

# Álgebras de Hopf punteadas sobre grupos no abelianos

por Fernando Amado Fantino

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte  
de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo de 2008

©FAMAF-UNC 2008

Director: Dr. Nicolás Andruskiewitsch



*para Adriana*



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones . . . . .	1
1.2. Espacios vectoriales trenzados . . . . .	6
1.3. Módulos de Yetter-Drinfeld . . . . .	6
1.4. Álgebras de Hopf trenzadas . . . . .	8
1.4.1. Categorías trenzadas . . . . .	8
1.4.2. Álgebras de Hopf trenzadas graduadas . . . . .	9
1.4.3. Biproductos o bosonizaciones . . . . .	10
1.5. Álgebras de Nichols . . . . .	12
1.6. Método del levante para álgebras de Hopf punteadas . . . . .	15
<b>2. Módulos de Yetter-Drinfeld sobre un grupo finito</b>	<b>17</b>
2.1. Racks, quandles y conjuntos cruzados . . . . .	17
2.2. Subespacios abelianos de un espacio vectorial trenzado . . . . .	20
2.3. Criterios de dimensión infinita mediante subracks abelianos . . . . .	22
2.4. Criterios de dimensión infinita mediante subracks no abelianos . . . . .	25
2.4.1. Subracks de tipo $\mathcal{D}_p$ . . . . .	25
2.4.2. Subracks de tipo $\mathcal{D}_3$ . . . . .	29
2.4.3. Subracks de tipo $\mathfrak{D}$ . . . . .	34

<b>3. Corradical: grupos simétricos</b>	<b>43</b>
3.1. Notación y generalidades . . . . .	43
3.2. Usando técnicas basadas en subracks abelianos . . . . .	45
3.2.1. Álgebras de Nichols correspondientes a ciclos de longitud par . . . . .	45
3.2.2. Álgebras de Nichols de órbitas con $n$ transposiciones . . . . .	46
3.2.3. Álgebras de Nichols correspondientes a permutaciones pares puras . . . . .	60
3.3. Usando técnicas basadas en subracks no abelianos . . . . .	71
3.3.1. Criterios $\mathcal{D}_p$ . . . . .	71
3.3.2. Criterio $\mathfrak{D}$ . . . . .	77
<b>4. Corradical: grupos alternados y diedrales</b>	<b>81</b>
4.1. Grupos absolutamente reales . . . . .	81
4.2. Corradical: $\mathbb{CA}_m$ . . . . .	83
4.2.1. Caso $\mathbb{A}_3$ . . . . .	83
4.2.2. Caso $\mathbb{A}_4$ . . . . .	83
4.2.3. Caso $\mathbb{A}_5$ . . . . .	84
4.2.4. Caso $\mathbb{A}_6$ . . . . .	85
4.2.5. Caso $\mathbb{A}_7$ . . . . .	86
4.2.6. Caso $\mathbb{A}_8$ . . . . .	88
4.2.7. Caso $\mathbb{A}_m$ , $m \geq 8$ . . . . .	92
4.3. Corradical: $\mathbb{CD}_m$ . . . . .	93
<b>5. Corradical: grupos de Mathieu simples</b>	<b>97</b>
5.1. Usando técnicas basadas en subracks abelianos . . . . .	97
5.1.1. El grupo $M_{11}$ . . . . .	98
5.1.2. El grupo $M_{12}$ . . . . .	101
5.1.3. El grupo $M_{22}$ . . . . .	108
5.1.4. El grupo $M_{23}$ . . . . .	112
5.1.5. El grupo $M_{24}$ . . . . .	117
5.2. Usando técnicas basadas en subracks no abelianos . . . . .	129
<b>6. Álgebras de Nichols sobre álgebras de Hopf semisimples</b>	<b>133</b>

# Resumen

Sea  $G$  un grupo finito no abeliano. Esta tesis trata acerca del problema de clasificación de las álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita  $H$  con grupo de elementos de *tipo grupo*  $G(H)$  isomorfo a  $G$ . Los principales resultados aquí presentados forman parte de varios trabajos: [AF1], [AF2], [F], [AF3] y [AFZ], estando los dos primeros ya publicados.

En esta tesis, se analizan criterios que permiten dar condiciones suficientes para que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  tenga dimensión infinita estudiando subracks de  $\mathcal{O}$ , donde  $\mathcal{O}$  es una clase de conjugación de  $G$  y  $\rho$  es una representación irreducible de  $G^\sigma$ , el centralizador de un elemento fijo  $\sigma$  en  $\mathcal{O}$ . Más precisamente, se estudian criterios de dimensión infinita mediante *subracks abelianos* y se desarrollan criterios de dimensión infinita mediante subracks no abelianos.

Se utilizan estos criterios para cuando  $G$  pertenece a una de las siguientes familias de grupos no abelianos: simétricos, alternados, diedrales y de Mathieu simples.

Cuando  $G$  es un grupo simétrico, se prueba que si  $\mathcal{O}$  es una clase de conjugación *pura*, entonces o bien el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  es de dimensión infinita, o bien la trenza del módulo Yetter-Drinfeld  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es *negativa*. Además, si  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$  son tales que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , entonces  $q_{\sigma\sigma} = -1$  y:

- (i)  $n_j = 0$ , para todo  $j$  par, con  $j \neq 2^k$ ,  $k \geq 1$ ; (ii)  $n_{2^k} = 0, 1$  ó  $2$ , para todo  $k \geq 2$ ; (iii)  $n_2 \leq 5$ .

También se determinan otras restricciones:

- (a) si existe  $j \geq 3$  tal que  $n_j \geq 1$ , entonces  $n_1 \geq 1$  y  $n_2 = 0$ , ó  $n_1 = 0$  y  $n_2 = 1$  ó  $2$ .  
(b) si  $n_j = 0$ ,  $3 \leq j \leq m$ , entonces el tipo de  $\sigma$  es  $(1^{n_1}, 2^l)$ , con  $\rho_2 = \chi_{(l)} \otimes \epsilon$  ó  $\chi_{(l)} \otimes \text{sgn}$ ,  $l = 1, 3, 5$ .  
(c) si  $\sigma$  es de tipo  $(2^{n_2}, 4^{n_4}, \dots, (2^k)^{n_{2^k}})$ , entonces  $\dim \rho = 1$ .  
(d) si  $\sigma$  es de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, 8^{n_8})$ , entonces  $n_8 = 0$ .

Para el caso en que  $G$  es un grupo alternado se obtiene que, salvo isomorfismos, las únicas álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita con grupo de elementos de tipo grupo isomorfo a  $\mathbb{A}_5$  ó  $\mathbb{A}_7$  son las álgebras de grupo  $\mathbb{CA}_5$  ó  $\mathbb{CA}_7$ , respectivamente. Además, se muestra que si  $\sigma \in \mathbb{A}_m$ , salvo el caso  $\sigma = (123)$  ó  $(132)$  en  $\mathbb{A}_4$ , satisface que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) < \infty$ , entonces  $q_{\sigma\sigma} = -1$ , y por lo tanto  $\sigma$  debe tener orden par. También se obtiene, para el caso de los grupos alternados  $\mathbb{A}_4$ ,  $\mathbb{A}_6$  y  $\mathbb{A}_8$ , una lista de pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  que dan lugar a  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de trenza negativa. Por otro lado, se estudian álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos diedrales.

Cuando  $G$  es un grupo de Mathieu simple se prueba que o bien el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  es de dimensión infinita, o bien la trenza del módulo de Yetter-Drinfeld  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es negativa. Como consecuencia de estos resultados se obtiene que si  $G \simeq M_{22}$  ó  $M_{24}$ , entonces el álgebra de grupo de  $G$  es (salvo isomorfismo) la única álgebra de Hopf punteada compleja de dimensión finita con grupo de elementos de tipo grupo isomorfo a  $G$ . Para estos cinco grupos se determina que, salvo 7 de 1137 pares  $(\mathcal{O}, \rho)$ ,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

Finalmente, se dan algunas consideraciones acerca de álgebras de Nichols sobre álgebras de Hopf semisimples: se muestra que si  $G(H) \simeq \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_7, M_{22}$  ó  $M_{24}$ , entonces cualquier álgebra de Hopf punteada compleja de dimensión finita con corradical isomorfo a  $(\mathbb{C}G)^J$ , con  $J$  un torcimiento, es necesariamente isomorfa a  $(\mathbb{C}G)^J$ .

Palabras claves: álgebras de Hopf punteadas, álgebras de Nichols, racks.

2000 Mathematics Subject Classification: 16W30, 17B37



# Abstract

Let  $G$  be a non-abelian finite group. This thesis is about the classification problem of finite-dimensional complex pointed Hopf algebras  $H$  with group of *group-like* elements  $G(H)$  isomorphic to  $G$ . The main results that we present here are based on several articles: [AF1], [AF2], [F], [AF3] and [AFZ], being the two first already published.

In this thesis, we analyze criteria that allow to give sufficient conditions in order that the Nichols algebra  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  is infinite-dimensional studying subracks of  $\mathcal{O}$ , where  $\mathcal{O}$  is a conjugacy class of  $G$  and  $\rho$  is an irreducible representation of  $G^\sigma$ , the centralizer of a fixed element  $\sigma$  in  $\mathcal{O}$ . Indeed, we study infinite-dimensional criteria by means of *abelian subracks* and we develop infinite-dimensional criteria by means of non-abelian subracks.

These criteria are used in the cases when  $G$  belongs to one of the following families of non-abelian groups: symmetric, alternating, dihedral and Mathieu simple groups.

When  $G$  is a symmetric group, we prove that if  $\mathcal{O}$  is an *unmixed* conjugacy class, then either the Nichols algebra  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  is infinite-dimensional, or the braiding of the Yetter-Drinfeld module  $M(\mathcal{O}, \rho)$  is *negative*. Furthermore, if  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  of type  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ ,  $\mathcal{O}$  the conjugacy class of  $\sigma$  and  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$  satisfy  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , then  $q_{\sigma\sigma} = -1$  and:

- (i)  $n_j = 0$ , for all  $j$  even, with  $j \neq 2^k$ ,  $k \geq 1$ ; (ii)  $n_{2^k} = 0, 1$  or  $2$ , for all  $k \geq 2$ ; (iii)  $n_2 \leq 5$ .

Also, we have other restrictions:

- (a) if there exists  $j \geq 3$  such that  $n_j \geq 1$ , then  $n_1 \geq 1$  and  $n_2 = 0$ , or  $n_1 = 0$  and  $n_2 = 1$  or  $2$ .  
(b) if  $n_j = 0$ ,  $3 \leq j \leq m$ , then the type of  $\sigma$  is  $(1^{n_1}, 2^l)$ , with  $\rho_2 = \chi_{(l)} \otimes \epsilon$  or  $\chi_{(l)} \otimes \text{sgn}$ ,  $l = 1, 3, 5$ .  
(c) if  $\sigma$  is of type  $(2^{n_2}, 4^{n_4}, \dots, (2^k)^{n_{2^k}})$ , then  $\dim \rho = 1$ .  
(d) if  $\sigma$  is of type  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, 8^{n_8})$ , then  $n_8 = 0$ .

