-1}, j \in \mathbb{N}_0\}$$

donde  $\Lambda^B = \mathbb{Z}f$ . Si ponemos  $\sigma_\gamma := \sigma((f \cdot 2b)f, g_m)$  tenemos:

$$(6.1.5) \quad d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = \begin{cases} 2^{m-k-1} (d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*| \pm 2\sigma_\gamma(-1)^{r+j} \chi_\rho(\gamma)) & \mu = \mu_j, \\ 2^{m-k-1} d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*| & \mu \neq \mu_j. \end{cases}$$

El signo  $\sigma_\gamma$  en (6.1.5) no depende de la elección de  $\pm f$  como  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda^B$ .

Si  $\text{Spec}_{D_\rho}(M_\Gamma, \varepsilon)$  es simétrico entonces  $d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon)$  está dada por (6.1.4).

(iii) *El número de spinores armónicos independientes está dado por*

$$d_{\rho, 0}(\Gamma, \varepsilon) = \begin{cases} 2^{m-k} d_\rho & \text{si } \varepsilon|_\Lambda = 1 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Si  $k > m$  entonces  $M_\Gamma$  no posee estructuras spin de tipo trivial y por lo tanto  $M_\Gamma$  no tiene spinores armónicos. Más aún, si  $M_\Gamma$  tiene exactamente  $2^m d_\rho$  spinores armónicos entonces  $M_\Gamma = T_\Lambda$  y  $\varepsilon = 1$ .

*Nota 1.* Observar que el teorema dice que si el espectro de  $M$  es asimétrico entonces  $M$  no tiene spinores armónicos no nulos ( $\mathcal{A} \neq \emptyset \Rightarrow d_0 = 0$ ).

*Nota 2.* (iii) del Teorema generaliza un resultado de Pfäffle ([Pf, Thm. 6.2]).

**DEMOSTRACIÓN.** Primero notamos que la contribución de  $\text{Id} \in F$  a las fórmulas de multiplicidades (5.2.8) y (5.2.9) es

$$2^{m-k-1} d_\rho e_{\mu, \text{Id}}(\delta_\varepsilon) = 2^{m-k-1} d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*|.$$

Luego, cuando ningún elemento en  $F$  distinto de  $\text{Id}$  contribuye de manera no nula entonces vale (6.1.4).

Si  $F_1 = \emptyset$ , entonces, para cada  $\gamma = BL_b \in \Gamma \setminus \Lambda$ , tenemos  $\varepsilon(\gamma) \sim g_h$  con  $h < m$ . Luego, como  $x_\gamma = g_h$  tenemos  $\chi_{L_n}(\varepsilon(\gamma)) = \chi_{L_n}(g_h) = 0$  si  $n$  es impar y  $\chi_{L_n}^\pm(\varepsilon(\gamma)) = \chi_{L_n}^\pm(g_h) = 0$  si  $n$  es par, para cada  $\gamma \in \Gamma \setminus \Lambda$ . Luego, en este caso, sólo  $\text{Id} \in F$  contribuye a (5.2.8) y (5.2.9) y por lo tanto

vale (i). Esto implica que, salvo  $Id$ , sólo los elementos en  $F_1$  pueden dar una contribución no nula a las multiplicidades y además, esto sucede sólo si  $n$  es impar.

Ahora, asumamos que  $n = 2m + 1$  y  $F_1 \neq \emptyset$ . Si  $\gamma = BL_b \in \Gamma \setminus \Lambda$ , con  $n_B = 1$  (luego  $x_\gamma = g_m$ ), sabemos por Lema 6.1.1 que existe una base  $f_1, \dots, f_n$  de  $\Lambda$  tal que  $B$  es diagonal en esta base. Reordenando los elementos de la base, podemos suponer que

$$(6.1.6) \quad Bf_j = -f_j \quad (1 \leq j < n), \quad Bf_n = f_n, \quad b \equiv \frac{1}{2}f_n \pmod{\Lambda}.$$

Sea  $f'_1, \dots, f'_n \in \Lambda^*$  la base dual de  $f_1, \dots, f_n$ . Es claro que también se tiene  $Bf'_j = -f'_j$  para  $1 \leq j < n$  y  $f'_n = \frac{f_n}{\|f_n\|^2}$ , luego  $Bf'_n = f'_n$ .

Tenemos  $\Lambda_\varepsilon^* = \Lambda^* + u_\varepsilon$ , con  $u_\varepsilon = \sum_j c_j f'_j$  y  $c_j \in \{0, \frac{1}{2}\}$  para cada  $j$ . Si la contribución de  $B$  a (5.2.9) es no trivial, entonces  $(\Lambda_\varepsilon^*)^B \neq \emptyset$ . Luego, existe  $u = \lambda' + u_\varepsilon$  con  $\lambda' = \sum_j d_j f'_j$ ,  $d_j \in \mathbb{Z}$  tal que  $Bu = u$ . Esto dice que para  $1 \leq j \leq n-1$ , tenemos  $c_j + d_j = -c_j - d_j$  y por lo tanto  $c_j = 0$  para  $1 \leq j \leq n-1$ . Por otra parte,  $c_n$  es igual a 0 ó  $\frac{1}{2}$ , esto es,

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{ó} \quad u_\varepsilon = \frac{1}{2}f'_n.$$

Si  $u_\varepsilon = 0$  tenemos  $\Lambda_\varepsilon^* = \Lambda^*$  y luego  $e^{2\pi i u \cdot b} = e^{-2\pi i u \cdot b}$  para cada  $u \in \Lambda^*$ , pues  $b \in \frac{1}{2}\Lambda$ , por Lema 6.1.1. Afirmamos que

$$\sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B} e^{-2\pi i u \cdot b} \chi_{L_{n-1}^{\pm \sigma(u, g_m)}}(g_m) = 0.$$

En efecto, juntando las contribuciones de  $u$  y  $-u$  en la expresión de arriba, por la Observación 5.2.4 y (6.1.3) obtenemos

$$e^{-2\pi i u \cdot b} \left( \chi_{L_{n-1}^{\pm \sigma(u, g_m)}} + \chi_{L_{n-1}^{\pm \sigma(-u, g_m)}} \right)(g_m) = e^{-2\pi i u \cdot b} \sigma(u, g_m) \chi_{L_{n-1}}(g_m) = 0.$$

Luego, concluimos que si  $u_\varepsilon = 0$ , la contribución de  $\gamma = BL_b \in \Gamma \setminus \Lambda$  a (5.2.9) es cero.

Consideremos ahora el caso  $u_\varepsilon = \frac{1}{2}f'_n$ , esto es,  $(\Lambda_\varepsilon^*)^B = (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})f'_n$ . Luego, como  $\varepsilon(L_\lambda) = \delta_\varepsilon(\lambda) = e^{2\pi i u_\varepsilon \cdot \lambda}$ , entonces

$$(6.1.7) \quad \varepsilon(L_{f_j}) = 1 \quad (1 \leq j \leq n-1) \quad \text{y} \quad \varepsilon(L_{f_n}) = -1.$$

Además observamos que, como

$$-1 = \varepsilon(L_{f_n}) = \varepsilon(\gamma^2) = \varepsilon(\gamma)^2 = (\pm e_1 \dots e_{2m})^2 = (-1)^m,$$

$m$  es necesariamente impar, o sea  $m = 2r + 1$  y  $n = 4r + 3$ .

Ahora (6.1.7) dice que  $\gamma = BL_b$  da una contribución no nula sólo si

$$B|_\Lambda = -\delta_\varepsilon Id.$$

Más aún, como  $(\Lambda_\varepsilon^*)^B = (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})f'_n$ , entonces, para un  $\mu > 0$  fijo,  $(\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B \neq \emptyset$  si y sólo si  $\mu = \mu_j := (j + \frac{1}{2})\|f_n\|^{-1}$  con  $j \in \mathbb{N}_0$ . Para  $\mu = \mu_j$ , tenemos que

$$(\Lambda_{\varepsilon, \mu_j}^*)^B = \{\pm u_j\}$$

donde  $u_j = (j + \frac{1}{2})f'_n$  con  $j = \|f_n\|\mu_j - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}_0$ . Otra vez, poniendo juntas las contribuciones de  $u_j$  y  $-u_j$ , obtenemos que la suma,  $\Sigma$ , sobre  $(\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^B$  en (5.2.9) es igual a

$$\begin{aligned} \Sigma &= e^{-2\pi i u_j \cdot b} \chi_{L_{n-1}^{\pm\sigma(u_j, g_m)}}(g_m) + e^{2\pi i u_j \cdot b} \chi_{L_{n-1}^{\pm\sigma(-u_j, g_m)}}(g_m) \\ &= (e^{-2\pi i u_j \cdot b} - e^{2\pi i u_j \cdot b}) \sigma(u_j, g_m) \chi_{L_{n-1}^{\pm}}(g_m) \\ &= \mp 2^m i^{m+1} \sigma(u_j, g_m) \sin(2\pi u_j \cdot b). \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\chi_{L_{n-1}^-}(g_h) = -\chi_{L_{n-1}^+}(g_h)$  por (6.1.2). Si  $\Lambda^B = \mathbb{Z}f$ , entonces se tiene que  $f = \pm f_n$ . Uno puede verificar que

$$\sigma(u_j, g_m) = \sigma((f \cdot 2b)f, g_m) = \sigma_\gamma.$$

Luego,

$$\sigma(u_j, g_m) \sin(2\pi u_j \cdot b) = \sigma_\gamma \sin(\pi(j + \frac{1}{2})) = \sigma_\gamma (-1)^j$$

puesto que  $b \equiv \frac{1}{2}f_n \pmod{\Lambda}$ .

Como  $m = 2r + 1$ , finalmente obtenemos que la contribución de  $\gamma$  a la multiplicidad del autovalor  $\pm 2\pi\mu_j$  es

$$\pm 2^{m-k} \sigma_\gamma (-1)^{r+j} \chi_\rho(\gamma).$$

Ahora, si un elemento  $\gamma' = B'L_{b'} \in F_1$  contribuye de manera no nula, es claro, argumentando como arriba, que  $B'_{|\Lambda} = -\delta_\varepsilon Id$ , por lo tanto  $B' = B$ . Como sólo  $Id$  y  $\gamma = BL_b$  dan una contribución a la fórmula de multiplicidad, esto completa la prueba de (ii).

Finalmente, la primer afirmación en (iii) del teorema sigue inmediatamente de (5.2.10) y las afirmaciones restantes son consecuencias directas de la primera.  $\square$

**OBSERVACIÓN 6.1.3.** Excepto el caso muy especial descrito en (ii) del teorema, el espectro torcido de Dirac de  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades es simétrico y las multiplicidades están dadas por la fórmula simple (6.1.4). En este caso, las multiplicidades de los autovalores de Dirac para  $M_\Gamma$  con estructura spin  $\varepsilon$  están determinados por las multiplicidades del toro de cubrimiento  $T_\Lambda$  con la estructura spin restringida  $\varepsilon|_\Lambda$ . En efecto, tenemos

$$d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = 2^{-k} d_{\rho, \mu}^\pm(\Lambda, \varepsilon|_\Lambda).$$

**OBSERVACIÓN 6.1.4.** Sean  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  y  $(M_{\Gamma'}, \varepsilon')$  dos  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades spin de igual dimensión con operadores de Dirac  $D_\rho$  y  $D_{\rho'}$ , respectivamente. Veamos que bajo ciertas condiciones muy sencillas se puede asegurar la Dirac-isospectralidad de éstas. Consideremos primero el caso de espectro simétrico. Por el Teorema 6.1.2  $M_\Gamma$  y  $M_{\Gamma'}$  son Dirac-isospectrales si y sólo si  $d_\rho|\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*| = d_{\rho'}|\Lambda_{\varepsilon', \mu}^*|$  para todo  $\mu \geq 0$ . Este es el caso, por ejemplo, si  $d_\rho = d_{\rho'}$  y  $|\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*| = |\Lambda_{\varepsilon', \mu}^*|$ . Un caso particular de esto es  $\rho = \rho'$ ,  $\Lambda = \Lambda'$  y  $|J_\varepsilon^\pm| = |J_{\varepsilon'}^\pm|$ .

Supongamos ahora que el espectro es asimétrico. Entonces  $M_\Gamma$  y  $M_{\Gamma'}$  son Dirac-isospectrales si y sólo si  $d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*| = d_{\rho'} |\Lambda_{\varepsilon', \mu}^*|$  para todo  $\mu \neq \mu_j$  y  $d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu_j}^*| \pm 2\sigma_\gamma (-1)^{r+j} \chi_\rho(\gamma) = d_{\rho'} |\Lambda_{\varepsilon', \mu_j}^*| \pm 2\sigma_{\gamma'} (-1)^{r+j} \chi_{\rho'}(\gamma')$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ . En este caso  $|J_\varepsilon^-| = 1 = |J_{\varepsilon'}^-|$ . Además, como  $\gamma$  y  $\gamma'$  son conjugados, se puede ver que  $\chi_\rho(\gamma) = \chi_{\rho'}(\gamma')$  y  $\sigma_\gamma = \sigma_{\gamma'}$ . Luego, tenemos el siguiente resultado: *Fijada la dimensión y la representación  $\rho$ , todas las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades spin  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  con espectro asimétrico cubiertas por el mismo toro de cubrimiento son  $D_\rho$ -isospectrales.*

## 6.2. La serie $\eta(s)$ y el invariante $\eta$ .

Como aplicación del Teorema 6.1.2 calcularemos las serie eta y el invariante eta para una  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedad spin arbitraria.

**PROPOSICIÓN 6.2.1.** *Sea  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  una  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedad spin de dimensión  $n = 2m+1 = 4r+3$ . Si  $\text{Spec}_{D_\rho}(M_\Gamma, \varepsilon)$  es asimétrico entonces, en la notación del Teorema 6.1.2, tenemos:*

$$(6.2.1) \quad \eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(s) = (-1)^r \sigma_\gamma \chi_\rho(\gamma) 2^{m-k+1} \frac{\|f\|^s}{(4\pi)^s} \left( \zeta(s, \frac{1}{4}) - \zeta(s, \frac{3}{4}) \right)$$

donde  $\zeta(s, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+\alpha)^s}$ , con  $\text{Re}(s) > 1$  y  $\alpha \in (0, 1]$ , denota la función zeta de Hurwitz y donde  $\sigma_\gamma \in \{\pm 1\}$  es como en (ii) del Teorema 6.1.2.

Por lo tanto,  $\eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(s)$  tiene una continuación analítica a todo  $\mathbb{C}$  que resulta holomorfa en  $s = 0$ . Más aún,

$$(6.2.2) \quad \eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(0) = (-1)^r \sigma_\gamma \chi_\rho(\gamma) 2^{m-k},$$

$$(6.2.3) \quad \eta'_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(0) = (4 \log(\Gamma(\frac{1}{4})) + \log \|f\| - 3 \log(2\pi)) \eta(0).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Usaremos el Teorema 6.1.2 en el caso especial de la estructura spin en que el espectro resulta asimétrico, de otro modo  $\eta(s) = 0$ . Tenemos

$$\eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(s) = \frac{1}{(2\pi)^s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_{\rho, \mu_j}^+(\Gamma, \varepsilon) - d_{\rho, \mu_j}^-(\Gamma, \varepsilon)}{|\mu_j|^s}.$$

Ahora, de la fórmula (6.1.5) tenemos que

$$d_{\rho, \mu_j}^+(\Gamma, \varepsilon) - d_{\rho, \mu_j}^-(\Gamma, \varepsilon) = (-1)^{r+j} \sigma_\gamma \chi_\rho(\gamma) 2^{m-k+1}.$$

Luego, si  $\text{Re}(s) > n$

$$\begin{aligned} \eta_{(\Gamma, \rho, \varepsilon)}(s) &= (-1)^r \sigma_\gamma \chi_\rho(\gamma) 2^{m-k+1} \frac{\|f\|^s}{(2\pi)^s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j + \frac{1}{2})^s} \\ &= (-1)^r \sigma_\gamma \chi_\rho(\gamma) 2^{m-k+1} \frac{\|f\|^s}{(4\pi)^s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j + \frac{1}{4})^s} - \frac{1}{(j + \frac{3}{4})^s} \\ &= (-1)^r \sigma_\gamma \chi_\rho(\gamma) 2^{m-k+1} \frac{\|f\|^s}{(4\pi)^s} \left( \zeta(s, \frac{1}{4}) - \zeta(s, \frac{3}{4}) \right) \end{aligned}$$

donde  $\zeta(s, \alpha)$  es la función zeta de Hurwitz, definida para  $Re(s) > 1$  y  $\alpha \in (0, 1]$ . Ahora  $\zeta(s, \alpha)$  se extiende a una función holomorfa a todo el plano salvo por un polo simple en  $s = 1$ , con residuo 1 (ver [WW], 13.13) luego la fórmula (6.2.1) implica que  $\eta(s)$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ .

Además, como  $\zeta(0, \alpha) = \frac{1}{2} - \alpha$ , tomando límite para  $s \rightarrow 0$  en la expresión de arriba obtenemos (6.2.2). También, derivando (6.2.1) y usando que  $\zeta'(0, a) = \log \Gamma(a) - \frac{1}{2} \log(2\pi)$  (ver [WW]) llegamos a (6.2.3).  $\square$

**OBSERVACIÓN 6.2.2.** Notar que si  $(\rho, V) = (1, \mathbb{C})$ , para las  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades spin con  $k < m$ , se tiene que  $\eta(0) \in 2\mathbb{Z}$ . En particular, el invariante eta de cualquier  $\mathbb{Z}_2$ -variedad spin es un entero par, para  $n > 3$ . En dimensión  $n = 3$ , para  $F \simeq \mathbb{Z}_2$ , la proposición da  $\eta = \sigma_\gamma$ . Tomemos  $\Gamma = \langle \gamma, L_\Lambda \rangle$  donde  $\gamma = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} L_{\frac{e_3}{2}}$  y  $\Lambda$  un retículo de  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $M_\Gamma$  tiene espectro asimétrico sólo para las dos estructuras spin  $\varepsilon_+ = (1, 1, -1; e_1 e_2)$  y  $\varepsilon_- = (1, 1, -1; -e_1 e_2)$ . Luego  $\eta_{(\Gamma, \varepsilon_+)} = 1$  mientras que  $\eta_{(\Gamma, \varepsilon_-)} = -1$  como en [Pf].

**EJEMPLO 6.2.3.** En este ejemplo respondemos negativamente a la pregunta formulada por D. Schüth: “*Se pueden oír los invariantes eta de una variedad compacta spin?*”. En efecto, mostraremos que existen pares de variedades compactas spin, que son isospectrales respecto del Laplaciano, pero cuyos invariantes eta son distintos.

Consideremos las  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedades  $M_4, M'_4$  de la Tabla 4.1 y le agregamos el carácter  $(-1, -1, 1)$  tres veces. De este modo obtenemos las variedades orientables  $M, M'$  de dimensión 7 dadas en la siguiente tabla.

	$B_1$	$L_{b_1}$	$L_{b'_1}$	$B_2$	$L_{b_2}$	$L_{b'_2}$	$B_3$	$L_{b_3}$	$L_{b'_3}$
$\{M, M'\}$	-1			-1			1		
	-1			-1			1		
	-1			-1			1		
	1	1/2		-1			-1	1/2	
	1	1/2	1/2	-1			-1	1/2	1/2
	-1			-1		1/2	1		1/2
	1		1/2	1	1/2	1/2	1	1/2	

Usando la condición  $(\varepsilon_1)$  (ver Observación 3.2.3) en (3.2.5) se puede ver que  $M, M'$  poseen estructuras spin  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  con caracteres

$$\delta_\varepsilon = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_5, -1) \quad \delta_{\varepsilon'} = (\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4, -1, -1, -1),$$

respectivamente, donde  $\delta_i, \delta'_j \in \{\pm 1\}$ ,  $1 \leq i \leq 5$ ,  $1 \leq j \leq 4$ .