For the case when  $G$  is an alternating group, we obtain that, up to isomorphisms, the only finite-dimensional complex pointed Hopf algebras with group-likes isomorphic to  $\mathbb{A}_5$  or  $\mathbb{A}_7$  are the group algebras  $\mathbb{C}\mathbb{A}_5$  or  $\mathbb{C}\mathbb{A}_7$ , respectively. Also, we show that if  $\sigma \in \mathbb{A}_m$ , except the case  $\sigma = (123)$  or  $(132)$  in  $\mathbb{A}_4$ , satisfies  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) < \infty$ , then  $q_{\sigma\sigma} = -1$ , and  $\sigma$  has even order. In addition, we have, for the cases of the alternating groups  $\mathbb{A}_4$ ,  $\mathbb{A}_6$  and  $\mathbb{A}_8$ , a list of pairs  $(\mathcal{O}, \rho)$  which give rise to  $M(\mathcal{O}, \rho)$  of negative braiding. On the other hand, we study pointed Hopf algebras over dihedral groups.

When  $G$  is a Mathieu simple group we prove that either the Nichols algebra  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  is infinite-dimensional, or the braiding of the Yetter-Drinfeld module  $M(\mathcal{O}, \rho)$  is negative. As a consequence of our research, we have that if  $G \simeq M_{22}$  or  $M_{24}$ , then the group algebra of  $G$  is (up to isomorphisms) the only finite-dimensional complex pointed Hopf algebra with group-likes isomorphic to  $G$ . For these five groups we determine that, up to 7 of 1137 pairs  $(\mathcal{O}, \rho)$ ,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

Finally, we give some considerations about the Nichols algebras over semisimple Hopf algebras: we show that if  $G(H) \simeq \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_7, M_{22}$  or  $M_{24}$ , then any finite-dimensional complex pointed Hopf algebra with coradical isomorphic to  $(\mathbb{C}G)^J$ , with  $J$  a twist, is necessarily isomorphic to  $(\mathbb{C}G)^J$ .

Key words: pointed Hopf algebras, Nichols algebras, racks.

2000 Mathematics Subject Classification: 16W30, 17B37

# Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Nicolás por el constante apoyo que me ha brindado durante todo el doctorado (y desde antes también), por su excelente dirección y sus valiosos consejos que me han ayudado tanto humana como académicamente.

Quiero expresar mi gratitud a todos los docentes de la FaMAF; en particular, a los de mi comisión asesora: Esther Galina, Alejandro Tiraboschi y Jorge Vargas. Un especial agradecimiento a los profesores Sonia Natale, Matías Graña, Roberto Miatello, Fernando Levstein, Juan Pablo Rossetti, Leandro Cagliero. Los aportes de todos ellos han influido en mi formación.

También quiero agradecer a mis compañeros Martín M., Gastón G., Leandro V., Sebastián F., Ricardo P., Sebastián S., Pablo Rom., Andrés B., Marcos G., Pedro S.T., Pablo Roc., Juan Pablo A., Nadina R., César G., Jesús O., Agustín G., Iván A., Cristian V., Julia P.

No quiero olvidarme de mencionar a los organismos oficiales que con su financiación han permitido que pudiera llevar a cabo este doctorado como así también la realización de distintos trabajos de investigación: FaMAF, CIEM, CONICET, ANPCyT-Foncyt, Secyt-UNC, Agencia Córdoba Ciencia y Ministerio de Ciencia y Tecnología (Córdoba).

En estos cinco años han sido esenciales el apoyo y afecto de mi familia: Amado, Elvis, Marcela, Valeria, Germán, José, Maximiliano, Gustavo, Esther, Antonio, Fernanda, Patricia y Javier. A ellos también quiero dedicar este logro.

Finalmente, quiero agradecer a mi esposa Adriana por su apoyo incondicional y por estar a mi lado en todo momento. Sin su amor, comprensión y paciencia esto no hubiera sido posible.



# Introducción

## Generalidades

Las álgebras de Hopf, introducidas en la década del 50, han sido estudiadas en primer lugar en relación con grupos algebraicos siendo especialmente eficientes en la descripción de fenómenos típicos de característica positiva. Más adelante, fueron estudiadas como objetos de interés en sí mismos – ver por ejemplo [Sw].

Los grupos cuánticos, introducidos en 1986 por Drinfeld en su Conferencia [Dr], forman una clase particular de álgebras de Hopf. Los mismos pueden ser presentados a partir de deformaciones en un parámetro de álgebras universales de álgebras de Lie o de álgebras de funciones regulares de grupos algebraicos afines. También se las puede encontrar codificando la simetría de categorías trenzadas, es decir, categorías munidas de un producto tensorial asociativo y conmutativo. El hecho destacable aquí es que la transformación de conmutatividad

$$c : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$$

no es involutiva. De esta forma, se los pueden encontrar en diversas áreas relacionadas con la teoría conforme de campos; por ejemplo, en invariantes de variedades topológicas de dimensión baja.

En los últimos veinte años, los grupos cuánticos han atraído el interés de matemáticos de distintas áreas. En particular, ha habido gran interés en problemas de clasificación de álgebras de Hopf – ver por ejemplo [A]. También podemos citar las familias de álgebras de Hopf de dimensión finita introducidas por Lusztig en [L1, L2], conocidas como núcleos de Frobenius-Lusztig.

La clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita se encarrila por dos caminos diferentes: las semisimples y las no semisimples. Los resultados conocidos hasta ahora ponen de relieve la estrecha relación entre las álgebras de Hopf tanto con los grupos finitos como con las álgebras de Lie. Por un lado, los grupos finitos se relacionan estrechamente con las álgebras de Hopf semisimples; mientras que por otro lado, ejemplos como los núcleos de Frobenius-Lusztig muestran la interacción de la teoría de Lie con la teoría de álgebras de Hopf no semisimples. Una estrategia para estudiar el caso no semisimple es considerar la posición relativa del corradical, es decir, de la mayor subcoálgebra cosemisimple. En efecto, en [AS1, AS4] se consideró una subclase particular de las álgebras de Hopf no semisimples: las *punteadas*, donde el corradical es una subálgebra de Hopf semisimple, y se mostró que ciertas clases de ellas están constituidas por variaciones de núcleos de Frobenius-Lusztig.

Las álgebras de Hopf tienen importantes aplicaciones en matemática y en física matemática. En efecto, las álgebras de Hopf dan lugar a categorías tensoriales finitas en el sentido de [ENiO, EO] mediante sus categorías de representaciones. De esta forma, por ejemplo, las álgebras de Hopf semisimples están presentes de una manera fundamental en la teoría de campos conformes racionales.

Además, las álgebras de Hopf no semisimples están relacionadas a teorías de campos conformes logarítmicos [Ga]. Es natural esperar que resultados de clasificación sobre álgebras de Hopf de dimensión finita tengan un impacto significativo en aquellas áreas. Por otra parte, nuevos ejemplos pueden ser descubiertos en dichos estudios de clasificación.

Las álgebras de Hopf punteadas son una clase importante de álgebras de Hopf que contiene a las álgebras envolventes de las álgebras de Lie y a las correspondientes deformaciones cuánticas de Drinfeld y Jimbo. La estrategia general para su clasificación fue planteada por Andruskiewitsch y Schneider quienes obtuvieron una serie de resultados generales y particulares a partir de ella [AS1, AS2, AS3, AS4]. A la mencionada estrategia, que explicaremos más adelante, se la conoce como *método del levante* – ver el artículo panorámico [AS3].

## Presentación del problema

Sea  $H$  un álgebra de Hopf con *comultiplicación*  $\Delta$ . El conjunto

$$G(H) := \{g \in H - 0 : \Delta(g) = g \otimes g\}$$

forma un grupo con la multiplicación de  $H$  llamado el grupo de los *elementos de tipo grupo* de  $H$ . El álgebra de Hopf  $H$  es *punteada* si y sólo si el corradical de  $H$  es el álgebra de grupo de  $G(H)$ .

Sea  $G$  un grupo finito. En el contexto anteriormente citado, un paso importante en la clasificación de las álgebras de Hopf complejas de dimensión finita  $H$  con  $G(H) \simeq G$ , es la determinación de todos los *módulos de Yetter-Drinfeld*  $V$  sobre el álgebra de grupo de  $G$  tales que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(V)$  es de dimensión finita.

Cuando el grupo finito  $G$  es abeliano, esto equivale al estudio de las álgebras de Nichols de *tipo diagonal*. En este sentido, importantes avances se han logrado en los últimos años debido a N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider, M. Graña e I. Heckenberger. La clasificación de las álgebras de Nichols de dimensión finita sobre un grupo abeliano  $G$  sigue de [H4], con importantes resultados parciales previos en [AS2, H1]. Esto conduce a sustanciales resultados de clasificación de las álgebras de Hopf punteadas  $H$  con  $G(H)$  abeliano. En [AS4], se clasifican las álgebras de Hopf punteadas  $H$  con  $G(H)$  abeliano, tales que los divisores primos del orden del grupo son mayores que 7, utilizando aquellos resultados.

Por lo mencionado, la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita  $H$  con  $G(H)$  abeliano está cerca de ser completada. Mientras que si  $G(H)$  es no abeliano, poco es lo que se conoce [MS, AGñ1, AGñ2, Gñ1, AZ, AF1, AF2, FrGñV, F, FrV, AFZ].

Para un grupo finito cualquiera  $G$ , los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre  $\mathbb{C}G$  están parametrizados (salvo isomorfismos) por pares  $(\mathcal{O}, \rho)$ , donde  $\mathcal{O}$  es una clase de conjugación de  $G$  y  $\rho$  es una representación irreducible del centralizador  $G^s$  de un elemento fijo  $s \in \mathcal{O}$ . Se denotará por  $M(\mathcal{O}, \rho)$  al módulo de Yetter-Drinfeld irreducible correspondiente al par  $(\mathcal{O}, \rho)$  y por  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  a su álgebra de Nichols.

Así, el paso crucial para clasificar álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita  $H$  con  $G(H) \simeq G$  fijo, es determinar cuándo el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  de un módulo de Yetter-Drinfeld irreducible  $M(\mathcal{O}, \rho)$  sobre  $G$  es de dimensión finita.

En esta dirección, es natural comenzar por descartar módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre un grupo no abeliano finito que contienen un subespacio vectorial trenzado cuya álgebra de

Nichols es de dimensión infinita. Para ello, se trata de determinar los pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  para los cuales el álgebra de Nichols de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  tiene dimensión infinita. Esta estrategia, sugerida inicialmente por M. Graña [Gñ1], consiste en: dado un par  $(\mathcal{O}, \rho)$ , encontrar un subespacio trenzado  $U$  de  $M(\mathcal{O}, \rho)$ , verificar si la dimensión del álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(U)$  es infinita; si es así, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ . En síntesis:

**Estrategia:** *dado  $(\mathcal{O}, \rho)$ , encontrar un subespacio trenzado  $U$  de  $M(\mathcal{O}, \rho)$ . Verificar si la dimensión del álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(U)$  es infinita. Si es así, entonces  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  también será de dimensión infinita.*

## Principales resultados obtenidos

La presente tesis se enmarca en el problema de clasificación de las álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita  $H$ , en el contexto del método del levante, donde los elementos de tipo grupo  $G(H)$  forman un grupo no abeliano. Se trabajará sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$  algebraicamente cerrado de característica cero que en la mayor parte de la tesis será  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ .

Gran parte de esta tesis se encuentra en los trabajos [AF1], [AF2], [F], [AF3] y [AFZ].

En [AF1], se dan varios resultados parciales sobre la clasificación de álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita cuyo corradical es el álgebra de grupo de un grupo simétrico. Más precisamente, se prueba que si  $s$  es una permutación *pura* en  $\mathfrak{S}_m$ , entonces  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_s, \rho)$  es de dimensión infinita o  $M(\mathcal{O}_s, \rho)$  tiene trenza negativa.

En [AF2], se aplica la estrategia de eliminación por medio de subbracks abelianos a los grupos alternados y diedrales. En el mismo, se muestra que cualquier álgebra de Hopf punteada con trenza infinitesimal asociada con la clase de conjugación de un elemento  $\sigma$  en  $\mathbb{A}_m$  es de dimensión infinita si el orden de  $\sigma$  es impar excepto cuando  $\sigma = (1\ 2\ 3)$  ó  $\sigma = (1\ 2\ 3)$  en  $\mathbb{A}_4$  y  $\rho = \omega$ , con  $\omega \neq 1$  una raíz tercera de la unidad. En particular, se clasifican las álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita con corradical isomorfo a  $\mathbb{C}\mathbb{A}_5$ . El grupo alternado  $\mathbb{A}_5$  fue el primer grupo finito no abeliano  $G$  para el cual se conocieron todas las álgebras de Hopf punteadas  $H$  con  $G(H) \simeq G$ . En dicho trabajo, también se estudian álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos diedrales, dando condiciones necesarias sobre los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre un grupo diedral para que sus correspondientes álgebras de Nichols sean de dimensión finita. Además, se dan generalizaciones de [AZ, Lema 1.3], una herramienta básica en [AZ, AF1], ver [AF2, Lemas 1.8, 1.9]. Un resultado similar aparece en [FrGñV, Corolario 2.2].

En [AF3], se desarrollaron técnicas de eliminación por medio de subbracks no abelianos.

En [F], se aplicó la estrategia de eliminación por medio de subbracks abelianos y no abelianos a los grupos de Mathieu simples. Para ello se utilizó el sistema computacional de álgebra discreta GAP [Sch+]. En dicho artículo, se determinó que si  $G$  es un grupo de Mathieu simple,  $s \in G$ ,  $\mathcal{O}_s$  la clase de conjugación de  $s$  y  $\rho$  una representación irreducible del centralizador de  $s$ , entonces, al igual que en las anteriores familias de grupos, o bien el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_s, \rho)$  es de dimensión infinita, o bien la trenza del módulo de Yetter-Drinfeld  $M(\mathcal{O}_s, \rho)$  es negativa. En particular, se determinó que no existen álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita con  $G(H) \simeq M_{22}$  ó  $M_{24}$  salvo las álgebras de grupo de  $M_{22}$  ó  $M_{24}$ , respectivamente.

En el trabajo [AFZ], se avanza en el estudio de las álgebras de Nichols de módulos de Yetter-Drinfeld sobre los grupos simétricos.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1, damos definiciones y resultados básicos de la teoría de álgebras de Hopf. Además, se introducen otras definiciones necesarias para la tesis: espacio vectorial trenzado, módulo de Yetter-Drinfeld, etc. También se dan algunas nociones categóricas básicas para una mejor presentación del concepto de álgebra de Nichols y una mejor exposición del método del levante.

En el Capítulo 2, se explican las nociones elementales para entender la “estrategia de eliminación” por medio de subbracks abelianos y no abelianos. También se define el concepto de trenza negativa y se dan las herramientas básicas y los criterios de eliminación que se usarán en los capítulos subsiguientes.

En el Capítulo 3, se estudian las álgebras de Hopf punteadas complejas con corradical el álgebra de grupo de un grupo simétrico. En el mismo, se muestra que si  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  es un producto de ciclos disjuntos de la misma longitud,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho$  una representación irreducible del centralizador de  $\sigma$ , entonces o bien el álgebra  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  es de dimensión infinita, o bien la trenza del módulo de Yetter-Drinfeld  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es negativa. Más precisamente:

**Teorema 1.** *Sea  $\sigma \in \mathbb{S}_{kn}$  pura de tipo  $(k^n)$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_{kn}^\pi$ .*

(A) *Si  $k$  es impar, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

(B) *Asumamos que  $k = 2$ .*

(i) *Si  $n$  es par, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

(ii) *Supongamos que  $n$  es impar,  $n > 1$ . Si  $\rho = \chi_{(n)} \otimes \epsilon$  ó  $\chi_{(n)} \otimes \text{sgn}$ , entonces la trenza es negativa. En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

(C) *Asumamos que  $k = 2r$ , con  $r > 1$ .*

(i) *Si  $n = 1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$  si  $\rho = \chi_\omega$ , con  $\omega \neq -1$ , y la trenza es negativa si  $\rho = \chi_\omega$ , con  $\omega = -1$ .*

(ii) *Asumamos que  $n > 1$ . Si  $\deg \rho > 1$ , ó si  $\deg \rho = 1$  y  $\rho(\sigma) \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ . Supongamos que  $\deg \rho = 1$  y  $\rho(\sigma) = -1$ . Si  $\rho = \chi_{r, \dots, r} \otimes \mu$ , con  $r$  par ó impar, ó si  $\rho = \chi_{c, \dots, c} \otimes \mu$ , con  $r$  par y  $c = \frac{r}{2}$  ó  $\frac{3r}{2}$ , entonces la trenza es negativa, donde  $\mu = \epsilon$  ó  $\text{sgn}$ ; en caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

Más aún, despues de aplicar los criterios de eliminación mediante subbracks no abelianos hemos probado que:

**Teorema 2.** *Sea  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ . Si  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , entonces  $q_{\sigma\sigma} = -1$  y:*

(i)  $n_j = 0$ , para todo  $j$  par, con  $j \neq 2^k$ ,  $k \geq 1$ ;

(ii)  $n_{2^k} = 0, 1$  ó  $2$ , para todo  $k \geq 2$ ;

(iii)  $n_2 \leq 5$ .

Más aún,

(a) *si existe  $j \geq 3$  tal que  $n_j \geq 1$ , entonces*



- $n_1 \geq 1$  y  $n_2 = 0$ ; ó
  - $n_1 = 0$  y  $n_2 = 1$  ó 2;
- (b) si  $n_j = 0$ ,  $3 \leq j \leq m$ , entonces el tipo de  $\sigma$  es  $(1^{n_1}, 2^l)$ , con  $\rho_2 = \chi_{(l)} \otimes \epsilon$  ó  $\chi_{(l)} \otimes \text{sgn}$ ,  $l = 1, 3, 5$ .
- (c) si  $\sigma$  es de tipo  $(2^{n_2}, 4^{n_4}, \dots, (2^k)^{n_{2k}})$ , entonces  $\dim \rho = 1$ ;
- (d) si  $\sigma$  es de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, 8^{n_8})$ , entonces  $n_8 = 0$ .

En el Capítulo 4, se estudian las álgebras de Hopf punteadas complejas con corradical el álgebra de grupo de un grupo alternado o diedral. Se prueba que cualquier álgebra de Hopf punteada compleja  $H$  de dimensión finita con  $G(H) \simeq \mathbb{A}_5$  ó  $\mathbb{A}_7$ , es isomorfa al álgebra de grupo de  $\mathbb{A}_5$  ó  $\mathbb{A}_7$ , respectivamente. Además, se prueba que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para cualquier  $\sigma$  en  $\mathbb{A}_n$  de orden impar, excepto para  $\sigma = (123)$  ó  $\sigma = (132)$  en  $\mathbb{A}_4$  y  $\rho = \omega$ , con  $\omega$  una raíz tercera de la unidad.

**Teorema 3.** Sean  $\sigma \in \mathbb{A}_m$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}}_m^\sigma$ . Supongamos que  $\sigma$  no es  $(123)$  ni  $(132)$  en  $\mathbb{A}_4$ . Si  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) < \infty$ , entonces  $q_{\sigma\sigma} = -1$  y  $\sigma$  tiene orden par.

Los cuatro casos restantes son particularmente interesantes; los mismos corresponden al rack del “tetraedro” con cociclo constante  $\omega \in \mathbb{G}_3 - 1$ . Las técnicas hasta ahora disponibles no proveen información acerca de la dimensión del álgebra de Nichols correspondiente. También se obtiene, para el caso de los grupos alternados  $\mathbb{A}_4$ ,  $\mathbb{A}_6$  y  $\mathbb{A}_8$ , una lista de pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  que dan lugar a  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de trenza negativa – ver Tabla 1; los pares restantes satisfacen  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .

$G$	Clase de conjugación	Centralizador	Representación
$\mathbb{A}_4$	$\mathcal{O}_\sigma, \sigma = (123)$ ó $(132)$	$\langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/3$	$\rho(\sigma) = \omega_3, \omega_3^2$
$\mathbb{A}_6$	$\mathcal{O}_\sigma, \sigma = (12)(3456)$	$\langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/4$	$\rho(\sigma) = -1$
$\mathbb{A}_8$	$\mathcal{O}_\sigma, \sigma = (1234)(5678)$	$\mathbb{A}_8^\sigma$ no abeliano, $ \mathbb{A}_8^\sigma  = 16$	rep. de grado 1

Tabla 1: Casos de trenza negativa en los grupos  $\mathbb{A}_4$ ,  $\mathbb{A}_6$  y  $\mathbb{A}_8$ .

Finalmente, se estudian álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos diedrales. Resumimos nuestras conclusiones para este caso en el siguiente enunciado.

**Teorema 4.** Sea  $M(\mathcal{O}, \rho)$  el módulo de Yetter-Drinfeld irreducible sobre  $\mathbb{C}\mathbb{D}_m$  correspondiente al par  $(\mathcal{O}, \rho)$ . Supongamos que su álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  es de dimensión finita.

- (a) Si  $m$  es impar, entonces  $(\mathcal{O}, \rho) = (\mathcal{O}_x, \text{sgn})$ , donde  $\text{sgn} \in \widehat{\mathbb{D}}_m^x$ ,  $\mathbb{D}_m^x = \langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ .
- (b) Si  $m = 2n$  es par, entonces  $(\mathcal{O}, \rho)$  es una de las siguientes:
- (i)  $(\mathcal{O}_{y^n}, \rho)$ , con  $\rho \in \widehat{\mathbb{D}}_m$  tal que  $\rho(y^n) = -1$ .
  - (ii)  $(\mathcal{O}_{y^h}, \chi^j)$ , donde  $1 \leq h \leq m-1$ ,  $h \neq n$  y  $\omega_m^{hj} = -1$ .
  - (iii)  $(\mathcal{O}_x, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$  ó  $(\mathcal{O}_x, \text{sgn} \otimes \epsilon)$ , con  $\text{sgn} \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \epsilon \in \widehat{\mathbb{D}}_m^x$ ,  $\mathbb{D}_m^x = \langle x \rangle \oplus \langle y^n \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .
  - (iv)  $(\mathcal{O}_{xy}, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$  ó  $(\mathcal{O}_{xy}, \text{sgn} \otimes \epsilon)$ , con  $\text{sgn} \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \epsilon \in \widehat{\mathbb{D}}_m^{xy}$ ,  $\mathbb{D}_m^{xy} = \langle xy \rangle \oplus \langle y^n \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

$G$	$j$	$ s_j $	Centralizador	Representación	$\dim M(\mathcal{O}_{s_j}, \rho)$
$M_{11}$	4	4	$\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/8, x^6 = s_4$	$\nu_2(x) := i$	990
				$\nu_6(x) := -i$	
	6	8	$\langle s_6 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	990
	7	8	$\langle s_7 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	990
$M_{12}$	13	10	$\langle s_{13} \rangle \simeq \mathbb{Z}/10$	$\chi_{(-1)}$	9504
$M_{23}$	12	14	$\langle s_{12} \rangle \simeq \mathbb{Z}/14$	$\chi_{(-1)}$	728640
	13	14	$\langle s_{13} \rangle \simeq \mathbb{Z}/14$	$\chi_{(-1)}$	728640

Tabla 2: Grupos de Mathieu simples: casos abiertos.