Por el Teorema 6.1.2,  $M'$  tiene espectro simétrico y así  $\eta_{(\Gamma', \varepsilon')} = 0$ . Si tomamos cualquier  $\varepsilon$  de modo que  $\delta_\varepsilon = (1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)$  entonces, por la Proposición 6.2.1, tenemos que  $|\eta_{(\Gamma, \varepsilon)}| = 2^{3-2} = 2$ .





Parte 4

Aplicaciones



## Isospectralidad del operador de Dirac

En este capítulo consideramos una representación fija  $\rho = \alpha \circ r$  donde  $\alpha$  es una representación unitaria de  $\text{SO}(n)$ . Damos ejemplos de variedades isospectrales con respecto al operador  $D_\rho$  y que son no homeomorfas entre sí de a pares. En los Ejemplos 7.2.1, 7.2.2, 7.2.3 y 7.2.4 comparamos  $D_\rho$ -isospectralidad con otros tipos de isospectralidad, tales como isospectralidad del Laplaciano en funciones y en  $p$ -formas diferenciables e isospectralidad de longitudes de geodésicas cerradas con y sin multiplicidades (ver Introducción). Dos variedades son  $[L]$ -isospectrales ( $L$ -isospectrales) si tienen el mismo  $[L]$ -espectro ( $L$ -espectro). Obviamente,  $[L]$ -isospectralidad implica  $L$ -isospectralidad aunque la recíproca no es cierta.

En el Ejemplo 7.3.1 construimos una familia grande (de cardinalidad que depende exponencialmente de la dimensión) de variedades mutuamente Dirac-isospectrales.

### 7.1. Resultados sobre isospectralidad

Como consecuencia de los ejemplos de Dirac-isospectralidad que daremos más adelante obtendremos algunos resultados que por conveniencia reunimos en los siguientes teoremas (comparar con [AB, Thm. 5.6]):

**TEOREMA 7.1.1.** *(i) Existen familias  $\mathcal{F}$  de variedades Riemannianas, no homeomorfas entre sí de a pares, mutuamente isospectrales con respecto a  $D_\rho$  que no son ni isospectrales en funciones ni  $L$ -isospectrales. Además,  $\mathcal{F}$  se puede elegir de modo que:*

*(a) Toda  $M \in \mathcal{F}$  (no) tiene spinores armónicos (Ejemplo 7.2.1 (i)).*

*(b) Todas las  $M$ 's en  $\mathcal{F}$  tienen el mismo  $p$ -ésimo número de Betti,  $\beta_p(M)$ , para  $1 \leq p \leq n$  y son  $p$ -isospectrales entre sí para cada  $p$  impar (Ejemplo 7.2.1 (ii)).*

*(ii) Existen pares de variedades spin no homeomorfas que son  $\Delta_{s,\rho}$ -isospectrales pero no  $D_\rho$ -isospectrales (Ejemplo 7.2.2 (ii)).*

*(iii) Existen pares de variedades spin que son a la vez  $\Delta_p$ -isospectrales para  $0 \leq p \leq n$  y  $[L]$ -isospectrales las cuales son  $D_\rho$ -isospectral, o no, dependiendo de la estructura spin (Ejemplo 7.2.3 (i)).*

*(iv) Existen pares de variedades spin que son a la vez  $D_\rho$ -isospectrales y  $\Delta_p$ -isospectrales para  $0 \leq p \leq n$  las cuales son  $L$ -isospectrales pero no  $[L]$ -isospectrales (Ejemplo 7.2.3 (ii)).*

(v) *Existen pares de variedades spin no-homeomorfas entre sí que son  $D_\rho$ -isospectrales con grupos de holonomía no isomorfos (Ejemplo 7.2.4).*

**TEOREMA 7.1.2.** *Existe una familia, con cardinalidad dependiendo exponencialmente de  $n$  (o  $n^2$ ), de variedades Riemannianas Kähler de dimensión  $n$  (resp.  $2n$ ) no homeomorfas de a pares y que son mutuamente Dirac isospectrales para varias elecciones diferentes de estructuras spin (Ejemplo 7.3.1, Observación 7.3.2).*

En la construcción de los ejemplos bastará trabajar con  $n$ -variedades planas de tipo diagonal (ver Capítulo 1), con grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2^k$ , para  $k = 1, 2$  y  $n - 1$ .

## 7.2. Algunos ejemplos de $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades Dirac-isospectrales

**EJEMPLO 7.2.1** ( $\mathbb{Z}_2$ -variedades). Mostraremos aquí un conjunto grande de variedades Dirac-isospectrales con holonomía  $\mathbb{Z}_2$ . Recordamos la familia de  $\mathbb{Z}_2$ -variedades usadas en el Capítulo 3.

Ponemos  $J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Para cada  $0 \leq j, h < n$ , tomamos

$$B_{j,h} = \text{diag}(\underbrace{J, \dots, J}_j, \underbrace{-1, \dots, -1}_h, \underbrace{1, \dots, 1}_l) \quad \text{y} \quad \Gamma_{j,h} = \langle B_{j,h} L_{\frac{e_n}{2}}, \Lambda \rangle,$$

donde  $n = 2j + h + l$ ,  $j + h \neq 0$  y  $l \geq 1$  y  $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_n$  es el retículo canónico de  $\mathbb{R}^n$ . Tomando  $M_{j,h} = \Gamma_{j,h} \backslash \mathbb{R}^n$  tenemos la familia de variedades compactas planas

$$\mathcal{F} = \{M_{j,h} = \Gamma_{j,h} \backslash \mathbb{R}^n : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, 0 \leq h < n - 2j, j + h \neq 0\}.$$

Esta familia da un sistema completo de representantes de clases de difeomorfismo de  $\mathbb{Z}_2$ -variedades de dimensión  $n$  (ver Sección 3.3).

Recordamos que  $M_{j,h}$  tiene  $2^{n-j}$  estructuras spin (Teorema 3.3.3) parametrizadas por las uplas  $(\delta_1, \dots, \delta_n, \sigma) \in \{\pm 1\}^{n+1}$  que satisfacen:

$$(7.2.1) \quad \delta_1 = \delta_2, \dots, \delta_{2j-1} = \delta_{2j} \quad \text{y} \quad \delta_n = (-1)^{\frac{j+h}{2}}.$$

*Isospectralidad en  $p$ -formas.* Notar que  $B_{j,h}$  y  $B_{0,j+h}$  son conjugados en  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  y por lo tanto  $\chi_p(B_{j,h}) = \chi_p(B_{0,j+h}) = K_p^n(j+h)$ . Luego, por (1.4.1), la multiplicidad del autovalor  $4\pi^2\mu$  del Laplaciano  $\Delta_p$  esta dada por

$$(7.2.2) \quad d_{p,\mu}(\Gamma_{j,h}) = \frac{1}{2} \binom{n}{p} |\Lambda_{\sqrt{\mu}}| + K_p^n(j+h) e_{\mu,\gamma}(\Gamma_{j,h})$$

donde  $e_{\mu,\gamma}$  y  $K_p^n(x)$  son como en (1.4.2) y (1.4.3), respectivamente.

Así, la existencia de ceros enteros de  $K_p^n(x)$  implicará la  $p$ -isospectralidad de algunas de las  $M_{j,h} \in \mathcal{F}$ . Para algunos hechos sobre ceros enteros de  $K_p^n(x)$  ver [KL, p. 76], o [MR4, Lem. 3.9]. Los más simples son los llamados ceros triviales, o sea: *Si  $n$  es par entonces  $K_{\frac{n}{2}}^n(j) = K_j^n(\frac{n}{2}) = 0$  para cada  $j$  impar. Además,  $K_k^n(j) = 0$  si y sólo si  $K_j^n(k) = 0$ .*

Luego para  $n = 2m$ , todas las variedades  $\{M_{j,h} : j+h \text{ es impar}\}$  son  $m$ -isospectrales y todas las variedades  $\{M_{j,h} : j+h = m\}$  son  $p$ -isospectrales

para cada  $p$  impar con  $1 \leq p \leq n$ . Sin embargo, genéricamente –es decir, para  $p$  y  $n$  arbitrarios– las  $M_{j,h}$  no serán  $p$ -isospectrales entre sí porque los ceros enteros de los polinomios de Krawtchouk, salvo los triviales, son bastante esporádicos y los  $e_{\mu,\gamma}$  son distintos.

Afirmamos que las variedades en  $\mathcal{F}$  no son isospectrales en funciones de a pares. Tomemos  $\mu = 1$ . Entonces  $\Lambda_1 = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$  y  $\Lambda_1^{B_{j,h}} = \{\pm e_{2j+h+1}, \dots, \pm e_n\}$ , luego  $|\Lambda_1| = 2n$  y  $|\Lambda_1^{B_{j,h}}| = 2(n - (2j + h)) = 2l$ . Ahora, es fácil ver  $e_{1,\gamma}(\Gamma_{j,h}) = 2(l - 1) + 2(-1) = 2(l - 2)$  y, de (7.2.2), tenemos

$$(7.2.3) \quad d_{p,1}(\Gamma_{j,h}) = \binom{n}{p}n + K_p^n(j + h)(l - 2).$$

Ahora, tomamos  $\mu = 2$ . Entonces  $\Lambda_{\sqrt{2}} = \{\pm(e_i \pm e_j) : 1 \leq i < j \leq n\}$  y  $\Lambda_{\sqrt{2}}^{B_{j,h}} = \{\pm(e_{2i-1} + e_{2i}) : 1 \leq i \leq j\} \cup \{\pm(e_i \pm e_j) : l + 1 \leq i < j \leq n\}$ . Luego  $|\Lambda_{\sqrt{2}}| = 4\binom{n}{2}$  y  $|\Lambda_{\sqrt{2}}^{B_{j,h}}| = 2j + 4\binom{l}{2}$ . Se puede ver que  $e_{2,\gamma}(\Gamma_{j,h}) = 2j + 4\binom{l}{2} - 8(l - 1) = 2j + 2(l - 1)(l - 4)$ . Otra vez por (7.2.2), obtenemos

$$(7.2.4) \quad d_{p,2}(\Gamma_{j,h}) = 2\binom{n}{p}\binom{n}{2} + K_p^n(j + h)(j + (l - 1)(l - 4)).$$

En particular para  $p = 0$ , como  $K_0^n(j) = 1$  para todo  $j$ , tenemos

$$(7.2.5) \quad d_{0,1}(\Gamma_{j,h}) = n + l - 2$$

$$(7.2.6) \quad d_{0,2}(\Gamma_{j,h}) = n(n - 1) + j + (l - 1)(l - 4).$$

Estas multiplicidades son suficientes para mostrar que todas las  $\mathbb{Z}_2$ -variedades en  $\mathcal{F}$  no son isospectrales de a pares. De hecho, si  $M_{j,h}, M_{j',h'}$  son isospectrales entonces  $l = l'$  por (7.2.5), luego  $2j + h = 2j' + h'$ . Por (7.2.6), entonces  $j = j'$  y por lo tanto  $h = h'$ .

*Isospectralidad del operador de Dirac.* Daremos aquí una familia de  $\mathbb{Z}_2$ -variedades mutuamente  $D_\rho$ -isospectrales. Como necesitamos restringirnos a variedades orientables, consideramos la familia

$$\mathcal{F}^+ = \{M_{j,h} \in \mathcal{F} : j + h \text{ es par}\}.$$

Será conveniente partir  $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}_0^+ \dot{\cup} \mathcal{F}_1^+$  donde

$$\mathcal{F}_i^+ = \{M_{j,h} \in \mathcal{F}^+ : j + h \equiv 2i \pmod{4}\}, \quad i = 0, 1.$$

(i) Ahora definimos estructuras spin para  $M_{j,h}$  en  $\mathcal{F}^+$ . Por (3.3.9),  $\delta_n = 1$  para  $j + h \equiv 0(4)$  y  $\delta_n = -1$  para  $j + h \equiv 2(4)$ . Luego, tomamos las estructuras spin

$$(7.2.7) \quad \varepsilon_{i,j,h} = (1, \dots, 1, (-1)^i; \sigma u(B_{j,h})), \quad i = 0, 1,$$

para variedades en  $\mathcal{F}_i^+$ ,  $i = 0, 1$ , respectivamente. Por conveniencia, escribiremos  $\varepsilon_i$  en lugar de  $\varepsilon_{i,j,h}$ .

Afirmamos que todas las  $\mathbb{Z}_2$ -variedades spin en

$$\tilde{\mathcal{F}}_0^+ := \{(M_{j,h}, \varepsilon_0) : M_{j,h} \in \mathcal{F}_0^+\}$$

son mutuamente  $D_\rho$ -isospectrales. En efecto, como  $\varepsilon_0$  es una estructura spin de tipo trivial, sabemos por el Teorema 6.1.2 que el espectro es simétrico y que las multiplicidades de los autovalores  $\pm 2\pi\mu$  de  $D_\rho$  están dadas por

$$d_{\rho,\mu}^\pm(\Gamma_{j,h}, \varepsilon_0) = 2^{m-2} d_\rho |\Lambda_{\varepsilon_0,\mu}^*| = 2^{m-2} d_\rho |\Lambda_\mu|$$

pues  $\Lambda_{\varepsilon_0}^* = \Lambda$ . Notar que todas las variedades en  $\tilde{\mathcal{F}}_0^+$  tienen  $2^{m-1}d_\rho$  spinores armónicos no nulos.

Si  $n \not\equiv 3(4)$ , las variedades spin en  $\tilde{\mathcal{F}}_1^+ := \{(M_{j,h}, \varepsilon_1) : M_{j,h} \in \mathcal{F}_1^+\}$  son mutuamente Dirac-isospectrales. Lo mismo sucede con aquellas que están en  $\tilde{\mathcal{F}}_1^+ \setminus \{M_{0,2m}\}$ , para  $n = 2m + 1 \equiv 3(4)$ . En efecto, en ambos casos, tenemos que  $d_{\rho,\mu}^\pm(\Gamma_{j,h}, \varepsilon_1) = 2^{m-2} d_\rho |\Lambda_{\varepsilon_1,\mu}|$ , por Teorema 6.1.2. Estas variedades no poseen spinores armónicos no triviales.

(ii) Notar que, para todo  $t$ , las variedades  $M_{t,0}, M_{t-1,1}, \dots, M_{0,t}$  tienen el mismo primer número de Betti. Recordamos de (3.3.5) que para  $1 \leq p \leq n$

$$\beta_p(M_{j,h}) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{j+h}{2i} \binom{j+l}{p-2i}.$$

Por lo tanto, si  $\beta_1(M_{j,h}) = \beta_1(M_{j',h'})$ , entonces  $\beta_p(M_{j,h}) = \beta_p(M_{j',h'})$  para cada  $p \geq 1$ .

Ahora, tomamos

$$(7.2.8) \quad \mathcal{F}_t = \{(M_{j,h}, \varepsilon) : M_{j,h} \in \mathcal{F}^+ \text{ y } j+h = t\}$$

para algún  $t$  fijo par y  $\varepsilon$  como en (7.2.7). De esta manera  $\mathcal{F}_t$  es una familia de  $t+1$   $\mathbb{Z}_2$ -variedades spin que son mutuamente Dirac-isospectrales todas con los mismos números de Betti,  $\beta_p$ , para todo  $1 \leq p \leq n$ . Más aún, si tomamos  $n = 2t$  entonces todas las  $M_{j,h} \in \mathcal{F}_t$  son  $p$ -isospectrales para cada  $p$  impar, por los comentarios posteriores a (7.2.2).

**EJEMPLO 7.2.2.** Damos aquí un par de  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedades spin no homeomorfas que son  $\Delta_{s,\rho}$ -isospectrales pero no son  $D_\rho$ -isospectrales. Sea  $\Lambda$  el retículo canónico en  $\mathbb{R}^7$  y tomamos los grupos de Bieberbach

$$\Gamma = \langle B_1 L_{b_1}, B_2 L_{b_2}, \Lambda \rangle, \quad \Gamma' = \langle B_1 L_{b'_1}, B_2 L_{b'_2}, \Lambda \rangle$$

donde  $B_1 = \text{diag}(-1, -1, -1, -1, -1, -1, 1)$ ,  $B_2 = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $B'_1 = \text{diag}(-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1)$ ,  $B'_2 = \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1)$ , y  $b_1 = \frac{e_7}{2}$ ,  $b_2 = \frac{e_1+e_3+e_7}{2}$ ,  $b'_1 = \frac{e_7}{2}$ ,  $b'_2 = \frac{e_2}{2}$  están en  $\frac{1}{2}\Lambda$ . Sean  $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^7$ ,  $M_{\Gamma'} = \Gamma' \backslash \mathbb{R}^7$  las  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedades asociadas. Es fácil ver que  $\beta_2(M_\Gamma) \neq \beta_2(M_{\Gamma'})$ , luego  $M_\Gamma, M_{\Gamma'}$  son no homeomorfas.

Por el Teorema 3.2.1, se puede verificar que  $M_\Gamma$  y  $M_{\Gamma'}$  admiten estructuras spin  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$ , con caracteres, respectivamente, de la forma

$$\delta_\varepsilon = (1, \delta_2, 1, \delta_4, \delta_5, \delta_6, -1) \quad \text{y} \quad \delta_{\varepsilon'} = (\delta'_1, 1, \delta'_3, \delta'_4, \delta'_5, \delta'_6, 1),$$

con  $\delta_i, \delta'_i \in \{\pm 1\}$ .

Ahora,  $F_1(\Gamma) = \{B_1\}$ . Si tomamos  $\varepsilon$  de tal que  $\delta_\varepsilon = (1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)$ , y  $\chi_\rho(B_1) \neq 0$ , entonces  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  tiene espectro de Dirac asimétrico. Luego, si  $\mu_j = j + \frac{1}{2}$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ , la multiplicidad de  $\pm 2\pi\mu$  está dada por

$$d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = \begin{cases} d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu_j}| \pm 2(-1)^j \sigma_{\gamma_1} \chi_\rho(\gamma_1) & \mu = \mu_j \\ d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu}| & \mu \neq \mu_j. \end{cases}$$

Por otra parte,  $F_1(\Gamma') = \emptyset$ . Luego,  $M_{\Gamma'}$  tiene espectro de Dirac simétrico con  $d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma', \varepsilon') = d_\rho |\Lambda_{\varepsilon', \mu}|$ .

Ahora tomamos  $\delta_{\varepsilon'} = (-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . Entonces  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  y  $(M_{\Gamma'}, \varepsilon')$  son  $\Delta_{s, \rho}$ -isospectrales. En efecto,  $d_0(\Gamma, \varepsilon) = d_0(\Gamma', \varepsilon') = 0$  y como  $|J_\varepsilon^-| = |J_{\varepsilon'}^-| = 1$ , para cada  $\mu > 0$ , por la Observación 5.2.2, tenemos

$$d_{\rho, \mu}(\Gamma, \varepsilon) = 2d_\rho |\Lambda_{\varepsilon, \mu}| = 2d_\rho |\Lambda_{\varepsilon', \mu}| = d_{\rho, \mu}(\Gamma', \varepsilon').$$

Sin embargo,  $(M_\Gamma, \varepsilon)$  y  $(M_{\Gamma'}, \varepsilon')$  no son  $D_\rho$ -isospectrales pues vimos que  $\text{Spec}_{D_\rho}^A(\Gamma, \varepsilon) \neq \emptyset$  mientras que  $\text{Spec}_{D_\rho}^A(\Gamma', \varepsilon') = \emptyset$ . Notar que  $\text{Spec}_{D_\rho}^S(\Gamma, \varepsilon) = \text{Spec}_{D_\rho}^S(\Gamma', \varepsilon')$ .

**EJEMPLO 7.2.3.** Aquí, mostraremos dos pares de  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedades  $M, M'$  de dimensión 4,  $\Delta_p$ -isospectrales para  $0 \leq p \leq n$ , y  $L$ -isospectrales, de modo que un par es  $[L]$ -isospectral y el otro no. Estos pares serán  $D_\rho$ -isospectrales, o no, dependiendo de las elecciones de las estructuras spin.

Consideremos las variedades  $M_i, M'_i$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , donde  $M_i = \Gamma_i \backslash \mathbb{R}^4$ ,  $M'_i = \Gamma'_i \backslash \mathbb{R}^4$  y  $\Gamma_i = \langle \gamma_1, \gamma_2, \Lambda \rangle$ ,  $\Gamma'_i = \langle \gamma'_1, \gamma'_2, \Lambda \rangle$  están dadas en la tabla siguiente donde  $\gamma_i = B_i L_{b_i}$ ,  $\gamma'_i = B_i L_{b'_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $B_3 = B_1 B_2$ ,  $b_3 = B_2 b_1 + b_2$ ,  $b'_3 = B_2 b'_1 + b'_2$  y  $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_4$  es el retículo canónico. Además, tomamos  $B_i = B'_i$ . En todos los casos las matrices  $B_i$  son diagonales y son escritas como vectores columnas. También indicamos los vectores de traslación  $b_i, b'_i$  como vectores columnas, ignorando las coordenadas nulas. También usaremos el par  $\tilde{M}_2, \tilde{M}'_2$  de  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedades de dimensión 6 obtenidos a partir del par  $M_2, M'_2$  agregándoles los caracteres  $(-1, 1, -1)$  y  $(1, -1, -1)$  a  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , y manteniendo  $b_i, b'_i$  sin cambios.

Notar que  $M_1, M'_1$  y  $\tilde{M}_2, \tilde{M}'_2$  son orientables mientras que  $M_2, M'_2$  no lo son.

	$B_1$	$L_{b_1}$	$L_{b'_1}$	$B_2$	$L_{b_2}$	$L_{b'_2}$	$B_3$	$L_{b_3}$	$L_{b'_3}$
$\{M_1, M'_1\}$	-1			1		1/2	-1		1/2
	-1			-1	1/2	1/2	1	1/2	1/2
	1		1/2	-1			-1		1/2
	1	1/2		1	1/2		1		

	$B_1$	$L_{b_1}$	$L_{b'_1}$	$B_2$	$L_{b_2}$	$L_{b'_2}$	$B_3$	$L_{b_3}$	$L_{b'_3}$
$\{M_2, M'_2\}$	1			1		1/2	1		1/2
	1		1/2	1	1/2	1/2	1	1/2	
	1	1/2		-1			-1	1/2	
	-1			1	1/2		-1	1/2	
	-1			1			-1		
$\{\tilde{M}_2, \tilde{M}'_2\}$	1			-1			-1		
	1			-1			-1		

(i) Por [MR5, Ex. 3.3], las variedades  $M_1, M'_1$  son Sunada-isospectrales (por lo tanto  $p$ -isospectrales para  $0 \leq p \leq n$ ) y  $[L]$ -isospectrales.

Por el Teorema 3.2.1, uno puede verificar que  $M_1$  admite  $2^4$  estructuras spin  $\varepsilon_1$  de la forma  $\varepsilon_1 = (\delta_1, -1, \delta_3, -1; \sigma_1 e_1 e_2, \sigma_2 e_2 e_3)$ , y que  $M'_1$  posee  $2^3$  estructuras spin  $\varepsilon'_1$  de la forma  $\varepsilon'_1 = (-1, -1, -1, \delta'_4, \sigma'_1 e_1 e_2, \sigma'_2 e_2 e_3)$  donde  $\delta_1, \delta_3, \delta'_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1, \sigma'_2 \in \{\pm 1\}$ .

Como  $F_1(\Gamma_1) = F_1(\Gamma'_1) = \emptyset$ , por (6.1.4) tenemos que  $d_{\rho, \mu}^{\pm}(\Gamma_1, \varepsilon_1) = d_{\rho} |\Lambda_{\varepsilon_1, \mu}|$  y  $d_{\rho, \mu}^{\pm}(\Gamma'_1, \varepsilon'_1) = d_{\rho} |\Lambda_{\varepsilon'_1, \mu}|$ .

Ahora, si tomamos  $\delta_{\varepsilon_1} = (1, -1, 1, -1)$ , vemos que  $(M_1, \varepsilon_1)$  no es  $D_{\rho}$ -isospectral a  $(M'_1, \varepsilon'_1)$  para cualquier  $\varepsilon'_1$  puesto que  $|J_{\varepsilon_1}^-| = 2$  mientras que  $|J_{\varepsilon'_1}^-| \geq 3$  (ver Observación 5.2.2). Sin embargo, si tomamos  $\varepsilon_1, \varepsilon'_1$  tales que  $\delta_{\varepsilon_1} = \delta_{\varepsilon'_1} = (-1, -1, -1, -1)$ , entonces  $(M_1, \varepsilon_1)$  y  $(M'_1, \varepsilon'_1)$  resultan  $D_{\rho}$ -isospectrales.

(ii) Por Ejemplo 3.4 en [MR5], las variedades  $M_2, M'_2$  son Sunada-isospectrales (por lo tanto  $p$ -isospectrales para  $0 \leq p \leq n$  y  $L$ -isospectrales) pero no son  $[L]$ -isospectrales. Para tener variedades orientables agregamos a  $M_2, M'_2$  los caracteres  $(-1, 1, -1)$  y  $(1, -1, -1)$ . El par  $\tilde{M}_2, \tilde{M}'_2$  obtenido tiene las mismas propiedades espectrales que  $M_2, M'_2$ . Esto se puede ver procediendo como en Ejemplo 3.4 en [MR5].

Otra vez, por el Teorema 3.2.1, podemos verificar que  $\tilde{M}_2$  tiene  $2^5$  estructuras spin,  $\varepsilon_2$ , con caracteres  $\delta_{\varepsilon_2} = (\delta_1, 1, -1, -1, \delta_5, \delta_6)$ ,  $\delta_1, \delta_5, \delta_6 \in \{\pm 1\}$ ; y  $\tilde{M}'_2$  tiene  $2^6$  estructuras spin,  $\varepsilon'_2$ , con caracteres  $\delta_{\varepsilon'_2} = (1, -1, \delta'_3, \delta'_4, \delta'_5, \delta'_6)$  donde  $\delta'_3, \delta'_4, \delta'_5, \delta'_6 \in \{\pm 1\}$ .

Ahora,  $d_{\rho, \mu}^{\pm}(\tilde{\Gamma}_2, \varepsilon_2) = d_{\rho} |\Lambda_{\varepsilon_2, \mu}|$  y  $d_{\rho, \mu}^{\pm}(\tilde{\Gamma}'_2, \varepsilon'_2) = d_{\rho} |\Lambda_{\varepsilon'_2, \mu}|$ . Como en (i), si tomamos las estructuras spin  $\varepsilon_2, \varepsilon'_2$  con  $|J_{\varepsilon_2}^-| = |J_{\varepsilon'_2}^-|$ , vemos que  $(\tilde{M}_2, \varepsilon_2)$  y  $(\tilde{M}'_2, \varepsilon'_2)$  son  $D_{\rho}$ -isospectrales, mientras que si tomamos  $\varepsilon_2, \varepsilon'_2$  tales que  $|J_{\varepsilon_2}^-| \neq |J_{\varepsilon'_2}^-|$ , entonces  $(\tilde{M}_2, \varepsilon_2)$  y  $(\tilde{M}'_2, \varepsilon'_2)$  no son  $D_{\rho}$ -isospectrales.

EJEMPLO 7.2.4. En este último ejemplo mostraremos que puede haber  $D_{\rho}$ -isospectralidad entre variedades con grupos de holonomía no isomorfos.

Sea  $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_7$  el retículo canónico de  $\mathbb{R}^7$  y tomamos los grupos de Bieberbach  $\Gamma = \langle B_1 L_{b_1}, B_2 L_{b_2}, \Lambda \rangle$ ,  $\Gamma' = \langle B'_1 L_{b'_1}, \Lambda \rangle$  donde

$$B_1 = \begin{bmatrix} -Id & & & & & & \\ & Id & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -Id & & & & & & \\ & Id & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix}, \quad B'_1 = \begin{bmatrix} \tilde{J} & & & & & & \\ & Id & & & & & \\ & & Id & & & & \\ & & & Id & & & \\ & & & & Id & & \\ & & & & & Id & \\ & & & & & & Id \end{bmatrix},$$



con  $Id = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{J} = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}$ , y donde  $b_1 = \frac{e_5 + e_6}{2}$ ,  $b_2 = \frac{e_6 + e_7}{2}$  y  $b'_1 = \frac{e_7}{4}$ . Luego  $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^7$  es una  $\mathbb{Z}_2^2$ -variedad y  $M_{\Gamma'} = \Gamma' \backslash \mathbb{R}^7$  es una  $\mathbb{Z}_4$ -variedad.

Usando las condiciones  $(\varepsilon_1)$  y  $(\varepsilon_2)$  en (3.2.5), se puede verificar fácilmente que  $M_\Gamma$  y  $M_{\Gamma'}$  admiten estructuras spin  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  con caracteres  $\delta_\varepsilon = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, 1, 1, -1)$  y  $\delta_{\varepsilon'} = (\delta'_1, \delta'_1, \delta'_3, \delta'_4, \delta'_5, \delta'_6, -1)$  respectivamente, con  $\delta_i, \delta'_j \in \{\pm 1\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $j = 1, 3, 4, 5, 6$ . En particular, se puede tomar

$$\delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon'} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, -1).$$

Como  $F_1(\Gamma) = F_1(\Gamma') = \emptyset$ , es claro que  $M_\Gamma$  y  $M_{\Gamma'}$  son  $D_\rho$ -isospectrales pues

$$d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma, \varepsilon) = |\Lambda_{\varepsilon, \mu}| = |\Lambda_{\varepsilon', \mu}| = d_{\rho, \mu}^\pm(\Gamma', \varepsilon').$$

### 7.3. Familias muy grandes de variedades Dirac-isospectrales

Recordamos primero algunos hechos de [MR]. Sea  $n$  impar. Un *grupo de Hantzsche-Wendt* (o *grupo HW*) es un grupo de Bieberbach  $\Gamma$  orientable de dimensión  $n$  con grupo de holonomía  $F \simeq \mathbb{Z}_2^{n-1}$  tales que la acción de todo  $B \in F$  diagonaliza en la  $\mathbb{Z}$ -base canónica  $e_1, \dots, e_n$  de  $\Lambda$ . El grupo de holonomía  $F$  se puede identificar con el subgrupo diagonal

$$\{B : Be_i = \pm e_i, 1 \leq i \leq n, \det B = 1\}$$

y  $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  se llama *variedad de Hantzsche-Wendt* (o *variedad HW*).

Para cada  $1 \leq i \leq n$ , denotamos por  $B_i$  la matriz diagonal que fija a  $e_i$  y tal que  $B_i e_j = -e_j$  si  $j \neq i$ . Claramente,  $F$  está generado por  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  y además  $B_n = B_1 B_2 \dots B_{n-1}$ .

Todo grupo HW es de la forma  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, L_\lambda : \lambda \in \Lambda \rangle$ , con  $\gamma_i = B_i L_{b_i}$  para algún  $b_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , y donde podemos suponer que las componentes  $b_{ij}$  de  $b_i$  satisfacen  $b_{ij} \in \{0, \frac{1}{2}\}$ , para  $1 \leq i, j \leq n$ . También, como  $(\Lambda^p(\mathbb{R}^n))^F = 0$  para cada  $1 \leq p \leq n-1$ , sigue que todas las variedades HW son esferas racionales de homología. Recordamos además que, como se muestra en [MR] (usando una subfamilia relativamente pequeña  $\mathcal{H}_1$ ), la cardinalidad  $h_n$  de la familia de todos los grupos HW bajo isomorfismo satisface  $h_n > \frac{2^{n-3}}{n-1}$ . Más aún, la cardinalidad del conjunto de pares de grupos HW Laplace-isospectrales, no isomorfos de a pares, crece exponencialmente con  $n$ .

Con respecto a la condición de ser spin, es fácil verificar usando la condición  $(\varepsilon_1)$  en (3.2.5) (ver también [MP, (2.3)]), que las variedades en esta familia no son en general spin. De hecho, mostramos ahora que ninguna HW-variedad de dimensión  $n = 4k + 1$  es spin. Notamos que  $\gamma_i^2 = L_{e_i}$  para cada  $1 \leq i \leq n$ . Luego, una estructura spin  $\varepsilon$  debe satisfacer

$$\delta_i = \varepsilon(L_{e_i}) = \varepsilon(\gamma_i^2) = \varepsilon(\gamma_i)^2 = (\pm e_1 \dots e_{i-1} e_{i+1} \dots e_n)^2 = 1,$$

pues  $n = 4k + 1$ . Así, tenemos que  $\varepsilon|_\Lambda = Id$ . Por otra parte  $(\gamma_i \gamma_j)^2 = L_\lambda$  para algún  $\lambda \neq 0$  y, como  $\varepsilon(\gamma_i \gamma_j) = \pm e_i e_j$ , resulta que  $\varepsilon(L_\lambda) = \varepsilon(\pm e_i e_j)^2 = -1$ , una clara contradicción.

En el caso  $n = 4k + 3$ ,  $k > 0$ , mostraremos que ninguna HW variedad en la familia  $\mathcal{H}_1$  (ver [MR]) es spin. Más generalmente, supongamos que hay tres generadores consecutivos de  $\Gamma$ ,  $\gamma_i = B_i L_{b_i}$  con  $b_i = L_{(e_i + e_{i-1})/2}$ ,  $i \geq 2$ . Luego, si  $\gamma := \gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_{i+2} = B_i B_{i+1} B_{i+2} L_{(e_{i-1} + e_{i+2})/2}$ , entonces tenemos que  $\gamma^2 = \gamma_{i+2}^2 = L_{e_{i+2}}$ . Esto da una contradicción pues  $\varepsilon(\gamma)^2 = 1$  (la multiplicidad del autovalor  $-1$  para  $B_i B_{i+1} B_{i+2}$  es  $4k$ ) mientras que  $\varepsilon(\gamma_{i+2})^2 = -1$  (la multiplicidad del autovalor  $-1$  para  $B_{i+2}$  es  $4k + 2$ ).

**EJEMPLO 7.3.1.** Construimos ahora una familia muy grande de variedades con grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ , de dimensión  $2n$ , isospectrales con respecto al operador de Dirac torcido y no homeomorfas de a pares. Aplicaremos el “procedimiento de duplicación” usado en [JR] (también [BDM], [DM2]) a la familia de variedades de Hantzsche-Wendt (ver [MR]).

Para cada grupo HW  $\Gamma$ , consideramos el grupo “duplicado”  $d\Gamma$ , definido mediante el procedimiento de duplicación, esto es

$$d\Gamma := \langle dB L_{(b,b)}, L_{(\lambda_1, \lambda_2)} : B L_b \in \Gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \rangle$$

donde  $dB := \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ . Esto da lugar a un grupo de Bieberbach de dimensión  $2n$ , con el mismo grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2^{n-1}$  que  $\Gamma$ , y con la propiedad adicional que la variedad asociada  $M_{d\Gamma}$  es Kähler. La razón por la que usamos  $d\Gamma$  en lugar de  $\Gamma$  es que  $M_{d\Gamma}$  siempre es spin (Observación 3.2.5).

Necesitaremos los siguientes hechos:

(i) Si  $\Gamma$  es un grupo HW, entonces  $M_{d\Gamma}$  admite  $2^{n-1}$  estructuras spin de tipo trivial.

(ii) Si  $\Gamma$  recorre todos los grupos HW, todas las variedades  $M_{d\Gamma}$  dotadas de estructuras spin de tipo trivial son mutuamente  $D_\rho$ -isospectrales.

(iii) Si  $\Gamma, \Gamma'$  son grupos HW no isomorfos entonces  $d\Gamma, d\Gamma'$  son grupos de Bieberbach no isomorfos.

(iv) Dos grupos HW  $\Gamma, \Gamma'$  son Laplace-isospectrales si y sólo si  $d\Gamma$  y  $d\Gamma'$  son Laplace-isospectrales.

Ahora, (i) y (ii) son consecuencias directas de las Observaciones 3.2.5, 5.2.2 y de (i) del Teorema 6.1.2, respectivamente.

*Prueba de (iii).* Esta afirmación sigue por un argumento muy similar al dado en la demostración de la Proposición 1.5 en [MR]. Sólo daremos la idea. Un isomorfismo entre  $d\Gamma$  y  $d\Gamma'$  viene dado por conjugación por  $CL_c$  con  $C \in GL(2n, \mathbb{R})$  y  $c \in \mathbb{R}^{2n}$ . Ahora  $C(\Lambda \oplus \Lambda) = \Lambda \oplus \Lambda$  implica  $C \in GL(2n, \mathbb{Z})$  y más aún para cada  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$CL_c dB_i L_{(b_i, b_i)} L_{-c} C^{-1} = dB_{\sigma(i)} L_{(b'(\sigma(i)), b'(\sigma(i)))}$$

donde  $\sigma \in S_n$ . Luego  $C dB_i C^{-1} L_{C((b_i, b_i) + (dB_i - Id)c)}$ . En particular, esto implica que  $C dB_i C^{-1} = dB_{\sigma(i)}$  para cada  $1 \leq i \leq n$ , con  $\sigma \in S_n$ . Luego, existe una matriz  $n \times n$  de permutación  $P$  tal que  $D := C d P C^{-1}$  conmuta con  $dB_i$  para cada  $i$ , luego  $D$  preserva  $\mathbb{Z}e_i \oplus \mathbb{Z}e_{n+i}$  para cada  $i$ . Es fácil ver

que la conjugación por tal  $D$  da lugar a un automorfismo de  $d\Gamma'$ . Luego, la conjugación por  $DCL_c = dPL_c$  lleva  $d\Gamma$  sobre  $d\Gamma'$  isomórficamente y además

$$\begin{aligned} dPL_c dB_i L_{(b_i, b_i)} L_{-c} dP^{-1} &= d(PB_i P)^{-1} L_{dP((b_i, b_i) + (dB_i - Id)c)} \\ &= dB_{\sigma(i)} L_{(b'_i, b'_i)}. \end{aligned}$$

Esto implica que  $c = (c_1, c_1)$ , mod  $(\Lambda)$ , con  $c_1 \in \frac{1}{4}\Lambda$  y por lo tanto, la conjugación por  $PL_{c_1}$  da un isomorfismo entre  $\Gamma$  y  $\Gamma'$ , una contradicción.

*Prueba de (iv).* Como los grupos HW son de tipo diagonal, entonces  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  son Laplace-isospectrales si y sólo si son Sunada-isospectrales, esto es, si tienen los mismos números de Sunada (ver [MR3], [MR4]). Afirmamos que éste es el caso si y sólo si  $d\Gamma$  y  $d\Gamma'$  son Sunada-isospectrales.

En efecto, recordamos que para  $0 \leq t \leq s \leq n$ , y  $\Gamma$  de tipo diagonal, los números de Sunada de  $\Gamma$  están definidos por

$$c_{d,t}(\Gamma) = |\{BL_b \in \Gamma : n_B = d \text{ y } n_B(\frac{1}{2}) = t\}|.$$

donde, para  $BL_b \in \Gamma$ ,  $n_B = \dim(\mathbb{R}^n)^B = |\{1 \leq i \leq n : Be_i = e_i\}|$  y  $n_B(\frac{1}{2}) = |\{1 \leq i \leq n : Be_i = e_i \text{ y } b \cdot e_i = \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}\}|$ . Ahora, es claro de las definiciones que  $c_{2s,2t}(d\Gamma) = c_{s,t}(\Gamma)$  para cada  $0 \leq t \leq s \leq n$  y  $c_{u,v}(d\Gamma) = 0$ , si  $u$  o  $v$  es impar. Esto claramente implica que  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  tienen los mismos números de Sunada si y sólo si  $d\Gamma$  y  $d\Gamma'$  los tienen, es decir, si y sólo si  $d\Gamma$  y  $d\Gamma'$  son Sunada-isospectrales.