En los casos (i) y (ii) la dimensión es finita. En los casos (iii) y (iv), la trenza es negativa.

En el Capítulo 5, aplicamos la estrategia de eliminación por medio de subbracks abelianos y no abelianos a los grupos de Mathieu simples. Los resultados obtenidos se detallan en el siguiente

**Teorema 5.** *Sea  $G$  un grupo de Mathieu simple:  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{23}$  ó  $M_{24}$ ,  $s \in G$ ,  $\mathcal{O}_s$  la clase de conjugación de  $s$  y  $\rho \in \widehat{G^s}$ . Si  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_s, \rho) < \infty$ , entonces  $(\mathcal{O}_s, \rho)$  es uno de los pares listados en Table 2. En particular, las únicas álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita con  $G(H) \simeq M_{22}$  ó  $M_{24}$  son las álgebras de grupo  $\mathbb{C}M_{22}$  ó  $\mathbb{C}M_{24}$ , respectivamente.*

Finalmente, en el Capítulo 6, y teniendo en cuenta los resultados de los capítulos anteriores, se dan unas breves consideraciones acerca de álgebras de Nichols sobre álgebras de Hopf semisimples, que resumimos en el siguiente enunciado.

**Teorema 6.** *Sea  $G(H) \simeq \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_7, M_{22}$  ó  $M_{24}$ . Entonces cualquier álgebra de Hopf punteada compleja  $H$  de dimensión finita con corradical isomorfo a  $(\mathbb{C}G)^J$ , con  $J$  un torcimiento, es necesariamente isomorfa al álgebra  $(\mathbb{C}G)^J$ .*

# Capítulo 1

## Preliminares

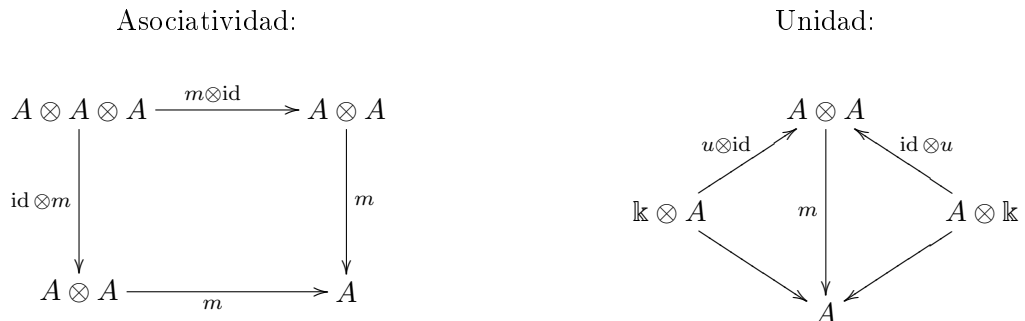
En este capítulo se darán las definiciones y nociones básicas sobre la teoría de álgebras de Hopf que serán necesarias para demostrar los resultados más importantes. Nuestras referencias para la teoría de álgebras de Hopf son [Sw], [Mo], [S] y [Ka], además, del artículo panorámico [AS3].

### 1.1. Definiciones

Trabajaremos sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$  algebraicamente cerrado de característica cero. Todos los productos tensoriales que consideramos son sobre el cuerpo  $\mathbb{k}$ , a menos que se exprese lo contrario. Sin pérdida de generalidad, se supondrá por brevedad de la exposición que  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ .

**Notación:** denotamos por  $\mathbb{G}_n$  al grupo de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad en  $\mathbb{C}$ , y por  $\omega_n$  a la primera raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad, o sea  $\omega_n := \exp(\frac{i2\pi}{n})$ , donde  $i = \sqrt{-1}$ , y definimos  $\mathbb{G}_\infty := \cup_{n \geq 1} \mathbb{G}_n$ .

**Definición 1.1.1.** Una  $\mathbb{k}$ -álgebra con unidad es un anillo  $A$  con un morfismo de anillos  $u : \mathbb{k} \rightarrow A$  cuya imagen está contenida en el centro de  $A$ . La aplicación  $\mathbb{k} \times A \rightarrow A$  dada por  $(\lambda, a) \mapsto u(\lambda)a$  le da a  $A$  una estructura de  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial tal que la multiplicación  $m : A \times A \rightarrow A$  resulta bilineal. Es decir,  $A$  es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial con dos aplicaciones  $\mathbb{k}$ -lineales  $u$  y  $m$  tal que los siguientes diagramas conmutan:

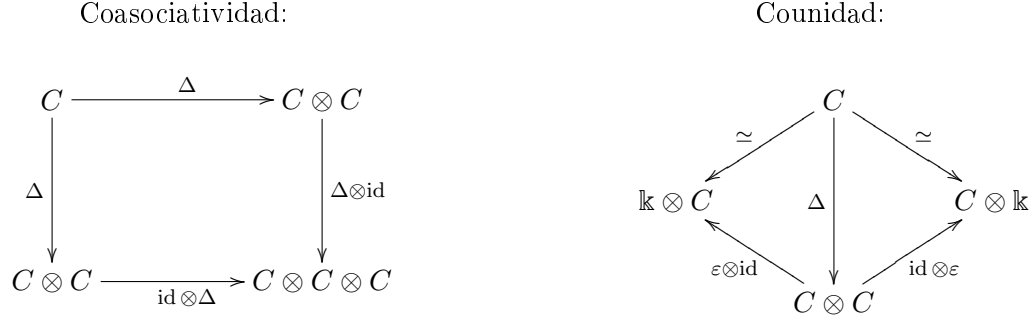


Notar que la unidad en  $A$  está dada por  $1_A = u(1_{\mathbb{k}})$ .

**Definición 1.1.2.** Sean  $V$  y  $W$  dos  $\mathbb{k}$ -espacios vectoriales. Se define la aplicación *flip*  $\tau$  como la aplicación lineal  $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  dada por  $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$  para todo  $v \in V$ ,  $w \in W$ .

Notar que  $A$  es conmutativa si y sólo si  $m \circ \tau = m$  en  $A \otimes A$ . Dualizando la noción de álgebra se define:

**Definición 1.1.3.** Una  $\mathbb{k}$ -coálgebra con counidad es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial no nulo  $C$  munido de dos aplicaciones lineales, la *comultiplicación* o *coproducto*  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  y la *counidad*  $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{k}$ , tales que los siguientes diagramas conmutan:



Se dice que  $C$  es *coconmutativa* si  $\tau \circ \Delta = \Delta$  en  $C$ .

**Definición 1.1.4.** Sean  $C$  y  $D$  dos coálgebras con comultiplicación  $\Delta_C$  y  $\Delta_D$  y counidad  $\varepsilon_C$  y  $\varepsilon_D$  respectivamente.

(i) Una aplicación lineal  $f : C \rightarrow D$  es un *morfismo de coálgebras* si  $\Delta_D \circ f = (f \otimes f)\Delta_C$  y  $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$ .

(ii) Un subespacio  $I \subseteq C$  es un *coideal* si  $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$  y  $\varepsilon_C(I) = 0$ .

Es claro que  $I$  es un coideal de  $C$  si y sólo si el  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial  $C/I$  es una coálgebra con la comultiplicación inducida de  $\Delta_C$ . Notar que, al ser  $\varepsilon_C$  un morfismo de coálgebras, se sigue que el subespacio  $C^+ := \text{Ker } \varepsilon \subseteq C$  es un coideal de  $C$ .

Para trabajar con coálgebras usaremos la *notación sigma* de Sweedler: si  $c$  es un elemento de una coálgebra  $(C, \Delta, \varepsilon)$ , notaremos al elemento  $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C \otimes C$  de la siguiente forma

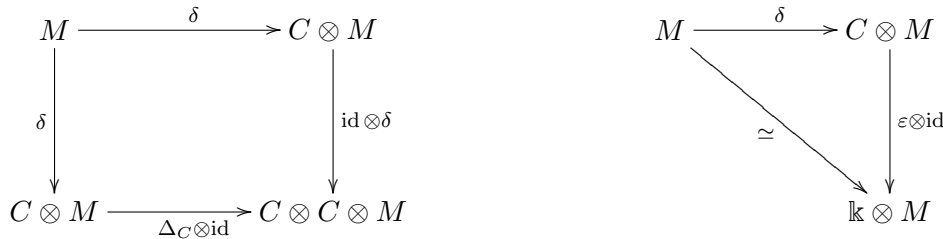
$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

De esta manera, el axioma de coasociatividad de  $C$  dado por  $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ , se puede expresar como

$$(c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)},$$

para todo  $c \in C$ .

**Definición 1.1.5.** Sea  $C$  una  $\mathbb{k}$ -coálgebra. Un  $C$ -*comódulo a izquierda* es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial  $M$  munido de un morfismo lineal  $\delta : M \rightarrow C \otimes M$  tal que los siguientes diagramas conmutan



Análogamente se define un  $C$ -comódulo a derecha. Las categorías de  $C$ -comódulos a izquierda y a derecha se denotarán por  ${}^C\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}^C$  respectivamente. También usaremos la notación sigma de Sweedler para los comódulos: si  $M$  es un  $C$ -comódulo a izquierda, entonces escribimos

$$\delta(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \in C \otimes M \quad \text{para todo } m \in M.$$

Análogamente, si  $M$  es un  $C$ -comódulo a derecha con morfismo de estructura  $\lambda : M \rightarrow M \otimes C$ , entonces escribimos

$$\lambda(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes C \quad \text{para todo } m \in M.$$

Sean  $M$  y  $N$  dos  $C$ -comódulos a izquierda con morfismos de estructura  $\delta_M$  y  $\delta_N$  respectivamente. Una aplicación lineal  $f : M \rightarrow N$  es un *morfismo de  $C$ -comódulos* a izquierda si  $\delta_N \circ f = (\text{id} \otimes f) \circ \delta_M$ .