Luego, para cada  $n$  impar, por (i), (ii), (iii) y (iv), la construcción anterior da una familia, de cardinalidad que depende exponencialmente de  $n$ , de variedades planas Kähler de dimensión  $2n$ , todas no homeomorfas de a pares y todas mutuamente  $D_\rho$ -isospectrales, con sólo  $2d_\rho$  spinores armónicos para cada estructura spin de tipo trivial elegida (ver (iii) del Teorema 6.1.2). Dentro de esta familia, por (iv) y [MR], existen una cantidad exponencial de pares Sunada-isospectrales, luego  $p$ -isospectrales para todo  $p$ . Sin embargo, genéricamente, dos tales variedades no serán  $p$ -isospectrales para cada valor de  $p$  (ver por ejemplo [MR2] en el caso  $n = 7$ ).

Notamos que si repetimos el procedimiento de duplicación entonces el conjunto de todas las  $M_{d^2\Gamma}$ , con  $\Gamma$  un grupo HW, es una familia exponencial de variedades hyperkähler de dimensión  $4n$ , con las mismas propiedades espectrales que la familia  $M_{d\Gamma}$ , pero ahora con  $2^{n+1}d_\rho$  spinores armónicos para cada estructura spin de tipo trivial elegida.

**OBSERVACIÓN 7.3.2.** Consideremos la familia de todas las variedades compactas planas con grupo de holonomía  $\mathbb{Z}_2^{n-1}$  (ver [RS]) en dimensión  $n = 4r + 3$ . En [MPR] damos una subfamilia de ésta que tiene cardinalidad  $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ . Si se aplica el procedimiento de duplicación a esta subfamilia, uno ve que las consideraciones (i), (ii), (iii) y (iv) del Ejemplo 7.3.1 permanecen válidas, por lo tanto se obtiene una familia de  $2n$ -variedades  $D_\rho$ -isospectrales, no homeomorfas de a pares, de cardinalidad  $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ .



## CAPÍTULO 8

### Serie eta e invariante eta de $\mathbb{Z}_p$ -variedades, $p$ primo

Ilustraremos aquí los resultados del Capítulo 5 utilizando la expresión (5.3.4) de la serie eta, para calcular explícitamente el invariante  $\eta$ , con  $(\rho, V) = (1, \mathbb{C})$ , de ciertas variedades planas con holonomía cíclica.

Consideraremos una familia de  $\mathbb{Z}_p$ -variedades de dimensión  $p = 4r + 3$  con  $p$  primo. Esta familia es interesante pues tiene grandes conexiones con la teoría de números. En [SS], los autores dan una expresión para el invariante  $\eta$  de la familia de  $\mathbb{Z}_p$ -variedades (sin asumir  $p$  primo), en términos de soluciones de ciertas ecuaciones de congruencia. Ellos dan valores explícitos sólo en los casos  $p = 3, 7$ .

Aquí, daremos una expresión explícita cerrada para el invariante  $\eta$  de esta familia en términos de los símbolos de Legendre y sumas de valores especiales de funciones trigonométricas, reminiscentes de las obtenidas en [HZ] al calcular el  $G$ -índice de operadores elípticos para ciertas variedades en dimensión baja. Al final damos una tabla con los valores calculados de  $\eta$  para todo primo  $p < 10000$ . Estos valores coinciden con los calculados en [Pf] para  $n = 3$  y en [SS] para  $n = 3, 7$ .

#### 8.1. Estructuras spin

Asumimos que  $F \simeq \mathbb{Z}_p$ , con  $p$  primo de la forma  $4r + 3$ . Definimos el grupo  $\Gamma = \langle BL_b, \Lambda \rangle$  donde  $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_p$  es el retículo canónico y  $B$  es de orden  $p$  con  $B(e_i) = e_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq p-2$ ,  $B(e_{p-1}) = -\sum_{i=1}^{p-1} e_i$ ,  $B(e_p) = e_p$  y  $b = \frac{1}{p}e_p$ . O sea

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $B \notin O(p)$  entonces  $\Gamma \in \text{Aff}(p)$ . Ahora, como los autovalores de  $B$  son las raíces  $p$ -ésimas de la unidad  $e^{\frac{2\pi ik}{p}}$ ,  $1 \leq k \leq p-1$ , existe  $D \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$  tal que  $De_p = e_p$  y  $C := DBD^{-1} \in \text{SO}(p)$  y podemos suponer que

$$C = \text{diag}(B(\frac{2\pi}{p}), \dots, B(\frac{2m\pi}{p}), 1) = x_0(\frac{2\pi}{p}, \dots, \frac{2m\pi}{p})$$

con  $m = \frac{p-1}{2}$ .

Sea,

$$(8.1.1) \quad M_p := \Gamma_p \backslash \mathbb{R}^p \quad \text{con} \quad \Gamma_p := D\Gamma D^{-1} = \langle CL_{\frac{e_p}{p}}, D\Lambda \rangle.$$

Ahora,  $\Gamma_p$  es un grupo de Bieberbach y  $M_p$  es una  $\mathbb{Z}_p$ -variedad orientable de dimensión  $p$ . Sea

$$\gamma := CL_{\frac{e_p}{p}} \quad \text{y} \quad \Lambda_p := D\Lambda.$$

Luego  $\Lambda_p = \mathbb{Z}f_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}f_{p-1} \oplus \mathbb{Z}e_p$  donde  $f_i := De_i$  para  $1 \leq i \leq p-1$ .

Necesitaremos el siguiente resultado sobre estructuras spin en  $M_p$ .

**PROPOSICIÓN 8.1.1.** *Sea  $p = 2m + 1 = 4r + 3$  primo. La  $\mathbb{Z}_p$ -variedad  $M_p$  definida en (8.1.1) es spin y admite exactamente dos estructuras spin  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  de la forma*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(L_{f_j}) = \varepsilon_2(L_{f_j}) = 1 \quad (1 \leq j \leq p-1), \quad \varepsilon_1(L_{e_p}) = 1, \quad \varepsilon_2(L_{e_p}) = -1, \\ \varepsilon_1(\gamma) = (-1)^{r+1} x\left(\frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}, \dots, \frac{(2r+1)\pi}{p}\right), \quad \varepsilon_2(\gamma) = (-1)^r x\left(\frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}, \dots, \frac{(2r+1)\pi}{p}\right), \end{aligned}$$

en la notación de (2.1.6).

**DEMOSTRACIÓN.** Basta ver que podemos elegir  $\delta_\varepsilon \in \text{Hom}(\Lambda_p, \{\pm 1\})$  que satisface las condiciones  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  en (3.2.5); luego, por el Teorema 3.2.1, éste se extiende a un morfismo  $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \text{Spin}(n)$  tal que  $\mu \circ \varepsilon = r$ .

Como  $\mu^{-1}(C) = \{\pm x(\frac{\pi}{p}, \dots, \frac{m\pi}{p})\}$  tenemos que  $\varepsilon(\gamma) = \sigma x(\frac{\pi}{p}, \dots, \frac{m\pi}{p})$  con  $\sigma \in \{\pm 1\}$ . Ahora, como  $\gamma^p = L_{e_p}$ , la condición  $(\varepsilon_1)$  dice que

$$\delta_p = \varepsilon(L_{e_p}) = \varepsilon(\gamma)^p = \sigma x\left(\frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}, \dots, \frac{m\pi}{p}\right)^p = \sigma x(\pi, 2\pi, \dots, m\pi) = \sigma(-1)^{r+1}$$

donde usamos que  $x(\theta)^k = x(k\theta)$  (ver (2.1.8)) y la conmutatividad en  $\mathbb{C}l(n)$  de los elementos  $e_{2i-1}e_{2i}$  y  $e_{2j-1}e_{2j}$  con  $i \neq j$ .

Para determinar condiciones sobre  $\delta_1, \dots, \delta_{p-1}$  usamos la condición  $(\varepsilon_2)$  y la matriz entera  $B$ . Para esto, supongamos que  $\varepsilon$  es una estructura spin de  $\Gamma_p$  y definimos  $\varepsilon' : \Gamma \rightarrow \text{Spin}(n)$  como  $\varepsilon' = \varepsilon \circ I_D$  donde  $I_D$  es conjugación por  $D$ . Como  $\varepsilon(L_{(C-Id)\Lambda_p}) = \varepsilon(DL_{(B-Id)\Lambda}D^{-1}) = \varepsilon'(L_{(B-Id)\Lambda})$  tenemos que

$$\varepsilon(L_{(C-Id)\Lambda_p}) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \varepsilon'(L_{(B-Id)\Lambda}) = 1.$$

Ahora,

$$(B - Id)e_j = \begin{cases} -e_j + e_{j+1} & 1 \leq j \leq p-2 \\ -e_1 - \cdots - e_{p-2} - 2e_{p-1} & j = p-1. \end{cases}$$

Luego, las ecuaciones  $1 = \varepsilon'(L_{(B-Id)e_j}) = \varepsilon'(L_{e_j})\varepsilon'(L_{e_{j+1}})$  para  $1 \leq j \leq p-2$  y  $1 = \varepsilon'(L_{(B-Id)e_{p-1}}) = \varepsilon'(L_{e_1}) \cdots \varepsilon'(L_{e_{p-2}})$  implican que  $\varepsilon'(L_{e_j}) = 1$  para todo  $1 \leq j \leq p-1$ , pues  $p$  es impar. Así, para  $1 \leq j \leq p-1$ , tenemos

$$\delta_j = \varepsilon(L_{f_j}) = \varepsilon(L_{De_j}) = \varepsilon(DL_{e_j}D^{-1}) = \varepsilon'(L_{e_j}) = 1.$$

Entonces,  $M_p$  tiene 2 estructuras spin

$$\varepsilon = (1, \dots, 1, (-1)^{r+1}\sigma; \sigma x\left(\frac{\pi}{p}, \dots, \frac{m\pi}{p}\right))$$

determinadas por la elección de  $\sigma \in \{\pm 1\}$ .  $\square$

## 8.2. Función eta e invariante eta de $\mathbb{Z}_p$ -variedades

Ahora podemos enunciar el resultado más importante de este capítulo.

**TEOREMA 8.2.1.** *Sean  $M_p$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  como en la Proposición 8.1.1. La serie eta de  $M_p$ , para  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , está dada respectivamente por:*

$$(8.2.1) \quad \begin{aligned} \eta_{\rho, \varepsilon_1}(s) &= \frac{-2p^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi p)^s} \sum_{k=1}^{p-1} \chi_{\rho}(\gamma^k) \binom{k}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \sin\left(\frac{2l\pi k}{p}\right) \zeta\left(s, \frac{l}{p}\right) \\ \eta_{\rho, \varepsilon_2}(s) &= \frac{-2p^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi p)^s} \sum_{k=1}^{p-1} \chi_{\rho}(\gamma^k) (-1)^k \binom{k}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \sin\left(\frac{(2l+1)\pi k}{p}\right) \zeta\left(s, \frac{2l+1}{2p}\right) \end{aligned}$$

donde  $\binom{\cdot}{p}$  denota el símbolo de Legendre módulo  $p$  y  $\zeta(s, \alpha)$  es la función zeta de Hurwitz, definida para  $Re(s) > 1$  y  $\alpha \in (0, 1]$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Calcularemos los distintos ingredientes que aparecen en la fórmula (5.3.4) para la función  $\eta(s)$  para las dos estructuras spin dadas. Para todo  $1 \leq k \leq p-1$ , tenemos que  $(\Lambda_{\varepsilon}^*)^{B^k} = \mathbb{Z}e_p$  para  $\varepsilon_1$  mientras que  $(\Lambda_{\varepsilon}^*)^{B^k} = (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})e_p$  para  $\varepsilon_2$ . En ambos casos, para  $1 \leq k \leq p-1$ , tenemos

$$(\Lambda_{\varepsilon, \mu}^*)^{B^k} = \{\pm \mu e_p\}.$$

Luego,  $\mu = j$  para  $\varepsilon_1$  y  $\mu = j - \frac{1}{2}$  para  $\varepsilon_2$  con  $j \in \mathbb{N}$ . Tomamos

$$x_{\gamma^k} = \varepsilon_i(\gamma)^k,$$

para  $i = 1, 2$  y  $1 \leq k \leq p-1$ . Esto implica que  $\sigma(e_p, x_{\gamma^j}) = 1$  para  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

Como  $\gamma^k = B^k L_{\frac{k}{p}e_p}$  para  $1 \leq k \leq p-1$ , por (5.2.7) y la Observación 5.2.4, tenemos

$$e_{\mu, \gamma^k, \sigma}(\delta_{\varepsilon}) = e^{-2\pi i \frac{\mu k}{p}} \sigma(\mu e_p, x_{\gamma^k}) + e^{2\pi i \frac{\mu k}{p}} \sigma(-\mu e_p, x_{\gamma^k}) = -2i \sin\left(\frac{2\pi \mu k}{p}\right).$$

Luego, salvo por el factor  $-2i$ , las sumas sobre  $\mu \in \frac{1}{2\pi} \mathcal{A}$  correspondientes a  $\gamma = \gamma^k$  en (5.3.4) para  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son respectivamente iguales a

$$(8.2.2) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2j\pi k}{p}\right)}{j^s} = \sum_{l=1}^{p-1} \sin\left(\frac{2l\pi k}{p}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(pj+l)^s} = \frac{1}{p^s} \sum_{l=1}^{p-1} \sin\left(\frac{2l\pi k}{p}\right) \zeta\left(s, \frac{l}{p}\right),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2j+1)\pi k}{p}\right)}{\left(j + \frac{1}{2}\right)^s} = \frac{1}{p^s} \sum_{l=0}^{p-1} \sin\left(\frac{(2l+1)\pi k}{p}\right) \zeta\left(s, \frac{2l+1}{2p}\right),$$

donde  $\zeta(s, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+\alpha)^s}$  denota la función zeta de Hurwitz para  $Re(s) > 1$  y  $\alpha \in (0, 1]$ .

Calculamos ahora el producto de senos en (5.3.4) en estos casos. Notamos que  $t_j(x_{\gamma^k})$  (ver (2.1.6)) depende de  $\gamma^k$  y de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Para  $h = 1, 2$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin t_j(x_{\gamma^k}) &= (-1)^{k(r+h)} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin\left(\frac{\pi j k}{p}\right) \\ &= (-1)^{k(r+h)} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\lfloor \frac{jk}{p} \rfloor} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin\left(\frac{\pi j}{p}\right) \\ &= (-1)^{k(r+h)} (-1)^{s_p(k)} \frac{\sqrt{p}}{2^{2r+1}}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación  $s_p(k) = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \lfloor \frac{jk}{p} \rfloor$  y las siguientes identidades de la función  $\Gamma(z)$  bien conocidas:

$$\sin(\pi z) = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)},$$

$$(2\pi)^{\frac{p-1}{2}} \Gamma(z) = p^{z-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{p}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{z+p-1}{p}\right).$$

Ahora, si  $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$  denota el símbolo de Legendre, entonces, como  $p = 4r + 3$ , tenemos (ver [A $\mathbf{p}$ ], Thms. 9.6 y 9.7)

$$(-1)^{s_p(k)} = (-1)^{(k-1)\left(\frac{p^2-1}{8}\right)} \left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{(k-1)(r+1)} \left(\frac{k}{p}\right).$$

De esta manera, obtenemos

$$(8.2.3) \quad \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin t_j(x_{\gamma^k}) = \begin{cases} (-1)^{(r+1)} 2^{-2r-1} \sqrt{p} \left(\frac{k}{p}\right) & \text{para } \varepsilon_1 \\ (-1)^{(r+1)} 2^{-2r-1} (-1)^k \sqrt{p} \left(\frac{k}{p}\right) & \text{para } \varepsilon_2. \end{cases}$$

Ahora, partiendo de (5.3.4) y usando (8.2.2) y (8.2.3) llegamos a las expresiones para las eta series de  $(M_p, \varepsilon_h)$ ,  $h = 1, 2$ , dadas en (8.2.1).  $\square$

**COROLARIO 8.2.2.** *Las funciones  $\eta_{\rho, \varepsilon_h}(s)$ , para  $h = 1, 2$ , se pueden expresar de la siguiente manera*

$$\eta_{\rho, \varepsilon_h}(s) = \frac{-2}{\sqrt{p}(2\pi p)^s} \sum_{k=1}^{p-1} \chi_{\rho}(\gamma^k) (-1)^{k\beta(h)} \left(\frac{k}{p}\right) \sum_{l=1-\beta(h)}^{m-\beta(h)} \sin\left(\frac{(2l+\beta(h))\pi k}{p}\right) Z_{l,p}^h(s)$$

donde

$$Z_{l,p}^h(s) := \zeta\left(s, \frac{2l+\beta(h)}{2p}\right) - \zeta\left(s, 1 - \frac{2l+\beta(h)}{2p}\right)$$

y  $\beta(h) = 0$  si  $h$  es impar y  $\beta(h) = 1$  si  $h$  es par.

En particular, la continuación meromorfa de  $\eta_{\rho, \varepsilon_h}(s)$  a  $\mathbb{C}$ ,  $h = 1, 2$ , resulta holomorfa en todas partes.

**DEMOSTRACIÓN.** Primero, observemos que

$$\sin\left(\frac{2(p-l)\pi k}{p}\right) = -\sin\left(\frac{2l\pi k}{p}\right) \quad \text{y} \quad \sin\left(\frac{2(p-l-1)\pi k}{p}\right) = -\sin\left(\frac{(2l+1)\pi k}{p}\right).$$

Luego, juntando las contribuciones de  $l$  y  $p-l$  en  $\eta_{\rho, \varepsilon_1}(s)$ , y las de  $l$  y  $p-(l+1)$  en  $\eta_{\rho, \varepsilon_2}(s)$ , y usando que  $\beta(1) = 0$  y  $\beta(2) = 1$ , vemos que las



expresiones (8.2.1) se pueden escribir como en el enunciado del corolario. La holomorfa en todo  $\mathbb{C}$  de las continuaciones meromorfas de  $\eta_{\rho, \varepsilon_h}(s)$ ,  $h = 1, 2$ , es consecuencia directa de dicha expresión.  $\square$

Como consecuencia del teorema anterior podemos dar una expresión para los invariantes  $\eta$  asociados a  $D_\rho$ .

**TEOREMA 8.2.3.** *Sean  $M_p$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  como en el Teorema 8.2.1. Entonces, Los invariantes  $\eta$  de  $M_p$  tienen las siguientes expresiones*

$$(8.2.4) \quad \begin{aligned} \eta_{\rho, \varepsilon_1} &= \frac{-1}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{p-1} \chi_\rho(\gamma^k) \left(\frac{k}{p}\right) \cot\left(\frac{k\pi}{p}\right), \\ \eta_{\rho, \varepsilon_2} &= \frac{-1}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{p-1} \chi_\rho(\gamma^k) (-1)^k \left(\frac{k}{p}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{k\pi}{p}\right). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, observamos que para  $1 \leq k \leq p-1$  tenemos

$$(8.2.5) \quad \sum_{l=0}^{p-1} \sin\left(\frac{2l\pi k}{p}\right) = 0 = \sum_{l=0}^{p-1} \sin\left(\frac{(2l+1)\pi k}{p}\right).$$

En efecto, sabemos que  $\sum_{l=0}^{p-1} \omega^l = 0$  con  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$  y, como  $p$  es primo, también se tiene  $\sum_{l=0}^{p-1} \omega^{kl} = 0$  pues  $(k, p) = 1$ . De aquí sigue la primera identidad. Además,

$$\sum_{l=0}^{p-1} \sin\left(\frac{(2l+1)\pi k}{p}\right) = \cos\left(\frac{\pi k}{p}\right) \sum_{l=0}^{p-1} \sin\left(\frac{2l\pi k}{p}\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{p}\right) \sum_{l=0}^{p-1} \cos\left(\frac{2l\pi k}{p}\right) = 0.$$

Usando las expresiones en (8.2.5), junto con el hecho que

$$\zeta(0, \alpha) = \frac{1}{2} - \alpha$$

([WW, 13.21]), vemos que las sumas sobre  $l$  en las expresiones (8.2.1), evaluadas en  $s = 0$ , son, para  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , respectivamente iguales a

$$(8.2.6) \quad -\frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} l \sin\left(\frac{2l\pi k}{p}\right) \quad \text{y} \quad -\frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} l \sin\left(\frac{(2l+1)\pi k}{p}\right).$$

Ahora, afirmamos que

$$(8.2.7) \quad \sum_{l=1}^{p-1} l \sin\left(\frac{2l\pi k}{p}\right) = -\frac{p}{2} \cot\left(\frac{k\pi}{p}\right),$$

$$(8.2.8) \quad \sum_{l=0}^{p-1} l \sin\left(\frac{(2l+1)\pi k}{p}\right) = -\frac{p}{2} \operatorname{cosec}\left(\frac{k\pi}{p}\right).$$

Usaremos la siguiente identidad bien conocida

$$(8.2.9) \quad \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{N-1} \cos(lx) = \frac{\sin\left(\left(N - \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Derivando en (8.2.9) con respecto a  $x$  y tomando  $N = p$  tenemos

$$-\sum_{l=1}^{p-1} l \sin(lx) = \frac{(2p-1) \cos((p-\frac{1}{2})x)}{4 \sin(\frac{x}{2})} - \frac{\cos(\frac{x}{2}) \sin((p-\frac{1}{2})x)}{4 \sin^2(\frac{x}{2})}$$

y evaluando ambos miembros en  $x = \frac{2k\pi}{p}$  se obtiene (8.2.7). Para verificar (8.2.8) primero notamos que

$$(8.2.10) \quad \sum_{l=1}^{p-1} l \cos(\frac{2l\pi k}{p}) = p \sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos(\frac{2l\pi k}{p}) = -\frac{p}{2}.$$

En efecto, la primera igualdad es consecuencia directa de

$$\cos(\frac{2(p-l)\pi k}{p}) = \cos(2\pi k - \frac{2l\pi k}{p}) = \cos(\frac{2l\pi k}{p})$$

y la segunda sale tomando  $N = \frac{p+1}{2}$  y  $x = \frac{2\pi k}{p}$  en (8.2.9). Ahora, usando (8.2.7) y (8.2.10) obtenemos (8.2.8):

$$\sum_{l=0}^{p-1} l \sin(\frac{(2l+1)\pi k}{p}) = \cos(\frac{\pi k}{p}) \cot(\frac{\pi k}{p}) (-\frac{p}{2}) + \sin(\frac{\pi k}{p}) (-\frac{p}{2}) = -\frac{p}{2} \operatorname{cosec}(\frac{\pi k}{p}).$$

Finalmente, de (8.2.1), (8.2.6), (8.2.7) y (8.2.8) se obtienen las expresiones (8.2.3) buscadas.  $\square$

**COROLARIO 8.2.4.** *Las expresiones (8.2.4) de los invariantes eta de la  $\mathbb{Z}_p$ -variedad  $M_p$  en el Teorema 8.2.3 pueden escribirse más sucintamente de la siguiente manera:*

$$(8.2.11) \quad \eta_{\rho, \varepsilon_1} = \frac{-2}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{Re}(\chi_{\rho}(\gamma^k)) \binom{k}{p} \cot(\frac{k\pi}{p}),$$

$$\eta_{\rho, \varepsilon_2} = \frac{-2}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{Re}(\chi_{\rho}(\gamma^k)) (-1)^k \binom{k}{p} \operatorname{cosec}(\frac{k\pi}{p}).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Comparamos las contribuciones de  $k$  y  $p-k$  en las expresiones (8.2.4). Primero notamos que:

$$\binom{k}{p} \cot(\frac{k\pi}{p}) = \binom{p-k}{p} \cot(\frac{(p-k)\pi}{p})$$

$$(-1)^k \binom{k}{p} \operatorname{cosec}(\frac{k\pi}{p}) = (-1)^{p-k} \binom{p-k}{p} \operatorname{cosec}(\frac{(p-k)\pi}{p}).$$

Estas identidades pueden verificarse fácilmente usando que

$$\binom{p-k}{p} = \binom{-k}{p} = \binom{-1}{p} \binom{k}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{k}{p} = -\binom{k}{p}$$

donde en la última igualdad se usa el hecho que  $p \equiv 3 \pmod{4}$ .

Ahora, observar que

$$\chi_\rho(\gamma^{p-k}) = \chi_\rho((\gamma^k)^{-1}) = \overline{\chi_\rho(\gamma^k)}$$

puesto que  $\gamma^{p-k} = \gamma^p \gamma^{-k} = L_{e_p} \gamma^{-k}$  y por lo tanto  $\rho(\gamma^{p-k}) = \rho(\gamma^{-k})$  ya que  $\rho|_\Lambda = 1$ .

De estas observaciones siguen las expresiones en el corolario.  $\square$

Para ilustrar los resultados anteriores, consideramos ahora el caso más simple de todos, es decir cuando  $p = 3$  y  $(\rho, V) = (1, \mathbb{C})$ . Este es el caso considerado en [Pf].

EJEMPLO 8.2.5 ( $F \simeq \mathbb{Z}_3$ ). Como  $n = p = 3$  tenemos  $m = 1$  y  $r = 0$ . Las dos estructuras spin están dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1, 1, 1, -x(\frac{\pi}{3})) = (1, 1, 1, x(\frac{\pi}{3} + \pi)) = (1, 1, 1, x(\frac{4\pi}{3})), \\ \varepsilon_2 &= (1, 1, -1, x(\frac{\pi}{3})) \end{aligned}$$

en la notación del Capítulo 7 (ver (7.2.7)).

Ahora, como  $(\frac{1}{3}) = 1$ , por el Corolario 8.2.2 llegamos a que

$$\eta_{\varepsilon_h}(s) = \begin{cases} \frac{-2}{(6\pi)^s} (\zeta(s, \frac{1}{3}) - \zeta(s, \frac{2}{3})) & h = 1 \\ \frac{2}{(6\pi)^s} (\zeta(s, \frac{1}{6}) - \zeta(s, \frac{5}{6})) & h = 2. \end{cases}$$

Para calcular los invariantes  $\eta$  evaluamos las expresiones de arriba en  $s = 0$ . Se tiene que

$$\eta_{\varepsilon_1}(0) = -2(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$$

y

$$\eta_{\varepsilon_2}(0) = 2(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}) = \frac{4}{3}.$$

También, usando el Corolario 8.2.4 directamente, tenemos

$$\eta_{\varepsilon_h}(0) = \begin{cases} \frac{-2}{\sqrt{3}} ((\frac{1}{3}) \cot(\frac{\pi}{3})) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3} & h = 1 \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} (-(\frac{1}{3}) \operatorname{cosec}(\frac{\pi}{3})) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} & h = 2. \end{cases}$$

La coincidencia de estos valores con los obtenidos en [Pf] y [SS], en este caso, brinda un poco de alivio después de tantos cálculos.

OBSERVACIÓN 8.2.6. Supongamos que la representación  $\rho : \Gamma \rightarrow U(V)$  se extiende a  $\mathrm{SO}(n)$ , es decir, existe  $\tau : \mathrm{SO}(n) \rightarrow U(V)$  tal que  $\rho = \tau \circ r$ . Entonces, como  $B^k$  es conjugada a  $B$  en  $\mathrm{SO}(n)$ , tenemos  $\chi_\rho(\gamma^k) = \chi_\rho(\gamma)$  para todo  $k$ . Luego, en este caso, las expresiones (8.2.2) y (8.2.4) en los Teoremas 8.2.1 y 8.2.3 se simplifican bastante.

**Apéndice: Invariantes  $\eta$  para  $p < 10000$** 

Para terminar el capítulo, daremos explícitamente los invariantes  $\eta$  para todas las  $p$ -variedades en la familia,  $p = 4r + 3$  primo,  $7 \leq p \leq 9967$ , obtenidas con la ayuda de una computadora, usando las fórmulas (8.2.4). También damos algunos valores de  $d_0(\varepsilon_1)$ , la dimensión del espacio de spinores armónicos (ver (5.2.10) y (2.2.3)). Notar que  $d_0(\varepsilon_2) = 0$  por el Teorema 5.2.5. Resumimos la información en las siguientes tablas:

$r$	$p = 4r + 3$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$	$d_0(\varepsilon_1)$	$r$	$p = 4r + 3$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1	7	-2	0	2	19	79	-10	0
2	11	-2	4	2	20	83	-6	12
4	19	-2	4	26	25	103	-10	0
5	23	-6	0	90	26	107	-6	12
7	31	-6	0	1058	31	127	-10	0
10	43	-2	4	48770	32	131	-10	20
11	47	-10	0	178482	34	139	-6	12
14	59	-6	12	9099506	37	151	-14	0
16	67	-2	4	128207978	40	163	-2	4
17	71	-14	0	483939978	41	167	-22	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$	$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$	$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
44	179	-10	20	76	307	-6	12	110	443	-10	20
47	191	-26	0	77	311	-38	0	115	463	-14	0
49	199	-18	0	82	331	-6	12	116	467	-14	28
52	211	-6	12	86	347	-10	20	119	479	-50	0
55	223	-14	0	89	359	-38	0	121	487	-14	0
56	227	-10	20	91	367	-18	0	122	491	-18	36
59	239	-6	12	94	379	-6	12	124	499	-6	12
62	251	-14	28	95	383	-34	0	125	503	-42	0
65	263	-26	0	104	419	-18	36	130	523	-10	20
67	271	-22	0	107	431	-42	0	136	547	-6	12
70	283	-6	12	109	439	-30	0	140	563	-18	36

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$	$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$	$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
142	571	-10	20	179	719	-62	0	215	863	-42	0
146	587	-14	28	181	727	-26	0	220	883	-6	12
149	599	-50	0	184	739	-10	20	221	887	-58	0
151	607	-26	0	185	743	-42	0	226	907	-6	12
154	619	-10	20	187	751	-30	0	227	911	-62	0
157	631	-26	0	196	787	-10	20	229	919	-38	0
160	643	-6	12	202	811	-14	28	236	947	-10	20
161	647	-46	0	205	823	-18	0	241	967	-22	0
164	659	-22	44	206	827	-14	28	242	971	-30	60
170	683	-10	20	209	839	-66	0	245	983	-54	0
172	691	-10	20	214	859	-14	28	247	991	-34	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
254	1019	-26	52
257	1031	-70	0
259	1039	-46	0
262	1051	-10	20
265	1063	-38	0
271	1087	-18	0
272	1091	-34	68
275	1103	-46	0
280	1123	-10	20
287	1151	-82	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
290	1163	-14	28
292	1171	-14	28
296	1187	-18	36
305	1223	-70	0
307	1231	-54	0
314	1259	-30	60
319	1279	-46	0
320	1283	-22	44
322	1291	-18	36
325	1303	-22	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
326	1307	-22	44
329	1319	-90	0
331	1327	-30	0
341	1367	-50	0
349	1399	-54	0
355	1423	-18	0
356	1427	-30	60
359	1439	-78	0
361	1447	-46	0
362	1451	-26	52

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
364	1459	-22	44
367	1471	-46	0
370	1483	-14	28
371	1487	-74	0
374	1499	-26	52
377	1511	-98	0
380	1523	-14	28
382	1531	-22	44
385	1543	-38	0
389	1559	-102	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
391	1567	-30	0
392	1571	-34	68
394	1579	-18	36
395	1583	-66	0
401	1607	-54	0
404	1619	-30	60
406	1627	-14	28
415	1663	-34	0
416	1667	-26	52
424	1699	-22	44

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
430	1723	-10	20
436	1747	-10	20
439	1759	-54	0
445	1783	-34	0
446	1787	-14	28
452	1811	-46	92
455	1823	-90	0
457	1831	-38	0
461	1847	-86	0
466	1867	-10	20

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
467	1871	-90	0
469	1879	-54	0
476	1907	-26	52
482	1931	-42	84
487	1951	-66	0
494	1979	-46	92
496	1987	-14	28
499	1999	-54	0
500	2003	-18	36
502	2011	-14	28

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
506	2027	-22	44
509	2039	-90	0
515	2063	-90	0
520	2083	-14	28
521	2087	-70	0
524	2099	-38	76
527	2111	-98	0
532	2131	-26	52
535	2143	-26	0
544	2179	-14	28

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
550	2203	-10	20
551	2207	-78	0
559	2239	-70	0
560	2243	-30	60
562	2251	-14	28
566	2267	-22	44
571	2287	-58	0
577	2311	-58	0
584	2339	-38	76
586	2347	-10	20

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
587	2351	-126	0
592	2371	-26	52
595	2383	-58	0
599	2399	-118	0
602	2411	-46	92
605	2423	-66	0
611	2447	-74	0
614	2459	-38	76
616	2467	-14	28
625	2503	-42	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
632	2531	-34	68
634	2539	-22	44
635	2543	-70	0
637	2551	-82	0
644	2579	-42	84
647	2591	-114	0
661	2647	-30	0
664	2659	-26	52
665	2663	-86	0
667	2671	-46	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
670	2683	-10	20
671	2687	-102	0
674	2699	-30	60
676	2707	-14	28
677	2711	-106	0
679	2719	-82	0
682	2731	-22	44
691	2767	-42	0
697	2791	-78	0
700	2803	-18	36

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
704	2819	-42	84
710	2843	-30	60
712	2851	-22	44
719	2879	-114	0
721	2887	-50	0
725	2903	-118	0
731	2927	-62	0
734	2939	-58	116
740	2963	-26	52
742	2971	-22	44

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
749	2999	-146	0
752	3011	-42	84
754	3019	-14	28
755	3023	-94	0
766	3067	-14	28
769	3079	-82	0
770	3083	-26	52
779	3119	-138	0
790	3163	-18	36
791	3167	-106	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
796	3187	-14	28
797	3191	-138	0
800	3203	-22	44
812	3251	-62	124
814	3259	-18	36
817	3271	-54	0
824	3299	-54	108
826	3307	-18	36
829	3319	-82	0
830	3323	-34	68

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
832	3331	-30	60
835	3343	-38	0
836	3347	-22	44
839	3359	-138	0
842	3371	-42	84
847	3391	-74	0
851	3407	-114	0
865	3463	-38	0
866	3467	-38	76
872	3491	-46	92

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
874	3499	-22	44
877	3511	-82	0
881	3527	-130	0
884	3539	-46	92
886	3547	-18	36
889	3559	-90	0
892	3571	-30	60
895	3583	-58	0
901	3607	-38	0
905	3623	-90	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
907	3631	-86	0
910	3643	-18	36
914	3659	-58	116
917	3671	-162	0
922	3691	-26	52
929	3719	-134	0
931	3727	-62	0
934	3739	-22	44
941	3767	-78	0
944	3779	-62	124

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
950	3803	-30	60
955	3823	-58	0
961	3847	-46	0
962	3851	-50	100
965	3863	-122	0
976	3907	-14	28
977	3911	-166	0
979	3919	-78	0
980	3923	-46	92
982	3931	-22	44

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
985	3943	-54	0
986	3947	-34	68
991	3967	-66	0
1000	4003	-26	52
1001	4007	-114	0
1004	4019	-38	76
1006	4027	-18	36
1012	4051	-22	44
1019	4079	-170	0
1022	4091	-66	132

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1024	4099	-30	60
1027	4111	-78	0
1031	4127	-98	0
1034	4139	-38	76
1039	4159	-62	0
1052	4211	-46	92
1054	4219	-30	60
1057	4231	-102	0
1060	4243	-18	36
1064	4259	-70	140

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1067	4271	-130	0
1070	4283	-42	84
1081	4327	-38	0
1084	4339	-34	68
1090	4363	-18	36
1097	4391	-158	0
1105	4423	-66	0
1111	4447	-34	0
1112	4451	-58	116
1115	4463	-110	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1120	4483	-18	36
1126	4507	-26	52
1129	4519	-58	0
1130	4523	-42	84
1136	4547	-34	68
1141	4567	-66	0
1145	4583	-122	0
1147	4591	-98	0
1150	4603	-14	28
1159	4639	-102	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1160	4643	-26	52
1162	4651	-34	68
1165	4663	-66	0
1169	4679	-182	0
1172	4691	-42	84
1175	4703	-150	0
1180	4723	-18	36
1187	4751	-182	0
1189	4759	-110	0
1195	4783	-46	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1196	4787	-50	100
1199	4799	-126	0
1207	4831	-66	0
1217	4871	-182	0
1225	4903	-54	0
1229	4919	-182	0
1232	4931	-70	140
1235	4943	-110	0
1237	4951	-62	0
1241	4967	-118	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1246	4987	-18	36
1249	4999	-66	0
1250	5003	-30	60
1252	5011	-42	84
1255	5023	-50	0
1259	5039	-166	0
1262	5051	-58	116
1264	5059	-38	76
1271	5087	-138	0
1274	5099	-78	156

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1276	5107	-14	28
1279	5119	-78	0
1286	5147	-38	76
1291	5167	-66	0
1292	5171	-70	140
1294	5179	-22	44
1306	5227	-30	60
1307	5231	-150	0
1319	5279	-174	0
1325	5303	-110	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1330	5323	-30	60
1336	5347	-26	52
1337	5351	-186	0
1346	5387	-46	92
1349	5399	-158	0
1351	5407	-86	0
1354	5419	-26	52
1357	5431	-114	0
1360	5443	-18	36
1367	5471	-142	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1369	5479	-86	0
1370	5483	-34	68
1375	5503	-50	0
1376	5507	-46	92
1379	5519	-194	0
1381	5527	-38	0
1382	5531	-46	92
1390	5563	-30	60
1397	5591	-198	0
1405	5623	-66	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1409	5639	-174	0
1411	5647	-42	0
1412	5651	-62	124
1414	5659	-38	76
1420	5683	-22	44
1427	5711	-218	0
1435	5743	-58	0
1444	5779	-26	52
1445	5783	-106	0
1447	5791	-66	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1451	5807	-130	0
1456	5827	-30	60
1459	5839	-74	0
1460	5843	-50	100
1462	5851	-42	84
1466	5867	-42	84
1469	5879	-202	0
1475	5903	-146	0
1480	5923	-14	28
1481	5927	-142	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1484	5939	-70	140
1496	5987	-30	60
1501	6007	-54	0
1502	6011	-54	108
1510	6043	-18	36
1511	6047	-142	0
1516	6067	-30	60
1519	6079	-114	0
1522	6091	-30	60
1532	6131	-62	124

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1535	6143	-82	0
1537	6151	-118	0
1540	6163	-22	44
1549	6199	-78	0
1550	6203	-34	68
1552	6211	-30	60
1561	6247	-86	0
1565	6263	-154	0
1567	6271	-102	0
1571	6287	-102	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1574	6299	-86	172
1577	6311	-178	0
1580	6323	-42	84
1585	6343	-66	0
1589	6359	-202	0
1591	6367	-74	0
1594	6379	-34	68
1606	6427	-18	36
1612	6451	-34	68
1622	6491	-62	124

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1636	6547	-22	44
1637	6551	-234	0
1640	6563	-46	92
1642	6571	-30	60
1649	6599	-218	0
1651	6607	-90	0
1654	6619	-26	52
1664	6659	-46	92
1669	6679	-110	0
1672	6691	-42	84

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1675	6703	-46	0
1679	6719	-210	0
1690	6763	-18	36
1694	6779	-78	156
1697	6791	-162	0
1700	6803	-38	76
1705	6823	-66	0
1706	6827	-34	68
1715	6863	-162	0
1717	6871	-90	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1720	6883	-18	36
1724	6899	-70	140
1726	6907	-34	68
1727	6911	-174	0
1736	6947	-58	116
1739	6959	-190	0
1741	6967	-66	0
1742	6971	-90	180
1745	6983	-114	0
1747	6991	-142	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1754	7019	-86	172
1756	7027	-22	44
1759	7039	-86	0
1760	7043	-46	92
1769	7079	-170	0
1775	7103	-154	0
1781	7127	-158	0
1787	7151	-170	0
1789	7159	-130	0
1796	7187	-50	100

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1801	7207	-58	0
1802	7211	-70	140
1804	7219	-30	60
1810	7243	-26	52
1811	7247	-94	0
1820	7283	-50	100
1826	7307	-50	100
1832	7331	-66	132
1837	7351	-66	0
1852	7411	-50	100