**Ejemplo 1.1.6.** Sea  $f : C \rightarrow D$  un morfismo de coálgebras. Entonces  $C$  es un  $D$ -comódulo a izquierda y a derecha vía los morfismos

$$\delta = (f \otimes \text{id})\Delta : C \rightarrow D \otimes C \quad \text{y} \quad \lambda = (\text{id} \otimes f)\Delta : C \rightarrow C \otimes D.$$

**Definición 1.1.7.** Sea  $C$  una coálgebra.

- (i) Un elemento  $c \in C$  se dice de *tipo grupo* si  $\Delta(c) = c \otimes c$  y  $\varepsilon(c) = 1$ . El conjunto de elementos de tipo grupo de  $C$  se denota por  $G(C)$ .
- (ii) Sean  $a, b \in G(C)$ . El conjunto de *elementos  $(a, b)$ -casi-primitivos* de  $C$  se define como

$$P_{a,b} := \{c \in C : \Delta(c) = a \otimes c + c \otimes b\};$$

en particular,  $\mathbb{k}(a - b) \subseteq P_{a,b}$ . Diremos que un elemento casi-primitivo  $c \in C$  es *trivial* si  $c \in \mathbb{k}[G(C)]$ .

Diremos que una coálgebra  $C$  es *simple* si no posee subcoálgebras propias y diremos que es *cosemisimple* si es suma directa de subcoálgebras simples.

Sea  $C$  una coálgebra. El *corradical* de  $C$  es la suma de todas las subcoálgebras simples de  $C$ . Denotamos al corradical de  $C$  por  $C_0$ . Notar que  $C_0$  es la mayor subcoálgebra cosemisimple de  $C$ . En particular,  $\mathbb{k}G(C) \subseteq C_0$ .

**Definición 1.1.8.** Si todas las subcoálgebras simples de  $C$  tienen dimensión uno, entonces  $C$  se dice *punteada* y se tiene que  $C_0 = \mathbb{k}[G(C)]$ .

**Definición 1.1.9.** Una colección  $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$  se dice una *biálgebra* si  $(B, m, u)$  es un álgebra,  $(B, \Delta, \varepsilon)$  es una coálgebra y se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- (i)  $\Delta$  y  $\varepsilon$  son morfismos de álgebras.
- (ii)  $m$  y  $u$  son morfismos de coálgebras.

Una aplicación  $f : B \rightarrow B'$  entre biálgebras es un *morfismo de biálgebras* si  $f$  es un morfismo de álgebras y un morfismo de coálgebras. Un subespacio  $I \subseteq B$  es un *bi-ideal* si es un ideal bilátero y un coideal. Claramente,  $I$  es un bi-ideal de una biálgebra  $B$  si y sólo si el  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial  $B/I$  es una biálgebra con las operaciones inducidas por el cociente.

**Definición 1.1.10.** Sean  $C$  una coálgebra y  $A$  un álgebra. El conjunto  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(C, A)$  tiene una estructura de álgebra con el *producto de convolución* dado por

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}) \quad \text{para todo } f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(C, A), c \in C.$$

**Definición 1.1.11.** Sea  $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$  una biálgebra. Decimos que  $H$  es un *álgebra de Hopf* si existe un elemento  $\mathcal{S} \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(H, H)$  que es la inversa de la identidad  $\text{id}_H$  con respecto al producto de convolución. Es decir,  $\mathcal{S}$  debe satisfacer las igualdades

$$\mathcal{S}(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H = h_{(1)}\mathcal{S}(h_{(2)}) \quad \text{para todo } h \in H.$$

Tal  $\mathcal{S}$  recibe el nombre de *antípoda* de  $H$ .

Una aplicación  $f : H \rightarrow K$  entre dos álgebras de Hopf es un *morfismo de álgebras de Hopf* si  $f$  es un morfismo de biálgebras y  $f(\mathcal{S}_H(h)) = \mathcal{S}_K(f(h))$ , para todo  $h \in H$ . En realidad, se puede ver que si  $f : H \rightarrow K$  es un morfismo de biálgebras entre dos álgebras de Hopf, entonces necesariamente  $f$  preserva la antípoda, i. e. es un morfismo de álgebras de Hopf. Un subespacio  $I$  de  $H$  es un *ideal de Hopf* si  $I$  es un bi-ideal y  $\mathcal{S}(I) \subseteq I$ . Claramente,  $I \subseteq H$  es un ideal de Hopf si y sólo si el espacio vectorial cociente  $H/I$  es un álgebra de Hopf. Por ejemplo, el coideal  $H^+ = \text{Ker } \varepsilon$  es un ideal de Hopf de  $H$  y se denomina el *ideal de aumento* de  $H$ .

Sea  $H$  un álgebra de Hopf. El conjunto de elementos de tipo grupo  $G(H)$  forma un grupo con la multiplicación  $m$ .

Para cualquier álgebra de Hopf  $H$ , a los elementos casi-primitivos  $P_{1,1}(H)$  de  $H$  se los denomina *elementos primitivos*; se puede ver que  $P_{1,1}$  es un álgebra de Lie.

**Ejemplo 1.1.12.** Sea  $G$  un grupo. Entonces el álgebra de grupo  $\mathbb{k}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g e_g : a_g \in \mathbb{k}, a_g \neq 0 \text{ para finitos } g\}$  es una coálgebra cosemisimple con todas sus subcoálgebras de dimensión 1. Más aún,  $\mathbb{k}[G]$  es un álgebra de Hopf con comultiplicación, counidad y antípoda dadas por

$$\Delta(e_g) = e_g \otimes e_g, \quad \varepsilon(e_g) = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{S}(e_g) = e_{g^{-1}},$$

para todo  $g \in G$ , respectivamente. Es claro que  $e_g \in G(\mathbb{k}[G])$  para todo  $g \in G$ . Más aún, se puede ver que  $G(\mathbb{k}[G]) \simeq G$ .

**Ejemplo 1.1.13.** Sean  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $U(\mathfrak{g})$  su álgebra universal envolvente. Entonces  $U(\mathfrak{g})$  es un álgebra de Hopf con la estructura determinada por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{S}(x) = -x, \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

Luego,  $x \in P_{1,1}(U(\mathfrak{g}))$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ . Más aún, se puede ver que  $P_{1,1}(U(\mathfrak{g})) \simeq \mathfrak{g}$ , como álgebras de Lie.

*Observación 1.1.14.* Si un álgebra de Hopf  $H$  está generada como un álgebra por elementos de tipo grupo y elementos primitivos, entonces  $H$  es punteada. En particular, un álgebra de grupo, el álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie y las  $q$ -deformaciones del álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie semisimple, son todas álgebras de Hopf punteadas.

**Definición 1.1.15.** Sean  $H$  un álgebra de Hopf y  $M$  un  $H$ -comódulo a izquierda. Se define el conjunto de *coinvariantes* de  $H$  en  $M$  por

$${}^{\text{co}H}M := \{m \in M : \delta(m) = 1 \otimes m\}.$$

Análogamente, si  $M$  es un  $H$ -comódulo a derecha, se define el conjunto de coinvariantes de  $H$  en  $M$  por

$$M^{\text{co}H} := \{m \in M : \lambda(m) = m \otimes 1\}.$$

Sean  $A$  y  $H$  álgebras de Hopf y sea  $A \xrightarrow{\pi} H$  un morfismo de álgebras de Hopf. Entonces por el Ejemplo 1.1.6,  $A$  admite una estructura de  $H$ -comódulo a izquierda y a derecha. Luego, los espacios coinvariantes se denotan por  ${}^{\text{co}H}A = {}^{\text{co}\pi}A$  y  $A^{\text{co}H} = A^{\text{co}\pi}$  y están dados por

$${}^{\text{co}\pi}A = \{a \in A : (\pi \otimes \text{id})\Delta(a) = 1 \otimes a\} \quad \text{y} \quad A^{\text{co}\pi} = \{a \in A : (\text{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}.$$

Más aún, estos espacios resultan ser subálgebras de  $A$  y se denominan las *subálgebras de coinvariantes*.

### La filtración corradical

Una herramienta esencial en el estudio de las álgebras de Hopf punteadas es la *filtración corradical*, la cual es dual a la filtración de un álgebra por las potencias del radical de Jacobson.

**Definición 1.1.16.** Sea  $C$  una coálgebra y  $C_0$  el corradical de  $C$ .

- Diremos que una familia de subespacios  $\{C(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $C$  es una *filtración de coálgebras* si

$$(i) \quad C(n) \subseteq C(n+1) \text{ y } C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(n).$$

$$(ii) \quad \Delta(C(n)) \subseteq \sum_{i=0}^n C(i) \otimes C(n-i).$$

- Para  $n \geq 1$  definimos recursivamente

$$C_n := \Delta^{-1}(C_{n-1} \otimes C + C \otimes C_0).$$

Luego,  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de subcoálgebras de  $C$  que da una filtración de coálgebras, ver [Mo, Cap. 5], [Sw, Cap. IX], [AS3, Def. 1.13]. Dicha filtración recibe el nombre de *filtración corradical* de  $C$ .

- Una coálgebra *corradicalmente graduada* es una coálgebra graduada  $D = \bigoplus_{n \geq 0} D(n)$  tal que su filtración corradical coincide con la filtración ascendente estándar proveniente de su graduación:  $D_n = \bigoplus_{0 \leq j \leq n} D(j)$ . Una coálgebra *estrictamente graduada* es una coálgebra corradicalmente graduada  $D$  tal que  $D(0)$  es de dimensión 1 – ver [Sw].
- La coálgebra graduada asociada a la filtración de coálgebras de  $C$  es  $\text{gr } C = \bigoplus_{n \geq 0} \text{gr } C(n)$ , donde  $\text{gr } C(n) := C_n/C_{n-1}$ ,  $n > 1$ , y  $\text{gr } C(0) := C_0$ . Notar que  $\text{gr } C$  es una coálgebra corradicalmente graduada.

**Lema 1.1.17.** [Mo, Teor. 5.3.1]. Sean  $C$  y  $D$  coálgebras y sea  $f : C \rightarrow D$  un morfismo de coálgebras tal que  $f|_{C_1}$  es inyectiva, entonces  $f$  es inyectiva.  $\square$

## 1.2. Espacios vectoriales trenzados

**Definición 1.2.1.** Un *espacio vectorial trenzado* es un par  $(W, c)$ , donde  $W$  es un espacio vectorial y  $c \in \text{GL}(W \otimes W)$  es una solución de la *ecuación de trenzas*

$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c) \quad \text{en } \text{End}(W \otimes W \otimes W). \quad (1.1)$$

Es bien sabido que la ecuación de trenzas es equivalente a la *ecuación cuántica de Yang-Baxter*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \quad (1.2)$$

donde  $R_{13} : W \otimes W \otimes W \rightarrow W \otimes W \otimes W$  es el mapa dado por  $\sum_j r_j \otimes \text{id} \otimes r^j$ , si  $R = \sum_j r_j \otimes r^j$ . Análogamente se definen  $R_{12}$  y  $R_{23}$ .

La equivalencia entre las soluciones de (1.1) y (1.2) está dada por la igualdad  $c = \tau \circ R$ , donde  $\tau$  es el flip definido en 1.1.2. Por esta razón algunos autores llaman a (1.1) la ecuación cuántica de Yang-Baxter.

Un ejemplo de espacio vectorial trenzado está dado por el siguiente.

**Ejemplo 1.2.2.** Sea  $W$  un espacio vectorial con base  $x_i$ ,  $i \in I$ ,  $q_{ij} \in \mathbb{k}$  una familia de escalares no nulos,  $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij}x_j \otimes x_i$ . Luego,  $(W, c)$  es un espacio vectorial trenzado.

Dicho ejemplo será de gran importancia para la presente tesis.

## 1.3. Módulos de Yetter-Drinfeld

Los ejemplos de espacios vectoriales trenzados que nos interesan están relacionados con la noción de módulo de Yetter-Drinfeld.

**Definición 1.3.1.** Sea  $H$  una  $\mathbb{k}$ -álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial  $M$  se dice un *módulo de Yetter-Drinfeld (a izquierda) sobre  $H$*  si tiene estructura de  $H$ -módulo a izquierda, de  $H$ -comódulo a izquierda y satisface la siguiente condición:

$$(hm)_{(-1)} \otimes (hm)_{(0)} = h_{(1)}m_{(-1)}Sh_{(3)} \otimes h_{(2)}m_{(0)}, \quad \forall h \in H, m \in M. \quad (1.3)$$

Se suele denotar por  ${}^H_H\mathcal{YD}$  a la clase de todos los módulos de Yetter-Drinfeld sobre  $H$  que son de dimensión finita sobre  $\mathbb{k}$ . Ésta resulta ser una categoría monoidal trenzada (ver Sección 1.4) con el producto tensorial sobre  $\mathbb{k}$ , donde para  $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$  entonces  $M \otimes N$  es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre  $H$  con estructuras de módulo y de comódulo dadas por

$$h(m \otimes n) = h_{(1)}m \otimes h_{(2)}n, \quad (m \otimes n)_{(-1)} \otimes (m \otimes n)_{(0)} = m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}, \quad (1.4)$$

objeto unidad  $\mathbf{1} = \mathbb{k}$ , axiomas de asociatividad y unidad análogos a los dados para espacios vectoriales, y trenza descrita por

$$c = c_{M,N} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M, \quad c(m \otimes n) = m_{(-1)}n \otimes m_{(0)}. \quad (1.5)$$



Resulta claro que  $c$  es un isomorfismo con inversa

$$(c_{N,M})^{-1} = c_{M,N}^{-1}, \quad m \otimes n \mapsto n_{(0)} \otimes \mathcal{S}^{-1}(n_{(-1)})m.$$

Más aún, la categoría  ${}^H_H\mathcal{YD}$  es rígida. En efecto, si  $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$ , entonces el (espacio vectorial) dual  $M^* = \text{Hom}(M, \mathbb{C})$  está en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ , con acción y coacción dadas por:

- $(h \cdot f)(m) = f(\mathcal{S}(h)(m))$ ,  $h \in H$ ,  $f \in M^*$ ,  $m \in M$ .
- Si  $f \in M^*$ , entonces  $\delta(f) = f_{(-1)} \otimes f_{(0)}$  está determinado por la ecuación

$$f_{(-1)}f_{(0)}(m) = \mathcal{S}^{-1}(m_{(-1)})f(m_{(0)}), \quad m \in M. \quad (1.6)$$

Así, los mapas evaluación y coevaluación usuales son morfismos en la categoría  ${}^H_H\mathcal{YD}$ .

Por otro lado, si denotamos por  ${}^H_H\mathcal{YD}_\infty$  a la categoría de todos los módulos de Yetter-Drinfeld sobre  $H$  (no necesariamente de dimensión finita), entonces  ${}^H_H\mathcal{YD}_\infty$  es una categoría monoidal trenzada, pero no es rígida.

*Observación 1.3.2.* Un módulo de Yetter-Drinfeld es un espacio vectorial trenzado. Recíprocamente, un espacio vectorial trenzado puede ser realizado como un módulo de Yetter-Drinfeld sobre algún álgebra de Hopf  $H$  si y sólo si  $c$  es rígida – ver [Tk1]. En ese caso, puede ser realizado de varias maneras distintas.

Recordamos que un bimódulo de Hopf sobre un álgebra de Hopf  $H$  es simultáneamente un bimódulo y un bicomódulo satisfaciendo todas las posibles condiciones de compatibilidad. La categoría  ${}^H_H\mathcal{M}_H^H$  de todos los bimódulos de Hopf sobre  $H$  es una categoría trenzada que es equivalente a  ${}^H_H\mathcal{YD}_\infty$ , como categorías trenzadas – [Wo], [AD], [Sbg], [Ro1].

Si  $H$  es un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces la categoría  ${}^H_H\mathcal{YD}_\infty$  es equivalente a la categoría de módulos sobre el *doble* de  $H$  [Mj]. La trenza en  ${}^H_H\mathcal{YD}_\infty$  corresponde a la trenza dada por la *R-matriz* canónica del doble. En particular, si  $H$  es un álgebra de Hopf semisimple, entonces  ${}^H_H\mathcal{YD}_\infty$  es una categoría semisimple. En efecto, el doble de un álgebra de Hopf semisimple es un álgebra de Hopf semisimple.

Es útil caracterizar de manera abstracta aquellos espacios vectoriales trenzados que provienen de módulos de Yetter-Drinfeld sobre álgebras de grupos.

**Definición 1.3.3.** Sea  $(W, c)$  un espacio vectorial trenzado de dimensión finita.

- Se dice que  $(W, c)$  es de *tipo grupo* si existe una base  $v_1, \dots, v_\theta$  de  $W$  y elementos  $g_i(v_j) \in W$ , para todo  $i, j$ , tales que

$$c(v_i \otimes v_j) = g_i(v_j) \otimes v_i, \quad 1 \leq i, j \leq \theta. \quad (1.7)$$

Necesariamente  $g_i \in \text{GL}(W)$ , para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq \theta$ .

- Se dice que  $(W, c)$  es de *tipo grupo finito* (resp. de *tipo grupo abeliano*) si es de tipo grupo y el subgrupo de  $\text{GL}(W)$  generado por  $g_1, \dots, g_\theta$  es finito (resp. abeliano).

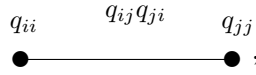
- Diremos  $(W, c)$  es de *tipo diagonal* si existe una base  $v_1, \dots, v_\theta$  de  $W$  y escalares no nulos  $q_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq \theta$ , tales que

$$c(v_i \otimes v_j) = q_{ij} v_j \otimes v_i, \quad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq \theta. \quad (1.8)$$

A la matriz  $(q_{ij})$  la llamaremos la *matriz de la trenza* y la denotaremos por  $\mathcal{Q}$ .

Notar que el Ejemplo 1.2.2 especializado al caso de dimensión de  $W$  finita es un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal.

El *diagrama de Dynkin generalizado* asociado a un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal  $(W, c)$  como arriba es el diagrama con vértices  $\{1, \dots, \theta\}$ , donde el vértice  $i$  es nombrado por  $q_{ii}$ , y si  $q_{ij}q_{ji} \neq 1$ , entonces los vértices  $i$  y  $j$  están unidos por la arista nombrada por  $q_{ij}q_{ji}$ , i. e.



ver [H2].

**Definición 1.3.4.** Un espacio vectorial trenzado  $(W, c)$  de tipo diagonal es de *tipo Cartan* si  $q_{ii}$  es una raíz de la unidad para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq \theta$ ,  $q_{ii} \neq 1$  para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq \theta$ , y existen  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ ,  $-\text{ord } q_{ii} < a_{ij} \leq 0$  tales que  $q_{ij}q_{ji} = q_{ii}^{a_{ij}}$  para todo  $1 \leq i \neq j \leq \theta$ , donde  $\text{ord } q_{ii}$  denota el orden de  $q_{ii}$  en el grupo multiplicativo  $\mathbb{G}_\infty$ .

Si definimos  $a_{ii} := 2$  para todo  $1 \leq i \leq \theta$ , entonces  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$  es una matriz de Cartan generalizada.

*Observaciones 1.3.5.* (i) Si  $W \in {}^H_H\mathcal{YD}$  con trenza  $c$ , entonces  $(W, c)$  es de tipo grupo por (1.5). Recíprocamente, supongamos que  $(W, c)$  es un espacio vectorial trenzado de tipo grupo. Sea  $\Gamma$  el subgrupo de  $\text{GL}(W)$  generado por  $g_1, \dots, g_\theta$ . Si definimos  $\delta(v_i) := g_i \otimes v_i$ ,  $1 \leq i \leq \theta$ , entonces  $\delta$  le da a  $(W, c)$  una estructura de  $\mathbb{k}\Gamma$ -comódulo. Más aún,  $(W, c)$  es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre  $\Gamma$  con trenza  $c$  – ver [Gñ3, Remark 2.14].

(ii) Un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal es claramente de tipo grupo abeliano, y es de tipo grupo finito si los coeficientes  $q_{ij}$  son raíces de la unidad.

A continuación, daremos algunos conceptos categóricos para una mejor presentación de los contenidos que desarrollaremos más adelante.

## 1.4. Álgebras de Hopf trenzadas

### 1.4.1. Categorías trenzadas

Introducimos brevemente la noción de categoría trenzada, lo cual brinda un contexto más amplio para el estudio de las álgebras de Hopf trenzadas. Las categorías trenzadas fueron introducidas en [JoSt]; ver [Ka, Cap. XI, Cap. XIII] para una exposición más detallada.

**Definición 1.4.1.** Un categoría *monoidal* o *tensorial* es una colección  $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbb{I}, \ell, r)$  donde

- $\mathcal{C}$  es una categoría y  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es un funtor,
- $\mathbb{I}$  es un objeto en  $\mathcal{C}$ , y
- $a : V \otimes (W \otimes U) \rightarrow (V \otimes W) \otimes U$ ,  $\ell : V \rightarrow V \otimes \mathbb{I}$ ,  $r : V \rightarrow \mathbb{I} \otimes V$  son isomorfismos naturales que satisfacen los llamados *axiomas del pentágono* y *del triángulo*, [Ka, Cap. XI, (2.6) y (2.9)]. Estos axiomas expresan que el producto tensorial de un número finito de objetos está bien definido, sin importar en qué lugar se ponen los paréntesis; mientras que  $\mathbb{I}$  hace las veces de unidad para el producto tensorial.

**Definición 1.4.2.** Una categoría (tensorial) *trenzada* es una colección  $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbb{I}, \ell, r, c)$  donde

- $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbb{I}, \ell, r)$  es una categoría monoidal,
- $c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  es un isomorfismo natural

tal que se satisfacen los llamados *axiomas del hexágono*, ver [Ka, Cap. XIII, (1.3) y (1.4)].

Una consecuencia importante de los axiomas de una categoría trezada es la siguiente igualdad para los objetos  $V, W, U$ :

$$(c_{V,W} \otimes \text{id}_U)(\text{id}_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes \text{id}_W) = (\text{id}_W \otimes c_{U,V})(c_{U,W} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes c_{V,W}), \quad (1.9)$$

en la cual se han omitido los morfismos de asociatividad.