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1862	7451	-70	140
1864	7459	-30	60
1871	7487	-130	0
1874	7499	-66	132
1876	7507	-22	44
1880	7523	-70	140
1886	7547	-30	60
1889	7559	-230	0
1895	7583	-126	0
1897	7591	-130	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1900	7603	-22	44
1901	7607	-178	0
1909	7639	-62	0
1910	7643	-58	116
1921	7687	-58	0
1922	7691	-86	172
1924	7699	-54	108
1925	7703	-162	0
1930	7723	-18	36
1931	7727	-162	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
1939	7759	-98	0
1955	7823	-150	0
1966	7867	-22	44
1969	7879	-98	0
1970	7883	-34	68
1976	7907	-42	84
1979	7919	-194	0
1981	7927	-94	0
1987	7951	-102	0
1990	7963	-26	52

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2002	8011	-50	100
2009	8039	-226	0
2014	8059	-42	84
2021	8087	-162	0
2027	8111	-242	0
2030	8123	-42	84
2036	8147	-74	148
2041	8167	-66	0
2042	8171	-42	84
2044	8179	-50	100

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2047	8191	-110	0
2054	8219	-70	140
2057	8231	-214	0
2060	8243	-42	84
2065	8263	-86	0
2071	8287	-90	0
2072	8291	-94	188
2077	8311	-122	0
2090	8363	-70	140
2096	8387	-42	84

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2104	8419	-38	76
2105	8423	-166	0
2107	8431	-118	0
2110	8443	-22	44
2111	8447	-198	0
2116	8467	-30	60
2131	8527	-86	0
2134	8539	-34	68
2135	8543	-194	0
2140	8563	-18	36

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2149	8599	-126	0
2155	8623	-102	0
2156	8627	-42	84
2161	8647	-62	0
2165	8663	-134	0
2174	8699	-70	140
2176	8707	-30	60
2179	8719	-106	0
2182	8731	-34	68
2186	8747	-42	84

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2194	8779	-30	60
2195	8783	-146	0
2200	8803	-18	36
2201	8807	-162	0
2204	8819	-98	196
2207	8831	-218	0
2209	8839	-154	0
2215	8863	-58	0
2216	8867	-54	108
2221	8887	-86	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2230	8923	-38	76
2237	8951	-270	0
2240	8963	-58	116
2242	8971	-38	76
2249	8999	-198	0
2251	9007	-70	0
2252	9011	-66	132
2260	9043	-30	60
2264	9059	-78	156
2266	9067	-18	36

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2272	9091	-42	84
2275	9103	-114	0
2281	9127	-114	0
2287	9151	-134	0
2296	9187	-42	84
2299	9199	-102	0
2300	9203	-62	124
2306	9227	-50	100
2309	9239	-278	0
2320	9283	-22	44

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2327	9311	-194	0
2329	9319	-82	0
2330	9323	-58	116
2335	9343	-102	0
2342	9371	-98	196
2347	9391	-110	0
2350	9403	-22	44
2354	9419	-70	140
2357	9431	-182	0
2359	9439	-150	0

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2365	9463	-90	0
2366	9467	-82	164
2369	9479	-202	0
2372	9491	-90	180
2377	9511	-138	0
2384	9539	-110	220
2386	9547	-26	52
2387	9551	-258	0
2396	9587	-46	92
2404	9619	-38	76

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2405	9623	-190	0
2407	9631	-154	0
2410	9643	-22	44
2419	9679	-142	0
2429	9719	-266	0
2434	9739	-26	52
2435	9743	-210	0
2441	9767	-178	0
2446	9787	-22	44
2447	9791	-238	0
2450	9803	-74	148

$r$	$p$	$\eta_{\varepsilon_1}$	$\eta_{\varepsilon_2}$
2452	9811	-42	84
2459	9839	-182	0
2462	9851	-90	180
2464	9859	-42	84
2467	9871	-98	0
2470	9883	-34	68
2471	9887	-150	0
2476	9907	-30	60
2480	9923	-50	100
2482	9931	-46	92
2491	9967	-78	0

OBSERVACIÓN 8.2.7. Calculando primero el espectro y luego la serie eta por definición, y usando teoría de números, se pueden probar los siguientes hechos sobre  $\eta_{\varepsilon_h}$ ,  $h = 1, 2$ :

1.  $\eta_{\varepsilon_h} \in 2\mathbb{Z}$ ,  $h = 1, 2$ .
2.  $\eta_{\varepsilon_1} < 0$ ,  $\eta_{\varepsilon_2} \geq 0$  y  $\eta_{\varepsilon_2} = 0$  si y sólo si  $r$  es impar.
3.  $\eta_{\varepsilon_2} = -2\eta_{\varepsilon_1}$ , para  $r$  par.
4.  $\eta_{\varepsilon_1} = -4\frac{h_p}{\omega_p}$ , donde  $h_p$  es el número de clase de  $\mathbb{Q}(i\sqrt{p})$  y  $\omega_p$  es el número de raíces de la unidad en  $\mathbb{Q}(i\sqrt{p})$ .

Los detalles de estos y otros hechos formarán parte de un futuro trabajo.



## CAPÍTULO 9

### Espectro de Dirac, serie eta e invariante eta de $\mathbb{Z}_4$ -variedades

En este último capítulo, basado en [Po], miramos el caso más simple no estudiado hasta aquí, esto es  $F \simeq \mathbb{Z}_4$ . Consideramos una familia relativamente grande de  $\mathbb{Z}_4$ -variedades spin. Se obtendrán expresiones explícitas de la serie eta en términos de diferencias de funciones zeta de Hurwitz  $\zeta(s, \alpha)$ , con  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Esta expresión permitirá calcular los invariantes eta por simple evaluación en  $s = 0$ .

#### 9.1. Una familia de $\mathbb{Z}_4$ -variedades spin

Construiremos una familia, cuadrática en la dimensión, de  $\mathbb{Z}_4$ -variedades spin, no homeomorfas entre sí, con espectro de Dirac asimétrico. Tomamos  $\tilde{J} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Para cada  $0 \leq j, k < n$ , ponemos

$$(9.1.1) \quad B_{j,k} = \text{diag}(\underbrace{\tilde{J}, \dots, \tilde{J}}_j, \underbrace{-1, \dots, -1}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_l),$$

donde  $n = 2j + k + l$  y  $j, l \geq 1$ .

Luego  $B_{j,k} \in O(n)$ ,  $B_{j,k}^4 = Id$  y  $B_{j,k} \in SO(n)$  si y sólo si  $k$  es par. Sea  $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_n$  el retículo canónico de  $\mathbb{R}^n$  y para  $j, k$  como antes definimos los grupos

$$(9.1.2) \quad \Gamma_{j,k} := \langle B_{j,k}L_{\frac{e_n}{4}}, \Lambda \rangle.$$

Como  $\Lambda$  es estable por  $B_{j,k}$ ,  $(B_{j,k}^m - Id)\frac{m}{4}e_n = 0 \in \Lambda$ ,  $0 \leq m \leq 3$ , y  $(\sum_{m=0}^3 B_{j,k}^m)\frac{e_n}{4} = e_n \in \Lambda \setminus (\sum_{m=0}^3 B_{j,k}^m)\Lambda$ , por [MR, Prop. 1.1], cada  $\Gamma_{j,k}$  es un grupo de Bieberbach. De esta manera, si  $M_{j,k} := \Gamma_{j,k} \backslash \mathbb{R}^n$ , tenemos una familia

$$(9.1.3) \quad \mathcal{F}^n = \{M_{j,k} = \Gamma_{j,k} \backslash \mathbb{R}^n : 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, 0 \leq k \leq n - 2j - 1\}$$

de variedades compactas planas con grupo de holonomía  $F \simeq \mathbb{Z}_4$ . La cardinalidad de  $\mathcal{F}^n$  es  $\#\mathcal{F}^n = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor (n - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1) = o(\frac{n^2}{4})$ .

LEMA 9.1.1. *Las variedades  $M_{j,k} \in \mathcal{F}^n$  son no homeomorfas entre sí. En particular,  $H_1(M_{j,k}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}_2^{j+k}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Calculamos  $H_1(M_{j,k}, \mathbb{Z}) \simeq \Gamma_{j,k}/[\Gamma_{j,k}, \Gamma_{j,k}]$ . Si  $\gamma = B_{j,k}L_{\frac{e_n}{4}}$ , tenemos

$$\begin{aligned} [\Gamma_{j,k}, \Gamma_{j,k}] &= \langle [\gamma, L_{e_i}] = L_{(B-Id)e_i} : 1 \leq i \leq n \rangle \\ &= \langle L_{-e_1 \pm e_2}, \dots, L_{-e_{2j-1} \pm e_{2j}}, L_{2e_{2j+1}}, \dots, L_{2e_{2j+k}} \rangle. \end{aligned}$$

Usando esto, y el hecho de que  $\gamma^4 = L_{e_n}$ , es fácil chequear que  $H_1(M_{j,k}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}_2^{j+k}$ . Luego, si  $M_{j,k}$  y  $M_{j',k'}$  son homeomorfas entonces  $j+k = j'+k'$  y  $l = l'$  de donde sale que  $j = j'$  y  $k = k'$ .  $\square$

Ahora, estudiamos la existencia de estructuras spin para esta familia de  $\mathbb{Z}_4$ -variedades. Para tener orientabilidad, debemos restringirnos a variedades  $M_{j,k}$  con  $k = 2k_0$  par. Recordemos que el Teorema 3.2.1 da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de estructuras spin. En la notación de la Sección 3.2 tenemos

LEMA 9.1.2. *Toda  $\mathbb{Z}_4$ -variedad orientable  $M_{j,k} \in \mathcal{F}^n$ ,  $k = 2k_0$ , tiene exactamente  $2^{n-j}$  estructuras spin  $\varepsilon$  parametrizadas por las  $(n+1)$ -uplas  $(\delta_1, \dots, \delta_n, \sigma u_{B_{j,k}})$  como en (3.2.4) que cumplen:*

$$(9.1.4) \quad \delta_1 = \delta_2, \dots, \delta_{2j-1} = \delta_{2j} \quad y \quad \delta_n = (-1)^j$$

donde  $u_{B_{j,k}} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^j (1 + e_1 e_2) \cdots (1 + e_{2j-1} e_{2j}) e_{2j+1} \cdots e_{2j+k}$ .

DEMOSTRACIÓN. Notar que  $B_{j,k} = x_0(\underbrace{\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}}_j, \underbrace{\pi, \dots, \pi}_{k_0}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}) \in T_0$

en la notación de (2.1.6). Por (2.1.12),

$$\mu^{-1}(B_{j,k}) = \pm x(\frac{\pi}{4}, \dots, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}, 0, \dots, 0) \in T.$$

Sea  $\gamma_{j,k} = B_{j,k}L_{e_n}$ . Como  $\varepsilon(\gamma_{j,k}) = \sigma u_{B_{j,k}}$  y  $\gamma_{j,k}^4 = L_{e_n}$  para cada  $j, k$ , la condición  $(\varepsilon_1)$  da

$$\delta_n = \varepsilon(\gamma_{j,k})^4 = u_{j,k}^4 = x(\underbrace{\pi, \dots, \pi}_j, \underbrace{2\pi, \dots, 2\pi}_{k_0}, 0, \dots, 0) = (-1)^j$$

mientras que por la condición  $(\varepsilon_2)$  tenemos  $1 = \varepsilon(L_{(B_{j,k}-Id)e_{2i-1}}) = \delta_{2i-1}\delta_{2i}$  para  $1 \leq i \leq j$ , y por lo tanto vale (9.1.4). Como no hay más relaciones impuestas sobre los  $\delta_i$ 's, el resultado sigue.  $\square$

OBSERVACIÓN 9.1.3. La familia natural a considerar es  $\mathcal{F}^n$  con las matrices en (9.1.1) reemplazadas por

$$(9.1.5) \quad B_{j,h,k} = \text{diag}(\underbrace{\tilde{J}, \dots, \tilde{J}}_j, \underbrace{J, \dots, J}_h, \underbrace{-1, \dots, -1}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_l),$$

donde  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , con  $n = 2(j+h)+k+l$ ,  $j \geq 1$  y  $h+l \neq 0$ . Esto es, considerar la familia  $\mathcal{G}^n = \{M_{j,h,k} := \Gamma_{j,h,k} \setminus \mathbb{R}^n\}$  donde  $\Gamma_{j,h,k} = \langle B_{j,h,k}L_{\frac{e_n}{4}}, \Lambda \rangle$  si  $l \geq 1$  y  $\Gamma_{j,h,k} = \langle B_{j,h,k}L_{\frac{e_{2j+1}}{2}}, \Lambda \rangle$  si  $l = 0$ .

Sin embargo, cada variedad en esta familia más grande de  $\mathbb{Z}_4$ -variedades tiene serie eta (e invariante eta) trivial a menos que  $h = 0$  y  $l = 1$  (el caso considerado). En efecto,  $n_{B_{j,h,k}} \geq 2$  para todo  $j, h, k$  con  $h + l \geq 2$  y, por la Proposición 5.3.1, el espectro de  $D$  es simétrico. El caso restante ( $h = 1$  y  $l = 0$ ) es más complicado, pero sale procediendo como en la siguiente sección.

## 9.2. El espectro de Dirac

Como estamos buscando asimetría espectral de  $D$ , nos restringiremos a variedades orientables de dimensión impar en  $\mathcal{F}^n$  con  $F_1 \neq \emptyset$ . Luego, fijamos  $n = 2m + 1 = 4r + 3$  y tomamos

$$(9.2.1) \quad \mathcal{F}_1^n := \{M_{j,k} \in \mathcal{F}^n : k = 2k_0, l = 1\}.$$

También, para cada  $M_{j,k} \in \mathcal{F}_1^n$  elegimos la estructura spin

$$(9.2.2) \quad \varepsilon_{j,k}^\sigma = (1, \dots, 1, (-1)^j, \sigma x_{j,k_0}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})), \quad \sigma \in \{\pm 1\},$$

donde usamos la notación de (2.1.10)

$$x_{j,k_0}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) := x(\underbrace{\frac{\pi}{4}, \dots, \frac{\pi}{4}}_j, \underbrace{\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}}_{k_0}).$$

Ahora, usando la expresión (5.2.9), calcularemos las multiplicidades de los autovalores del operador de Dirac de las variedades spin  $(M_{j,k}, \varepsilon_{j,k}^\sigma)$ . Por simpleza, tomaremos  $(\rho, V) = (1, \mathbb{C})$ .

Hará falta considerar la siguiente función  $\alpha(j) = 2^{\frac{1-(-1)^j}{2}}$ , es decir

$$(9.2.3) \quad \alpha(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ es par} \\ 2 & \text{si } j \text{ es impar.} \end{cases}$$

**PROPOSICIÓN 9.2.1.** *Sea  $n = 2m + 1 = 4r + 3$ . Las  $\mathbb{Z}_4$ -variedades  $M_{j,k} \in \mathcal{F}_1^n$  con estructuras spin  $\varepsilon_{j,k}^\sigma$  como en (9.2.2) tienen espectro de Dirac asimétrico y la multiplicidad de los autovalores no nulos  $\pm 2\pi\mu$  de  $D$  están dadas por*

$$(9.2.4) \quad d_\mu^\pm(\varepsilon_{j,k}^\sigma) = \begin{cases} 4^{r-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma, \mu}| \pm \sigma (-1)^{r + \lceil \frac{t}{\alpha(j)} \rceil} 2^{m - \alpha(j) - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor} & \mu = \frac{2t+1}{\alpha(j)} \\ 4^{r-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma, \mu}| & \text{otro caso} \end{cases}$$

para  $k \neq 0$ , y por

$$d_\mu^\pm(\varepsilon_{m,0}^\sigma) = \begin{cases} 4^{r-1} |\Lambda_{\varepsilon_{m,0}^\sigma, \mu}| \pm (-1)^r 2^{r-1} ((-1)^t 2^r + \sigma (-1)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}) & \mu = \frac{2t+1}{2} \\ 4^{r-1} |\Lambda_{\varepsilon_{m,0}^\sigma, \mu}| & \text{otro caso} \end{cases}$$

para  $k = 0$ , donde  $t \in \mathbb{N}_0$ .

Más aún,  $M_{j,k}$  no tiene spinores armónicos no nulos, o sea,  $d_\mu^\pm(\varepsilon_{j,k}^\sigma) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Para  $j, k$  fijos, sea  $\gamma = B_{j,k}L_{\frac{\varepsilon_n}{4}}$  el generador de  $\Gamma_{j,k}$ . Para  $1 \leq h \leq 3$ , sea  $b_h \in \mathbb{R}^n$  definido por  $\gamma^h = B_{j,k}^h L_{b_h}$  y ponemos

$$(9.2.5) \quad S_h^\pm(\mu) := \sum_{u \in (\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^\sigma)_{B^h}} e^{-2\pi i u \cdot b_h} \chi_{L_{n-1}^{\pm\sigma(u, x_{\gamma^h})}}(x_{\gamma^h}).$$

Como  $F_1(\Gamma_{j,k}) \neq \emptyset$ , pues  $n_B = n_{B^3} = 1$ , y como  $n_{B^2} = 1$  sólo si  $k = 0$ , la fórmula (5.2.9) del Teorema 5.2.5 queda

$$(9.2.6) \quad d_\mu^\pm(\varepsilon_{j,k}^\sigma) = \frac{1}{4} \left( 2^{m-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^\sigma| + S_1^\pm(\mu) + \delta_{k,0} S_2^\pm(\mu) + S_3^\pm(\mu) \right),$$

donde  $\delta_{k,0}$  es la delta de Kronecker.

Ahora, como  $\varepsilon_{j,k}^\sigma(\gamma) \in T$ , el toro maximal de  $\text{Spin}(n-1)$ , podemos elegir  $x_\gamma = \varepsilon_{j,k}^\sigma(\gamma) = \sigma x_{j,k_0}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ,  $x_{\gamma^2} = x_{j,k_0}(\frac{\pi}{2}, \pi)$  y  $x_{\gamma^3} = \sigma x_{j,k_0}(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$  pues

$$x_{\gamma^h} = \varepsilon(\gamma^h) = \varepsilon(\gamma)^h = (\sigma x_\gamma)^h$$

y  $x(\theta_1, \dots, \theta_m)^h = x(h\theta_1, \dots, h\theta_m)$  para  $h \in \mathbb{N}$  (ver (2.1.8)). Además, como  $B_{j,k} e_n = e_n$  y, para  $u = e_n$  podemos tomar  $h_u = 1$ , entonces  $\sigma(e_n, x_{\gamma^h}) = 1$  para cada  $1 \leq h \leq 3$ . Más aún,  $\sigma(\mu e_n, x_{\gamma^h}) = 1$  y  $\sigma(-\mu e_n, x_{\gamma^h}) = -1$ , pues  $\mu > 0$  (ver 5.2.4). Por otra parte  $b_h = \frac{h e_n}{4}$ .

Como  $\Lambda$  es el retículo canónico y  $\delta_i = 1$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  y  $\delta_n = (-1)^j$ , por (5.1.4) y (5.1.6) tenemos que  $\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^* = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_n$  si  $j$  es par y  $\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^* = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_{n-1} \oplus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})e_n$  si  $j$  es impar. Luego,

$$(9.2.7) \quad (\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^*)^{B^h} = \begin{cases} \mathbb{Z}e_n & j \text{ par} \\ (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})e_n & j \text{ impar.} \end{cases}$$

Es claro que si  $\mu$  es tal que  $(\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^*)^{B^h} = \emptyset$  para cada  $1 \leq h \leq 3$ , sólo la identidad de  $\Gamma$  da una contribución no trivial a (5.2.9) y la fórmula de multiplicidad queda  $d_\mu^\pm(\varepsilon_{j,k}^\sigma) = 4^{r-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^\sigma|$ . Así, de ahora en adelante, suponemos que  $\mu$  cumple  $(\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^*)^{B^h} \neq \emptyset$  para algún  $1 \leq h \leq 3$ . Luego, se tiene  $(\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^*)^{B^h} = \{\pm\mu e_n\}$  con  $\mu \in \mathbb{N}$  para  $j$  par y  $\mu \in \mathbb{N}_0 + \frac{1}{2}$  para  $j$  impar y por lo tanto tenemos

$$(9.2.8) \quad S_h^\pm(\mu) = e^{-\frac{\pi}{2}ih\mu} \chi_{L_{n-1}^\pm}(x_{\gamma^h}) + e^{\frac{\pi}{2}ih\mu} \chi_{L_{n-1}^\mp}(x_{\gamma^h}).$$

Si además se cumple  $\chi_{L_{n-1}^-}(x_{\gamma^h}) = -\chi_{L_{n-1}^+}(x_{\gamma^h})$  entonces

$$(9.2.9) \quad S_h^\pm(\mu) = (e^{-\frac{\pi}{2}ih\mu} - e^{\frac{\pi}{2}ih\mu}) \chi_{L_{n-1}^\pm}(x_{\gamma^h}) = -2i \sin(\frac{\pi h\mu}{2}) \chi_{L_{n-1}^\pm}(x_{\gamma^h}).$$

Por (2.2.2), los caracteres  $\chi_{L_{n-1}^\pm}(x_{\gamma^h})$  tienen la expresión

$$\chi_{L_{n-1}^\pm}(x_{\gamma^h}) = \sigma^h 2^{m-1} \left( (\cos(\frac{h\pi}{4}))^j (\cos(\frac{h\pi}{2}))^{k_0} \pm i^m (\sin(\frac{h\pi}{4}))^j (\sin(\frac{h\pi}{2}))^{k_0} \right).$$

Los valores explícitos, para  $1 \leq h \leq 3$ , se dan en la siguiente tabla:

$\chi_{L_{n-1}^{\pm}}(x_{\gamma^h})$	$k > 0$	$k = 0$
$h = 1$	$\pm \sigma 2^{m-1} i^m (\frac{\sqrt{2}}{2})^j$	$\sigma 2^{m-1} (\frac{\sqrt{2}}{2})^m (1 \pm i^m)$
$h = 2$	0	$\pm 2^{m-1} i^m$
$h = 3$	$\pm \sigma 2^{m-1} i^m (\frac{\sqrt{2}}{2})^j (-1)^{k_0}$	$\sigma 2^{m-1} (\frac{\sqrt{2}}{2})^m ((-1) \pm i^m)$

Caso 1:  $k > 0$ . Sea  $h = 1$  ó  $3$ . Supongamos que  $j$  es par, luego  $\mu \in \mathbb{N}$ . Si  $\mu$  es par,  $S_h^{\pm}(\mu) = 0$  pues  $\sin(\frac{\pi h \mu}{2}) = 0$ . Sea  $\mu = 2t + 1$  con  $t \in \mathbb{N}_0$ . Como  $\sin(\frac{(2t+1)h\pi}{2}) = (-1)^{t+\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}$ , por (9.2.9) vale

$$S_h^{\pm}(\mu) = -2i(-1)^{\frac{\mu-1}{2} + \lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \chi_{L_{n-1}^{\pm}}(x_{\gamma^h}).$$

Reemplazando estos valores en (9.2.6) tenemos que

$$\begin{aligned} d_{\mu}^{\pm}(\varepsilon_{j,k}^{\sigma}) &= \frac{1}{4} \left( 2^{m-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^{\sigma}, \mu}| - 2i(-1)^t (\chi_{L_{n-1}^{\pm}}(x_{\gamma}) - \chi_{L_{n-1}^{\pm}}(x_{\gamma^3})) \right) \\ (9.2.11) \quad &= \frac{1}{4} \left( 2^{m-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^{\sigma}, \mu}| \pm \sigma (-1)^{t+1} 2^m i^{m+1} (\frac{\sqrt{2}}{2})^j (1 - (-1)^{k_0}) \right) \\ &= 4^{r-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^{\sigma}, \mu}| \pm \sigma (-1)^{t+r} 2^{m-1 - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $m = 2r + 1$  y que  $k_0$  es impar, pues  $j$  es par y  $n = 2(j + k_0) + 1 \equiv 3(4)$ .

Ahora, si  $j$  es impar,  $\mu = \frac{2t+1}{2}$  con  $t \in \mathbb{N}_0$ . Es claro que

$$(9.2.12) \quad \sin\left(\frac{\pi(2t+1)}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi(2t+1)}{4}\right) = (-1)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Luego, usando que  $k_0$  es par pues  $j$  es impar, se tiene

$$\begin{aligned} d_{\mu}^{\pm}(\varepsilon_{j,k}^{\sigma}) &= \frac{1}{4} \left( 2^{m-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^{\sigma}, \mu}| - 2i(-1)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (\chi_{L_{n-1}^{\pm}}(x_{\gamma}) + \chi_{L_{n-1}^{\pm}}(x_{\gamma^3})) \right) \\ (9.2.13) \quad &= \frac{1}{4} \left( 2^{m-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^{\sigma}, \mu}| \pm \sigma (-1)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1} 2^m i^{m+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{j+1} (1 + (-1)^{k_0}) \right) \\ &= 4^{r-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^{\sigma}, \mu}| \pm \sigma (-1)^{r + \lfloor \frac{t}{2} \rfloor} 2^{m-2 - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

Tomando  $\mu = \frac{2t+1}{\alpha(j)}$ , con  $\alpha(j) = 2^{\frac{1-(-1)^j}{2}}$ , de (9.2.11) y (9.2.13) finalmente obtenemos la expresión (9.2.4).

Caso 2:  $k = 0$ . Luego  $j$  es impar y  $\mu = \frac{2t+1}{2}$  con  $t \in \mathbb{N}_0$ . Se tiene que

$$(9.2.14) \quad S_2^{\pm}(\mu) = \pm (-1)^{t+1} 2^m i^{m+1} = \pm (-1)^{t+r} 2^{2r+1},$$

por (9.2.9); y, para  $h = 1, 3$ , por (9.2.10) tenemos

$$\begin{aligned} S_h^{\pm}(\mu) &= \sigma 2^{m-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^m \left( e^{-\frac{\pi}{2} i h \mu} ((-1)^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \pm i^m) + e^{\frac{\pi}{2} i h \mu} ((-1)^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \mp i^m) \right) \\ &= \sigma 2^{m-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^m \left( (-1)^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} 2 \cos\left(\frac{\pi h \mu}{2}\right) \pm i^m (-2i) \sin\left(\frac{\pi h \mu}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Luego, como  $\cos(\frac{(2t+1)\pi}{4}) - \cos(\frac{(2t+1)3\pi}{4}) = 0$ , usando (9.2.12) llegamos a que

$$(9.2.15) \quad \begin{aligned} S_1^\pm(\mu) + S_3^\pm(\mu) &= \mp \sigma 2^{m+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m+1} \sin\left(\frac{\pi(2t+1)}{4}\right) \\ &= \pm \sigma (-1)^{r+\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} 2^{r+1}. \end{aligned}$$

Introduciendo los valores de (9.2.14) y (9.2.15) en (9.2.6), llegamos a las expresiones de la proposición.

Finalmente, la afirmación referente a la multiplicidad del autovalor 0 sigue directamente del Lema (2.2.1) y de (5.2.10).  $\square$

**OBSERVACIÓN 9.2.2.** De la fórmulas obtenidas en la Proposición 9.2.1 se ve que no hay  $D_\rho$ -isoespectralidad entre las variedades en  $\mathcal{F}_1^n$ , genéricamente.

Por otra lado, si  $m = 2r$ , esto es, si  $n = 4r + 1$ , entonces el espectro de  $D$  es simétrico con multiplicidades dadas por  $d_\mu^\pm(\varepsilon_{j,k}^\sigma) = 4^{r-1} |\Lambda_{\varepsilon_{j,k}^\sigma, \mu}|$  para todo par  $j, k$ . Esto sigue de (9.2.11) y (9.2.13) en el caso  $k > 0$ , y por (9.2.6) para  $k = 0$ , ya que (9.2.14) y (9.2.15) se anulan en este caso. Luego, para un  $n$  fijo,  $\{(M_{2j,k}, \varepsilon_{2j,k}^\sigma) : 1 \leq j \leq r\}$  es un conjunto, de cardinal  $m = 2r$ , de  $\mathbb{Z}_4$ -variedades mutuamente  $D$ -isoespectrales. Similarmente para  $\{(M_{2j+1,k}, \varepsilon_{2j+1,k}^\sigma) : 1 \leq j \leq r\}$ .

### 9.3. Serie eta e invariante eta de $\mathbb{Z}_4$ -variedades

Usando los resultados obtenidos en las secciones previas calculamos expresiones explícitas para la serie eta y los valores de los invariantes eta para las  $\mathbb{Z}_4$ -variedades spin consideradas. Tenemos el siguiente resultado

**TEOREMA 9.3.1.** *Sea  $n = 2m + 1 = 4r + 3$ . La serie eta de las  $\mathbb{Z}_4$ -variedades  $M_{j,k} \in \mathcal{F}_1^n$  con estructuras spin  $\varepsilon_{j,k}^\sigma$  como en (9.2.2) están dadas para  $k > 0$  por*

$$(9.3.1) \quad \eta_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}(s) = \frac{C_{j,\sigma}}{(8\pi)^s} \sum_{h=0}^{2\alpha(j)-1} (-1)^{\lfloor \frac{h+\alpha(j)}{2} \rfloor} \zeta\left(s, \frac{2h+1}{4\alpha(j)}\right)$$

con  $C_{j,\sigma} = \sigma (-1)^r 2^{m+1-\alpha(j)-\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$ , y por

$$(9.3.2) \quad \eta_{\varepsilon_{m,0}^\sigma}(s) = \frac{(-1)^r 2^r}{(8\pi)^s} \sum_{h=0}^3 \left(\sigma + (-1)^{\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor} 2^r\right) \zeta\left(s, \frac{2h+1}{8}\right)$$

donde  $\zeta(s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+a)^{-s}$  es la función zeta de Hurwitz definida para  $a \in (0, 1]$  y  $\text{Re}(s) > 1$ , y  $\alpha(j)$  es como se definió en (9.2.3).

Más aún, la continuación meromorfa de  $\eta_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}(s)$  a  $\mathbb{C}$  es holomorfa en todas partes para todas las variedades  $M_{j,k} \in \mathcal{F}_1^n$ .

*Nota.* Observar que, para  $k > 0$ , todas las funciones  $\{\eta_{\varepsilon_{2j,k}^\sigma}(s)\}$  son mutuamente proporcionales y lo mismo es cierto para  $\{\eta_{\varepsilon_{2j+1,k}^\sigma}(s)\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 9.2.1, para  $\mu = \frac{2t+1}{\alpha(j)}$  tenemos

$$(9.3.3) \quad d_{\mu}^{+}(\varepsilon_{j,k}^{\sigma}) - d_{\mu}^{-}(\varepsilon_{j,k}^{\sigma}) = \begin{cases} \sigma (-1)^{r+\lceil \frac{t}{\alpha(j)} \rceil} 2^{m+1-\alpha(j)-\lceil \frac{t}{2} \rceil} & k > 0 \\ (-1)^r 2^r (\sigma (-1)^{\lceil \frac{t}{2} \rceil} + (-1)^t 2^r) & k = 0. \end{cases}$$

Ahora, en el caso  $k > 0$ , por (5.3.2), (9.2.4) y (9.3.3), tenemos

$$(9.3.4) \quad \eta_{\varepsilon_{j,k}^{\sigma}}(s) = \frac{C_{j,\sigma}}{(2\pi)^s} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lceil \frac{t}{\alpha(j)} \rceil}}{\left(\frac{2t+1}{\alpha(j)}\right)^s}$$

donde  $C_{j,\sigma} = \sigma (-1)^r 2^{m+1-\alpha(j)-\lceil \frac{j}{2} \rceil}$ .

Si  $j$  es par, la serie en (9.3.4) es igual a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{(2t+1)^s} = \frac{1}{4^s} \left( \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^s} - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{\left(t+\frac{3}{4}\right)^s} \right) = \frac{1}{4^s} \left( \zeta\left(s, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(s, \frac{3}{4}\right) \right).$$

donde hemos separado las contribuciones de  $t = 2t_0$  y  $t = 2t_0 + 1$ , y por lo tanto en este caso

$$(9.3.5) \quad \eta_{\varepsilon_{j,k}^{\sigma}}(s) = \frac{\sigma (-1)^r 2^{m-\lceil \frac{j}{2} \rceil}}{(8\pi)^s} \left( \zeta\left(s, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(s, \frac{3}{4}\right) \right).$$

Para  $j$  impar, la serie en (9.3.4) ahora es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lceil \frac{t}{2} \rceil}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^s} &= \frac{1}{4^s} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{8}\right)^s} + \frac{1}{\left(t+\frac{3}{8}\right)^s} - \frac{1}{\left(t+\frac{5}{8}\right)^s} - \frac{1}{\left(t+\frac{7}{8}\right)^s} \\ &= \frac{1}{4^s} \left( \zeta\left(s, \frac{1}{8}\right) + \zeta\left(s, \frac{3}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{5}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{7}{8}\right) \right). \end{aligned}$$

donde hemos separado las contribuciones de  $4t+h$ , con  $0 \leq h \leq 3$ , y entonces

$$(9.3.6) \quad \eta_{\varepsilon_{j,k}^{\sigma}}(s) = \frac{C_{j,\sigma}}{(8\pi)^s} \sum_{h=0}^3 (-1)^{\lceil \frac{h}{2} \rceil} \zeta\left(s, \frac{2h+1}{8}\right).$$

Poniendo juntas las expresiones (9.3.5) y (9.3.6) se tiene la fórmula (9.3.1).

Por otro lado, para  $k = 0$ , por (9.3.3) tenemos

$$\eta_{\varepsilon_{m,0}^{\sigma}}(s) = \frac{(-1)^r 2^r}{(2\pi)^s} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\sigma (-1)^{\lceil \frac{t}{2} \rceil} + (-1)^t 2^r}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^s}.$$

La serie de arriba es igual a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\sigma + 2^r)}{\left(4t+\frac{1}{2}\right)^s} + \frac{(\sigma - 2^r)}{\left(4t+\frac{3}{2}\right)^s} - \frac{(\sigma - 2^r)}{\left(4t+\frac{5}{2}\right)^s} - \frac{(\sigma + 2^r)}{\left(4t+\frac{7}{2}\right)^s}$$

donde nuevamente separamos los casos  $4t+h$ ,  $0 \leq h \leq 3$ . Ahora, procediendo como antes, obtenemos

$$(9.3.7) \quad \eta_{\varepsilon_{m,0}^{\sigma}}(s) = \frac{(-1)^r 2^r}{(8\pi)^s} \left( (\sigma + 2^r) \left( \zeta\left(s, \frac{1}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{7}{8}\right) \right) + (\sigma - 2^r) \left( \zeta\left(s, \frac{3}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{5}{8}\right) \right) \right).$$

De aquí es claro que vale (9.3.2).

La última afirmación sigue de las expresiones explícitas para  $\eta(s)$  obtenidas en (9.3.5), (9.3.6) y (9.3.7) pues la función zeta de Hurwitz  $\zeta(s, \alpha)$  tiene un polo simple en  $s = 1$  con residuo 1 (ver [Ap]).  $\square$

**COROLARIO 9.3.2.** *Los invariantes  $\eta$  de las  $\mathbb{Z}_4$ -variedades spin  $M_{j,k} \in \mathcal{F}_1^n$  con estructuras spin  $\varepsilon_{j,k}^\sigma$  están dados por*

$$(9.3.8) \quad \eta_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}^\sigma(0) = \begin{cases} \sigma(-1)^{r+\lceil \frac{\alpha(j)}{2} \rceil} 2^{m-1-\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} & k > 0, 1 \leq j < 2r+1 \\ (-1)^r 2^r (\sigma + 2^{r-1}) & k = 0, j = 2r+1. \end{cases}$$

En particular  $\eta_{\varepsilon_{j,k}^\sigma}(0) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Esto es una consecuencia directa de las fórmulas del Teorema 9.3.1 y del hecho que  $\zeta(0, \alpha) = \frac{1}{2} - \alpha$  para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .  $\square$

Ahora ilustramos los resultados en las dimensiones más bajas del tipo considerado, esto es  $n = 3$  y  $n = 7$ .

**EJEMPLO 9.3.3.** Para  $n = 3$ , hay una única variedad en  $\mathcal{F}_1^3$ , a saber  $M_{1,0}$  donde  $B_{1,0} = \begin{bmatrix} \bar{J} & \\ & 1 \end{bmatrix}$ . Como  $r = 0$  y  $k = 0$ , por (9.3.2) tenemos

$$\eta_{\varepsilon_{1,0}^+}(s) = \frac{2}{(8\pi)^s} \left( \zeta\left(s, \frac{1}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{7}{8}\right) \right), \quad \eta_{\varepsilon_{1,0}^-}(s) = \frac{-2}{(8\pi)^s} \left( \zeta\left(s, \frac{3}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{5}{8}\right) \right)$$

y por (9.3.8)

$$\eta_{\varepsilon_{1,0}^+}(0) = \frac{3}{2}, \quad \eta_{\varepsilon_{1,0}^-}(0) = -\frac{1}{2}.$$

**EJEMPLO 9.3.4.** Para  $n = 7$ , hay 3 variedades en  $\mathcal{F}_1^7$ . Estas son  $M_{1,4}$ ,  $M_{2,2}$  y  $M_{3,0}$  donde las matrices son  $B_{1,4} = \begin{bmatrix} \bar{J} & & & \\ & -I & & \\ & & -I & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B_{2,2} = \begin{bmatrix} \bar{J} & & & \\ & \bar{J} & & \\ & & -I & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ ,

$B_{3,0} = \begin{bmatrix} \bar{J} & & & \\ & \bar{J} & & \\ & & \bar{J} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$  con  $-I = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ . Ahora, por (9.3.1) y (9.3.2) tenemos

$$\eta_{\varepsilon_{1,4}^\sigma}(s) = \frac{-4\sigma}{(8\pi)^s} \left( \left( \zeta\left(s, \frac{1}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{7}{8}\right) \right) + \left( \zeta\left(s, \frac{3}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{5}{8}\right) \right) \right)$$

$$\eta_{\varepsilon_{2,2}^\sigma}(s) = \frac{-4\sigma}{(8\pi)^s} \left( \zeta\left(s, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(s, \frac{3}{4}\right) \right)$$

$$\eta_{\varepsilon_{3,0}^+}(s) = \frac{-2}{(8\pi)^s} \left( 3 \left( \zeta\left(s, \frac{1}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{7}{8}\right) \right) - \left( \zeta\left(s, \frac{3}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{5}{8}\right) \right) \right)$$

$$\eta_{\varepsilon_{3,0}^-}(s) = \frac{-2}{(8\pi)^s} \left( - \left( \zeta\left(s, \frac{1}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{7}{8}\right) \right) - 3 \left( \zeta\left(s, \frac{3}{8}\right) - \zeta\left(s, \frac{5}{8}\right) \right) \right)$$

y, otra vez por (9.3.8), también

$$\eta_{\varepsilon_{1,4}^\sigma}(0) = -4\sigma, \quad \eta_{\varepsilon_{2,2}^\sigma}(0) = -2\sigma, \quad \eta_{\varepsilon_{3,0}^+}(0) = -4, \quad \eta_{\varepsilon_{3,0}^-}(0) = 3.$$



## APÉNDICE A

### Invariantes eta en dimensión 3

A continuación damos el invariante  $\eta$  de variedades de dimensión 3. Estos fueron ya calculados por Pfäffle ([Pf]), pero lo hacemos por completitud y para comparar los resultados.