**Definición 1.4.3.** Una categoría *simétrica* es una categoría trezada donde  $c_{V,W}c_{W,V} = \text{id}_{W \otimes V}$ , para todo par de objetos  $V, W$  en  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.4.4.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría monoidal y sea  $V$  un objeto en  $\mathcal{C}$ . Un objeto *dual a izquierda* de  $V$  es una terna  $(V^*, \text{ev}_V, \text{coev}_V)$ , donde  $V^*$  es un objeto en  $\mathcal{C}$  y  $\text{ev}_V : V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{I}$ ,  $\text{coev}_V : \mathbb{I} \rightarrow V \otimes V^*$  son morfismos en  $\mathcal{C}$  tales que las composiciones

$$V \rightarrow \mathbb{I} \otimes V \xrightarrow{\text{coev}_V \otimes \text{id}_V} V \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{\text{id}_V \otimes \text{ev}_V} V \otimes \mathbb{I} \rightarrow V$$

y

$$V^* \rightarrow V^* \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\text{id}_{V^*} \otimes \text{coev}_V} V^* \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{\text{ev}_V \otimes \text{id}_{V^*}} \mathbb{I} \otimes V^* \rightarrow V^*$$

coinciden con  $\text{id}_V$  y  $\text{id}_{V^*}$ , respectivamente. Diremos que una categoría trezada es *rígida* si todo objeto de  $\mathcal{C}$  admite un dual a izquierda y un dual a derecha, [Ka, Cap. XIV, Def. 2.1].

### 1.4.2. Álgebras de Hopf trezadas graduadas

La noción de álgebra de Hopf trezada es un rasgo característico de las categorías trezadas. Para ello necesitamos introducir los conceptos de álgebra y coálgebra en una categoría tensorial.

Puesto que en la presente tesis, se trabajará con álgebras de Hopf trezadas en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf  $H$  daremos esas definiciones en la categoría  ${}^H_H\mathcal{YD}$ . Más aún, en la mayor parte de la tesis  $H$  será el álgebra de grupo de un grupo finito.

Sea  $H$  un álgebra de Hopf.

**Definición 1.4.5.** Un *álgebra* en la categoría  ${}^H_H\mathcal{YD}$  es un álgebra asociativa  $(R, m)$ , donde  $m : R \otimes R \rightarrow R$  es el producto, con unidad  $u : \mathbb{k} \rightarrow R$ , tal que  $R$  es un objeto en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ , y  $m$  y  $u$  son morfismos en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ .

Una *coálgebra* en la categoría  ${}^H_H\mathcal{YD}$  es una coálgebra coasociativa  $(R, \Delta)$ , donde  $\delta : R \rightarrow R \otimes R$  es el coproducto, con counidad  $\varepsilon : R \rightarrow \mathbb{k}$ , tal que  $R$  es un objeto en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ , y  $\Delta$  y  $\varepsilon$  son morfismos en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ .

Sean  $R$  y  $S$  dos álgebras en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ . La trenza  $c : S \otimes R \rightarrow R \otimes S$  nos permite munir al módulo de Yetter-Drinfeld  $R \otimes S$  con una estructura de álgebra *torcida* en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ . El producto en  $R \otimes S$  es  $m_{R \otimes S} := (m_R \otimes m_S)(\text{id} \otimes c \otimes \text{id})$ . Denotaremos a esta álgebra por  $R \underline{\otimes} S$ . Notar que la diferencia con el producto tensorial usual de álgebras es el uso de la trenza  $c$  en lugar del flip  $\tau$ .

**Definición 1.4.6.** Una *biálgebra trenzada* en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  es una colección  $(R, m, u, \Delta, \varepsilon)$ , donde

- $(R, m, u, )$  es un álgebra en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ ,
- $(R, \Delta, \varepsilon, )$  es una coálgebra en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ ,
- $\Delta : R \rightarrow R \underline{\otimes} R$  es un morfismo de álgebras,
- $u : \mathbb{k} \rightarrow R$  y  $\varepsilon : R \rightarrow \mathbb{k}$  son morfismos de álgebras.

Un *álgebra de Hopf trenzada* en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  es una biálgebra trenzada que, además, satisface

- la identidad es inversible con respecto al producto de convolución en  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(R, R)$ .

A su inversa la llamaremos la antípoda de  $R$ .

**Definición 1.4.7.** Un *álgebra de Hopf trenzada graduada* en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  es un álgebra de Hopf trenzada  $R$  en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  munida de una graduación  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$  de módulos de Yetter-Drinfeld, tal que  $R$  es graduada como álgebra y como coálgebra.

### 1.4.3. Biproductos o bosonizaciones

Sean  $A$  y  $H$  álgebras de Hopf y  $\pi : A \rightarrow H$  y  $\iota : H \rightarrow A$  morfismos de álgebras de Hopf. Supongamos que  $\pi \iota = \text{id}_H$ , esto implica que  $\pi$  es suryectiva y que  $\iota$  es inyectiva. De manera análoga a lo que se hace en teoría de grupo, lo que se quiere es reconstruir  $A$  a partir de  $H$  y del núcleo de  $\pi$  como un “producto semidirecto”. El candidato natural para el núcleo de  $\pi$  es el álgebra de coinvariantes

$$R := A^{\text{co}\pi} = \{a \in A : (\text{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}, \quad (1.10)$$

ver Definición 1.1.15. En general,  $A^{\text{co}\pi}$  no es un álgebra de Hopf en el sentido usual, sino un álgebra de Hopf trenzada en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  con la siguiente estructura

- la acción  $\cdot$  de  $H$  sobre  $R$  es la restricción de la acción adjunta (compuesta con  $\iota$ ),
- la coacción es  $(\pi \otimes \text{id})\Delta$ ,

- $R$  es una subálgebra de  $A$ ,
- la comultiplicación es  $\Delta_R(r) = r_{(1)}\iota\pi S(r_{(2)}) \otimes r_{(3)}$ , para todo  $r \in R$ .

**Definición 1.4.8.** Sea  $R$  un álgebra de Hopf trenzada en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ . La *bosonización* o *biproducto* de  $R$  por  $H$ , que denotaremos  $R\#H$ , es un álgebra de Hopf usual cuyo espacio vectorial subyacente es  $R \otimes H$ , con multiplicación y comultiplicación dadas por

$$(r\#h)(s\#f) = r(h_{(1)} \cdot s)\#h_{(2)}f, \quad (1.11)$$

$$\Delta(r\#h) = r_{(1)}\#(r_{(2)})_{(-1)}h_{(1)} \otimes (r_{(2)})_{(0)}\#h_{(2)}, \quad (1.12)$$

para  $r, s \in R, h, f \in H$ .

Los mapas  $\pi : R\#H \rightarrow H$  y  $\iota : H \rightarrow R\#H$  dados por  $\pi(r\#h) = \varepsilon(r)h$ ,  $\iota(h) = 1\#h$ , son morfismos de álgebras de Hopf. Además, se tiene que  $R = \{a \in R\#H : (\text{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}$ .

Recíprocamente, si  $A$  y  $H$  son álgebras de Hopf como antes y  $R = A^{\text{co}\pi}$ , entonces  $A \simeq R\#H$ .

Sea  $A$  un álgebra de Hopf. Asumiremos de ahora en más que el corradical  $A_0$  de  $A$  no es solamente una subcoálgebra sino, además, una subálgebra de Hopf. Por ejemplo, esto ocurre en el caso que  $A$  es punteada.

Para estudiar la estructura de  $A$  consideraremos su filtración corradical, que es además una filtración de álgebras. Por lo tanto, la coálgebra graduada asociada es un álgebra de Hopf graduada. Más aún,  $H := A_0 \simeq \text{gr } A(0)$  es una subálgebra de Hopf de  $\text{gr } A$ . La proyección  $\pi : \text{gr } A \rightarrow \text{gr } A(0)$  es un morfismo de álgebras de Hopf cuyo núcleo es  $\bigoplus_{n>0} \text{gr } A(n)$ ; además,  $\pi$  es una retracción (inverso a izquierda) de la inclusión.

Podemos aplicar los resultados generales de bosonización.

Sea  $R$  el álgebra de los coinvariantes de  $\pi$ ;  $R$  es un álgebra de Hopf trenzada en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  y  $\text{gr } A$  puede ser reconstruida a partir de  $R$  y  $H$  como una bosonización  $\text{gr } A \simeq R\#H$ .

Puesto que  $R$  hereda la graduación de  $\text{gr } A$ , se tiene que  $R$  resulta un álgebra de Hopf trenzada graduada:  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$ , donde  $R(n) = \text{gr } A(n) \cap R$ ; más aún,  $R$  es estrictamente graduada. Por lo tanto,

- (a)  $R(0) = \mathbb{k}1$ . Luego, el corradical es trivial – ver [Sw, Cap. 11].
- (b)  $R(1) = P(R)$ , el espacio de elementos primitivos de  $R$ .

Notar que si un álgebra de Hopf trenzada  $R$  satisface (a) y (b), entonces no necesariamente satisface

- (c)  $R$  está generada como un álgebra sobre  $\mathbb{k}$  por  $R(1)$ .

**Definición 1.4.9.** Un álgebra de Hopf trenzada que satisface (a), (b) y (c) se dice un *álgebra de Nichols*.

Notar que la subálgebra  $R'$  de  $R$  generada por  $R(1)$ , la cual es una subálgebra de Hopf de  $R$ , es en efecto un álgebra de Nichols.

**Definición 1.4.10.** Sea  $W := R(1) = P(R)$ . La trenza  $c : W \otimes W \rightarrow W \otimes W$  se llama la *trenza infinitesimal* de  $A$ . El *rango* de  $A$  es la dimensión de  $W = P(R)$ . El álgebra de Hopf trenzada graduada  $R$  se llama el *diagrama* de  $A$ .

En la próxima sección se darán las definiciones y resultados básicos sobre la teoría de álgebras de Nichols.

## 1.5. Álgebras de Nichols

Sea  $H$  un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. En esta sección, se presentará un funtor  $\mathfrak{B}$  de la categoría  ${}^H_H\mathcal{YD}$  a la categoría de álgebras de Hopf trenzadas en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ ; dado un módulo de Yetter-Drinfeld  $W$ , el álgebra de Hopf trenzada  $\mathfrak{B}(W)$  se llamará un *álgebra de Nichols*.

La estructura de un álgebra de Nichols apareció por primera vez en el artículo [N] con el nombre de *biálgebra de tipo uno* y fue redescubierta más tarde por varios autores. En nuestro lenguaje, una biálgebra de tipo uno es una bosonización  $\mathfrak{B}(W)\#H$ . Luego, las álgebras de Nichols son los  $H$ -coinvariantes de biálgebras de tipo uno, también llamadas *álgebras simétricas cuánticas* en [Ro2]. Varios años después, Woronowicz definió álgebras de Nichols en [Wo], como la parte invariante de la por él llamada *álgebra de formas diferenciales cuánticas* en su contexto de “cálculo diferencial cuántico”. Por otro lado, las álgebras de Lusztig [L3] definidas por la no degeneración de una cierta forma bilineal invariante, son álgebras de Nichols. En efecto, las álgebras de Nichols pueden ser definidas por la no degeneración de una forma bilineal invariante – [AGñ1]. Por su parte, las álgebras  $\mathfrak{B}(W)$  son llamadas *álgebras bitensoriales* en [Sbg].

En algún sentido, las álgebras de Nichols son similares a las álgebras simétricas; en efecto, ambas nociones coinciden en la categoría trenzada trivial de los espacios vectoriales, o más generalmente en cualquier categoría simétrica, por ejemplo, en la categoría de súper espacios vectoriales. Pero cuando la trenza no es una simetría, entonces un álgebra de Nichols puede tener una estructura mucha más rica.

Presentamos ahora una manera alternativa de definir un álgebra de Nichols, de acuerdo a [AS3].