Hay 6 clases de difeomorfismos de variedades compactas planas orientables en dimensión 3 y se distinguen por su grupo de holonomía  $F \simeq 1$  (“torocosm”),  $\mathbb{Z}_2$  (“dicosm”),  $\mathbb{Z}_3$  (“tricosm”),  $\mathbb{Z}_4$  (“tetracosm”),  $\mathbb{Z}_6$  (“hexacosm”) y  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  (“didicosm”) (ver Sección 1.2 o las Notas del Capítulo 1). A lo largo del trabajo hemos calculado  $\eta(s)$  y  $\eta$  para todas estas variedades a excepción de la  $\mathbb{Z}_6$ -variedad.

EJEMPLO A.1. Para la  $\mathbb{Z}_6$ -variedad, se puede ver que tiene sólo 2 estructuras spin de la forma  $\varepsilon_\sigma = (1, 1, -1, \sigma x(\frac{\pi}{6}))$ ,  $\sigma \in \{\pm 1\}$ . Procediendo de manera similar al Capítulo 9, y después de algunos cálculos, se llega a que

$$\eta_{\varepsilon_+}(s) = \frac{2}{(12\pi)^s} \left( \zeta(s, \frac{1}{12}) - \zeta(s, \frac{11}{12}) \right)$$

y

$$\eta_{\varepsilon_-}(s) = \frac{-2}{(12\pi)^s} \left( \zeta(s, \frac{5}{12}) - \zeta(s, \frac{7}{12}) \right),$$

de donde

$$\eta_{\varepsilon_+}(0) = \frac{5}{3} \quad \eta_{\varepsilon_-}(0) = -\frac{1}{3}.$$

Resumimos ahora la información en una tabla. En ella damos los valores no triviales de  $\eta$  para las variedades con grupo de holonomía no trivial.

$F$	$\eta_1$	$\eta_2$	
$\mathbb{Z}_2$	1	-1	Observación 6.2.2
$\mathbb{Z}_3$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	Ejemplo 8.2.4
$\mathbb{Z}_4$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	Ejemplo 9.3.3
$\mathbb{Z}_6$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	Ejemplo A.1
$\mathbb{Z}_2^2$	-	-	Teorema 6.1.2

\* \* \*



## Bibliografía

- [AB] Ammann, B., Bär, C., *The Dirac operator on nilmanifolds and collapsing circle bundles*, Annals of Global Analysis and Geometry **16**, (221–253) 1998.
- [AK] Auslander, L., Kuranishi, M., *On the holonomy group of locally euclidean spaces*, Ann. of Math. **65**, (411–415) 1957.
- [Ap] Apostol, T., *Introduction to analytic number theory*, Springer Verlag, NY, 1998.
- [APS] Atiyah, M. F., Patodi, V. K., Singer, I. M., *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (43–69) 1975.
- [APS2] Atiyah, M. F., Patodi, V. K., Singer, I. M., *Spectral asymmetry and Riemannian geometry II*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **78**, (405–432) 1975.
- [APS3] Atiyah, M. F., Patodi, V. K., Singer, I. M., *Spectral asymmetry and Riemannian geometry III*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **79**, (71–99) 1976.
- [AS] Atiyah, M. F., Singer, I. M., *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, (422–433) 1963.
- [AuSz] Auslander, L., Szczarba, R. H., *Characteristic classes of compact solvmanifolds*, Ann. of Math. **76**, (2), (1–8) 1962.
- [Ba] Bär, C., *The Dirac operator on homogeneous spaces and its spectrum on 3-dimensional lens spaces*, Arch. Math. **59**, (65–79) 1992.
- [Ba2] Bär, C., *The Dirac operator on space forms of positive curvature*, J. Math. Soc. Japan **48**, (69–83) 1994.
- [Ba3] Bär, C., *Metrics with harmonic spinors*, GAFA **6**, (899–942) 1996.
- [Ba4] Bär, C., *Dependence of the Dirac spectrum on the spin structure*, Global Analysis and Harmonic Analysis (Marseille-Luminy 1999), Sémin. & Cong. 4, Soc. Math. Fce., Paris 2000, 17–33.
- [Ba5] Bär, C., *The Dirac operator on hyperbolic manifolds of finite volume*, J. Diff. Geom. **54**, (439–488) 2000.
- [BBN+] Brown, H., Bülow, R., Neubüser, J., Wondratschok, H., Zassenhaus, H., *Crystallographic groups of four-dimensional space*, Wiley, New York, 1978.
- [BD] Blau, M., Dabrowski, L., *Pin structures on manifolds quotiented by discrete groups*, JGP **6**, (1), (143–157) 1989.
- [BDM] Barberis, M. L., Dotti, I. G., Miatello, R. J., *Clifford structures on certain locally homogeneous manifolds*. Annals Global Analysis and Geometry **13**, (289–301), 1995.
- [Be] Bérard, P., *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Astérisque **177-178**, (127–154) 1989.
- [Be2] Bérard, P., *Transplantation et isospectralité I*, Math. Ann. **292**, (547–559) 1992.
- [Be3] Bérard, P., *Transplantation et isospectralité II*, J. Lond. Math. Soc. **48**, (565–576) 1993.
- [BGR] Bovdi, V. A., Gudivok, P. M., Rudko, V. P., *Torsion-free groups with indecomposable holonomy group. I*. J. Group Theory **5**, (75–96) 2002.
- [BGV] Berline, N., Getzler, E., Vergne, M., *Heat kernels and Dirac operators*, Springer Verlag, GMW 298, 1992.
- [Bu] Bunke, U., *Upper bounds of small eigenvalues of the Dirac operator and isometric immersions*, Ann. Global Anal. Geom. **9**, (109–116) 1991.

- [Bus] Buser, P., *Isospectral Riemann surfaces*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **36**, (167–192) 1986.
- [Bus2] Buser, P., Conway, J., Doyle, P., Semmler, K. D. *Some planar isospectral domains*, Internat. Math. Res. Notices **9**, 391ff., 1994 (electronic).
- [Ca] Calabi, E., *Closed, locally euclidean, 4-dimensional manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **63**, (1957) Abstract 295, pág. 135.
- [CDHT] Conway, J. H., Delgado Friedrichs, O., Huson, D. H., Thurston, W. P., *On three-dimensional spece groups*, Beiträge Algebra Geom. **42**, 2, (475–507) 2001.
- [CFG] Cahen, M., Franc, A., Gutt, S., *Spectrum of the Dirac operator on complex projective space  $P_{2q-1}(\mathbb{C})$* , Lett. Math. Phys. **18**, (165–176) 1989.
- [CFG2] Cahen, M., Franc, A., Gutt, S., *Erratum to “Spectrum of the Dirac operator on complex projective space  $P_{2q-1}(\mathbb{C})$ ”*, Lett. Math. Phys. **32**, (365–368) 1994.
- [CGT] Cahen, M., Gutt, S., Trautman, A., *Pin structures and the modified Dirac operator*, J. Geom. and Physics **17**, (283–297) 1995.
- [Ch] Charlap, L., *Compact flat Riemannian manifolds I*, Ann. of Math. **81**, (15–30) 1965.
- [Ch2] Charlap, L., *Bieberbach groups and flat manifolds*, Springer Verlag, Universitext, 1988.
- [CH] Camporesi, R., Higuchi, A., *On the eigenfunctions of the Dirac operator on spheres and real hiperbolic spaces*, J. Geom. Phys. **20**, (1–18) 1996.
- [CoRo] Conway, J. H., Rossetti, J. P., *Describing the platycosms*, preprint 2003, arXiv:math.DG/0311476.
- [CoSl] Conway, J. H., Sloane, N. J. A., *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Third Edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [CPR] Craioveanu, M., Puta, M., Rassias, T., *Old and New Aspects in Spectral Geometry*, Mathematics and Its Applications 534, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2001.
- [CS] Cid, C., Schulz, T., *Computation of Five and Six dimensional Bieberbach groups*, Experiment Math. **10**, (109–115) 2001.
- [DG] DeTurck, D., Gordon, C., *Isospectral deformations: Riemannian structures on two-step nilspaces*, Comm. Pure Appl. Math. **40**, (367–387) 1987.
- [DM] Dotti, I. G., Miatello, R. J., *Isospectral compact flat manifolds*, Duke Math. J. **68**, (489–498) 1992.
- [DM2] Dotti, I. G., Miatello, R. J., *Quaternion Kähler flat manifolds*, Diff. Geom. Appl. **15**, (59–77) 2001.
- [Fe] Fegan, H., *The spectrum of the Dirac operator on a simply connected compact Lie group*, Simon Stevin **61**, (97–108) 1987.
- [Fr] Friedrich, T., *Die Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur*, Coll. Math. XLVII, (57–62) 1984.
- [Fr2] Friedrich, T., *Dirac operator in Riemannian geometry*, Amer. Math. Soc. GSM **25**, 1997.
- [Gi] Gilkey, P., *The Residue of the Local Eta Function at the Origin*, Math. Ann. **240**, (183–189) 1979.
- [Gi2] Gilkey, P., *The Residue of the Global  $\eta$  Function at the Origin*, Adv. in Math. **40**, (290–307) 1981.
- [Gi3] Gilkey, P., *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Second Edition, 1994.
- [GLP] Gilkey, P., Leahy, J., Park, J., *Spectral Geometry, Riemannian Submenrsions, and the Gromov-Lawson Conjecture*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/CRC, 1999.

- [Go] Gordon, C., *Riemannian manifolds isospectral on functions but not on 1-forms*, J. Differential Geom. **24**, 1, (79–96) 1986.
- [Go2] Gordon, C., *The Laplace spectra versus the length spectra of Riemannian manifolds*, Nonlinear problems in geometry (Mobile, Ala., 1985), (63–80), Contemp. Math. **51**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [Go3] Gordon, C., *You can't hear the shape of the manifold*, *New Developments in Lie Theory and Their Applications*, Progress in Mathematics **105**, Birkhäuser Verlag, Boston, (129–146) 1992.
- [Go4] Gordon, C., *Isospectral closed Riemannian manifolds which are not locally isometric*, I: J. Diff. Geom. **37** (1993) 639-649; II: Contemp. Math. **173**, (121–131) 1994.
- [Go5] Gordon, C., *Survey of isospectral manifolds*, Handbook of Differential Geometry 1, Elsevier Science B.V., (747–778) 2000.
- [Go6] Gordon, C., *Isospectral manifolds with different local geometries*, J. Reine Angew. Math. **534**, (41–94), 2001.
- [GoGo] Gordon, C., Gornet, R., *Spectral geometry on nilmanifolds*, Progress in Inverse Spectral Geometry, Trends in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, (23–50) 1997.
- [GoWe] Gordon, C., Webb, D., *Isospectral convex domains in Euclidean space*, Mathematical Research Letters **1**, (539–545) 1994.
- [GoWi] Gordon, C., Wilson, E., *Isospectral deformations of compact solvmanifolds*, J. Diff. Geom. **19**, (241–256) 1984.
- [GoWi2] Gordon, C., Wilson, E., *Continuous families of isospectral Riemannian metrics which are non locally isometric*, J. Diff. Geom. **47**, (504–529) 1997.
- [GoWW] Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S., *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Invent. Math. **110**, (1–22) 1992.
- [Gor] Gornet, R., *A new construction of isospectral Riemannian nilmanifolds with examples*, Michigan Math. J. **43**, 1, (159–188) 1996.
- [Gor2] Gornet, R., *Continuous families of Riemannian manifolds, isospectral on functions but not on 1-forms*, J. Geom. Anal. **10**, 2, (281–298) 2000.
- [Hi] Hitchin, N., *Harmonic spinors*, Adv. Math. **14**, (1–55) 1974.
- [HW] Hantzsche, W., Wendt, H., *Dreidimensionale euklidische Raumformen*, Math. Ann. **10**, (593–611) 1935.
- [HR] Hamrick, G. C., Royster, D. C., *Flat Riemannian manifolds are boundaries*, Invent. Math. **66**, (405–413) 1982.
- [HZ] Hirzebruch, F., Zagier, D., *The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory*, Publish or Perish, Math. Lecture Series 3, 1974.
- [Ik] Ikeda, A., *Isospectral problem for spherical space forms*, Kagai Publications, (57–63) 1983.
- [Ik2] Ikeda, A., *Riemannian manifolds  $p$ -isospectral but not  $(p+1)$ -isospectral*, Perspectives Math. Vol. 8, Academic Press, Boston, (383–417) 1989.
- [Ik3] Ikeda, A., *On space forms of real Grassmann manifolds which are isospectral but not isometric*, Kodai Math. J. **20**, 1, (1–7) 1997.
- [IK] Im, S. M., Kim, H. K., *Compact flat manifolds with non-vanishing Stiefel-Whitney classes*, Topology and its Applications **96**, (267–276) 1999.
- [JR] Johnson, F. E. A., Rees, E. G., *Kähler groups and rigidity phenomena*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **109**, (31–44) 1991.
- [Ka] Kac, M., *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly **73**, (1–23) 1964.
- [Ki] Kitaoka, Y., *Positive definite quadratic forms with same representations numbers*, Arch. Math. **28**, (495–497) 1977.
- [KL] Krasikov, I., Litsyn, S., *On integral zeros of Krawtchouk polynomials*, J. Combin. Theory A **74**, (71–99) 1996.

- [Kn] Knapp, A. W., *Lie groups: Beyond an introduction*, Birkhäuser, Progress in Math. **140**, 1996.
- [Kne] Kneser, M., *Lineare Relationen zwischen Darstellungszahlen quadratischer Formen*, Math. Ann. **168**, (31–39) 1977.
- [Li] Lichnerowicz, A., *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **257**, (7–9) 1963.
- [LM] Lawson, H. B., Michelsohn, M. L., *Spin geometry*, Princeton University Press, NJ, 1989.
- [LS] Lee, R., Szczarba, R. H., *On the integral Pontrjagin classes of a Riemannian flat manifold*, Geom. Dedicata **3**, (1–9) 1974.
- [Mi] Milhorat, J. L., *Spectre de l'opérateur de Dirac sur les espaces projectifs quaternioniens*, C. R. Acad. Sci. Paris **1**, (69–72) 1992.
- [Mi2] Milhorat, J. L., *Spectrum of the Dirac operator on quaternion-Kähler spin manifolds: The case of the symmetric space  $Gr_2(\mathbb{C}^{m+2})$* , J. Math. Phys. **39**, (594–609) 1998.
- [Mil] Milnor, J., *Spin structures on manifolds*, L'Enseignement Math **9**, (198–203) 1962.
- [Mil2] Milnor, J., *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51**, 542 1964.
- [MP] Miatello, R. J., Podestá R. A., *Spin structures and spectra of  $\mathbb{Z}_2^k$ -manifolds*, Math. Zeitschrift **247**, (319–335) 2004. arXiv:math.DG/0311354.
- [MP2] Miatello, R. J., Podestá R. A., *The spectrum of the twisted Dirac operators on compact flat manifolds*, Transactions of the AMS, aceptado. arXiv:math.DG/0312004.
- [MPR] Miatello, R. J., Podestá, R. A., Rossetti, J. P.,  *$\mathbb{Z}_2^k$ -manifolds are isospectral on forms*, Math. Zeitschrift, enviado. arXiv:math.DG/0408285.
- [MR] Miatello, R. J., Rossetti, J. P., *Isospectral Hantzsche-Wendt manifolds*, J. Reine Angew. Math. **515**, (1–23) 1999.
- [MR2] Miatello, R. J., Rossetti, J. P., *Hantzsche-Wendt manifolds of dimension 7*, Diff. Geom. Appl., Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference, Masaryk Univ., Brno, (379–391) 1999.
- [MR3] Miatello, R. J., Rossetti, J. P., *Flat manifolds isospectral on  $p$ -forms*, Jour. Geom. Anal. **11**, (647–665) 2001.
- [MR4] Miatello, R. J., Rossetti, J. P., *Comparison of twisted Laplace  $p$ -spectra for flat manifolds with diagonal holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **21**, (341–376) 2002.
- [MR5] Miatello, R. J., Rossetti, J. P., *Length spectra and  $p$ -spectra of compact flat manifolds*, Jour. Geom. Anal. **13**, 4, (631–657) 2003.
- [Ni] Niggli, P., *Geometrische Kristallographie des Diskontinuums*, Gebrüder Bornträger Verlag, Leipzig, 1919.
- [No] Nowacki, W., *Die euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen*, Comm. Math. Helv. **7**, (81–93) 1934.
- [Pe] Pesce, H., *Représentations de groupes et variétés riemanniennes isospectrales*, Contemporary Mathematics: Geometry of the Spectrum, Vol. **173**, AMS, (231–240) 1994.
- [Pe2] Pesce, H., *Représentations relativement équivalentes et variétés riemanniennes isospectrales*, Comm. Math. Helv. **71**, (243–268) 1996.
- [Pf] Pfäffle, F., *The Dirac spectrum of Bieberbach manifolds*, J. Geom. Phys. **35**, (367–385) 2000.
- [Po] Podestá, R. A., *Eta series and eta invariants of  $\mathbb{Z}_4$ -manifolds*. Revista de la UMA, enviado. arXiv
- [Pó] Pólya, G., *Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*, Zeitschrift für Kristallographie **60**, (278–282) 1924.

- [RC] Rossetti, J. P., Conway, J. H., *Hearing the Platycosms*, preprint. arXiv:math.DG/0311470.
- [RS] Rossetti, J. P., Szczepański, A., *Generalized Hantzsche-Wendt manifolds*, Rev. Matemática Iberoamericana, **21**, 3, 2005, por aparecer.
- [Schi] Schiemann, A., *Ein Beispiel positiv definit quadratischer Formen der Dimension 4 mit gleichen Darstellungszahlen*, Arch. Math. **54**, (372–375) 1990.
- [Schu] Schüth, D., *Continuous families of isospectral metrics on simply connected manifolds*, Ann. of Math. **149**, (287–308) 1999.
- [See] Seeger, L., *Der Dirac-Operator auf kompakten symmetrischen Räumen*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1987.
- [See2] Seeger, L., *The Dirac operator on oriented Grassman manifolds and  $G_2/SO(4)$* , preprint 1997.
- [SeSe] Seifarth, S., Semmelmann U., *The spectrum of the Dirac operator on the odd dimensional complex projective space  $P^{2m-1}(\mathbb{C})$* , SFB 288 Preprint No 95, 1993.
- [St] Strese, H., *Über den Dirac-Operator auf Graßmann-Mannigfaltigkeiten*, Math. Nach. **98**, (53–59) 1980.
- [St2] Strese, H., *Spektren symmetrischer Räume*, Math. Nach. **98**, (75–82) 1980.
- [Sul] Sulanke, S., *Die Berechnung des Spektrums des Quadrates des Dirac-Operators auf der Sphäre*, Doktorarbeit, Humboldt-Universität Berlin, 1979.
- [Sun] Sunada, T. *Spectrum of a compact flat manifold*, Comment. Math. Helv. **53**, 4, (613–621) 1978.
- [Sun2] Sunada, T., *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, Annals of Math. **121**, (169–186) 1985.
- [Sut] Sutton, C. J., *Isospectral simply-connected homogeneous spaces and the spectral rigidity of group actions*, Comment. Math. Helv. **77**, 4, (701–717) 2002.
- [SS] Sadowski, M., Szczepański, A., *Flat manifolds, harmonic spinors and eta invariants*, preprint, arxiv.org/abs/math/0310183.
- [Sza] Szabó, Z., *Isospectral pairs of metrics on balls, spheres, and other manifolds with different local geometries*, Ann. of Math. **154**, (437–475) 2001.
- [Tr] Trautman, A., *The Dirac operator on hypersurfaces*, Acta Phys. Polon. B **26**, (1283–1310) 1995.
- [Va] Vasquez, A., *Flat Riemannian manifolds*, J. Diff. Geometry **4**, (367–382) 1970.
- [Vi] Vignéras, M. F., *Variétés Riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Ann. of Math. **112**, (21–32) 1980.
- [Wi] Witt, E., *Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **14**, (323–337) 1941.
- [Wo] Wolf, J., *Spaces of constant curvature*, Mc Graw-Hill, NY, 1967.
- [Wod] Wodzicki, M., *Spectral asymmetry and zeta functions*, Inventiones mathematicae **66**, 115–135 (1982).
- [WW] Whittaker, E. T., Watson, G. N., *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, London, 1963.