**Definición 1.5.1.** Sea  $W$  un módulo de Yetter-Drinfeld sobre  $H$ . Un álgebra de Hopf trenzada graduada  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$  en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  se dice un *álgebra de Nichols* de  $W$  si  $\mathbb{k} \simeq R(0)$ ,  $W \simeq R(1)$  en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ ,

- $P(R) = R(1)$ , y
- $R$  está generada como álgebra por  $R(1)$ .

La dimensión de  $W$  se llamará el *rango* de  $R$ .

A continuación, se mostrará la existencia y unicidad del álgebra de Nichols de  $W$  en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ .

Sea  $W$  un módulo de Yetter-Drinfeld sobre  $H$ . Puesto que  ${}^H_H\mathcal{YD}$  es una categoría trenzada, el álgebra tensorial  $T(W) = \bigoplus_{n \geq 0} T(V)(n)$  del espacio vectorial  $W$  admite una estructura natural de módulo de Yetter-Drinfeld sobre  $H$  con la cual  $T(W)$  resulta un álgebra en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ . Además, existe un único mapa de álgebras  $\Delta : T(W) \rightarrow T(W) \underline{\otimes} T(W)$  tal que  $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ , para todo

$v \in W$ . Así, si  $x, y \in W$ , entonces

$$\Delta(xy) = 1 \otimes xy + x \otimes y + x_{(-1)} \cdot y \otimes x_{(0)} + yx \otimes 1.$$

Con esta estructura,  $T(W)$  es un álgebra de Hopf trenzada graduada en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  con counidad  $\varepsilon : T(W) \rightarrow \mathbb{k}$ ,  $\varepsilon(v) = 0$ , para todo  $v \in W$ . La existencia de la antípoda sale del hecho de que el corradical de la coálgebra  $T(W)$  es  $\mathbb{k}$  y por un resultado de Takeuchi [Mo, Lemma 5.2.10]. Por lo tanto, todos los cocientes de biálgebras trezadas de  $T(W)$  en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  son álgebras de Hopf trezadas en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ .

Consideremos la clase  $\mathfrak{S}$  de todos los  $I \subset T(W)$  tales que

- $I$  es un ideal (homogéneo) generado por elementos homogéneos de grado  $\geq 2$ ,
- $I$  es coideal de  $T(W)$ .

Sea  $\tilde{\mathfrak{S}}$  el subconjunto de  $\mathfrak{S}$  formado por los ideales  $I \in \mathfrak{S}$  que son submódulos de Yetter-Drinfeld de  $T(W)$ . Los ideales

$$I(W) = \sum_{I \in \mathfrak{S}} I, \quad \tilde{I}(W) = \sum_{J \in \tilde{\mathfrak{S}}} J,$$

son maximales en  $\mathfrak{S}$  y  $\tilde{\mathfrak{S}}$ , respectivamente.

Si  $I \in \mathfrak{S}$ , entonces  $R := T(W)/I = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$  es un álgebra graduada y una coálgebra graduada con  $R(0) = \mathbb{k}$  y  $W \simeq R(1) \subset P(R)$ . Si  $I \in \tilde{\mathfrak{S}}$ , entonces  $R$  es un álgebra de Hopf trenzada graduada en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ .

El siguiente resultado muestra la existencia y unicidad de álgebra de Nichols.

**Proposición 1.5.2.** [AS3, Prop. 2.2]. Sea  $\mathfrak{B}(W) := T(W)/\tilde{I}(W)$ . Entonces se cumplen:

- (1)  $W = P(\mathfrak{B}(W))$ ; luego,  $\mathfrak{B}(W)$  es un álgebra de Nichols de  $W$ .
- (2)  $I(W) = \tilde{I}(W)$ .
- (3) Sea  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$  un álgebra de Hopf graduada en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  tal que  $R(0) = \mathbb{k}1$  y  $R$  está generada como álgebra por  $W := R(1)$ . Entonces existe un mapa suryectivo de álgebras de Hopf graduadas  $R \rightarrow \mathfrak{B}(W)$  que es un isomorfismo de módulos de Yetter-Drinfeld en grado 1.
- (4) Sea  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$  un álgebra de Nichols de  $W$ . Entonces  $R \simeq \mathfrak{B}(W)$  como álgebras de Hopf trezadas en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ .
- (5) Sea  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$  un álgebra de Hopf trenzada graduada en  ${}^H_H\mathcal{YD}$  con  $R(0) = \mathbb{k}1$  y  $R(1) = P(R) = W$ . Entonces  $\mathfrak{B}(W)$  es isomorfa a la subálgebra  $\mathbb{k}\langle W \rangle$  de  $R$  generada por  $W$ .  $\square$

Si  $U$  es un subespacio trenzado de  $W \in {}^H_H\mathcal{YD}$ , es decir un subespacio tal que  $c(U \otimes U) \subseteq U \otimes U$ , donde  $c$  es la trenza de  $W$ , podemos definir  $\mathfrak{B}(U) := T(U)/I(U)$ . Entonces la descripción en la proposición anterior también se aplica a  $\mathfrak{B}(U)$ .

**Corolario 1.5.3.** [AS3, Cor. 2.3]. El mapa  $W \rightarrow \mathfrak{B}(W)$  es un funtor de la categoría  ${}^H_H\mathcal{YD}$  a la categoría de álgebras de Hopf trezadas en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ . Si  $U$  es un submódulo de Yetter-Drinfeld de  $W$ , o más generalmente si  $U$  es un subespacio trenzado de  $W$ , entonces el mapa canónico  $\mathfrak{B}(U) \rightarrow \mathfrak{B}(W)$  es inyectivo.  $\square$

## El grupo de trenzas

El grupo de trenzas está presentado por generadores  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  con las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & 1 \leq i, j \leq n-1, |i-j| > 1.\end{aligned}$$

Existe una proyección natural  $\pi : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ ,  $\pi(\sigma_i) = \tau_i$ , donde  $\tau_i = (i \ i+1)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . La proyección  $\pi$  admite una sección (inverso a derecha)  $s : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$  determinada por

$$\begin{aligned}s(\tau_i) &= \sigma_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ s(\tau\omega) &= s(\tau)s(\omega), & \text{si } l(\tau\omega) = l(\tau) + l(\omega),\end{aligned}$$

donde  $l$  denota la longitud de un elemento de  $\mathbb{S}_n$  con respecto al conjunto de generadores  $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ . El mapa  $s$  es llamado la *sección de Matsumoto*. En otras palabras, si  $\omega = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_M}$  es una expresión reducida de  $\omega \in \mathbb{S}_n$ , entonces  $s(\omega) = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_M}$ .

Usando la sección  $s$  se definen los siguientes elementos en  $\mathbb{k}\mathbb{S}_n$

$$\mathfrak{S}_n := \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} s(\sigma), \quad \mathfrak{S}_{i,j} := \sum_{\sigma \in X_{i,j}} s(\sigma),$$

donde  $i+j = n$  y  $X_{i,j} := \{\sigma \in \mathbb{S}_n : \sigma(1) < \cdots < \sigma(i), \sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)\}$  es el conjunto de los  $(i, j)$ -*shuffles*. El elemento  $\mathfrak{S}_n$  es llamado el *simetrizador cuántico*.

Un espacio vectorial trenzado  $(W, c)$  induce representaciones del grupo de trenzas. Para todo  $n \geq 2$ , definimos  $\rho_n : \mathbb{B}_n \rightarrow \text{GL}(W^{\otimes n})$  por

$$\rho_n(\sigma_i) = \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id} \otimes c \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id},$$

donde  $c$  actúa en el producto tensorial de la  $i$ -ésima y de la  $i+1$ -ésima copias de  $W$ . Luego,  $\rho_n$  es una representación del grupo de trenzas. Por abuso de notación, se denotará también por  $\mathfrak{S}_n$  y  $\mathfrak{S}_{i,j}$  a los endomorfismos  $\rho(\mathfrak{S}_n)$  y  $\rho(\mathfrak{S}_{i,j})$  de  $W^{\otimes n} = T^n(W)$ .

Si  $C = \bigoplus_{n \geq 0} C(n)$  es una coálgebra graduada con comultiplicación  $\Delta$ , denotamos por  $\Delta_{i,j} : C(i+j) \rightarrow C(i) \otimes C(j)$ ,  $i, j \geq 0$ , la componente  $(i, j)$  del mapa  $\Delta$ .

**Proposición 1.5.4.** *Sea  $W \in {}^H_H\mathcal{YD}$ . Entonces*

$$\Delta_{i,j} = \mathfrak{S}_{i,j}, \tag{1.13}$$

$$\mathfrak{B}(W) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(W) / \ker(\mathfrak{S}_n). \tag{1.14}$$

*Demostración.* Ver [Sbg]. □

Para cualquier espacio vectorial trenzado  $(W, c)$  podemos definir  $\mathfrak{B}(W)$  por (1.14).

Esta descripción de las relaciones de  $\mathfrak{B}(W)$  no significa que dichas relaciones sean conocidas. En general, es bastante difícil calcular los núcleos de los mapas  $\mathfrak{S}_n$  en términos concretos.



## 1.6. Método del levante para álgebras de Hopf punteadas

Nuestra principal referencia para el problema de clasificación de álgebras de Hopf punteadas es [AS3].

Sea  $A$  un álgebra de Hopf punteada. Se considera la filtración corradical y la correspondiente coálgebra graduada asociada  $\text{gr } A$ . Ésta resulta un álgebra de Hopf graduada que se puede reconstruir a partir del corradical y de un álgebra de Hopf  $R$  en la categoría trenzada de módulos de Yetter-Drinfeld sobre el álgebra de grupo de  $G(A)$ . Este resultado de presentación de  $\text{gr } A \simeq R\#A_0$  puede ser interpretado como un análogo del Teorema de Cartier-Kostant-Milnor-Moore, válido para álgebras de Hopf coconmutativas en característica 0.

El problema de clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita puede dividirse en los siguientes subproblemas:

- (a) determinar todos los espacios vectoriales trenzados  $W$  de tipo grupo tal que  $\mathfrak{B}(W)$  es de dimensión finita.
- (b) dado un grupo finito  $G$ , determinar todas las realizaciones de espacios vectoriales trenzados  $W$  como en (a) como módulos de Yetter-Drinfeld sobre  $G$ .
- (c) el problema del Levante: para  $\mathfrak{B}(W)$  como en (a), calcular todas las álgebras de Hopf  $A$  tales que  $\text{gr } A \simeq \mathfrak{B}(W)\#H$ .
- (d) investigar cuándo un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita está generada como álgebra por sus elementos de tipo grupo y sus elementos casi-primitivos, o sea  $\text{gr } A$  está generada en grado uno.

Dicha técnica se conoce como el *método del levante*, introducido por N. Andruskiewitsch y H.-J. Schneider.

El problema principal es poder determinar si el álgebra de Nichols de un espacio vectorial trenzado es de dimensión finita, o de dimensión de Gelfand-Kirillov finita, y en caso afirmativo encontrar una presentación eficiente por generadores y relaciones. En este sentido, importantes avances se han logrado en los últimos años debido a Heckenberger, [H1, H3, H4]. Más aún, en [AS4] se clasifican las álgebras de Hopf punteadas  $H$  con  $G(H)$  abeliano, tales que los divisores primos del orden del grupo son mayores que 7, utilizando aquellos resultados.



## Capítulo 2

# Módulos de Yetter-Drinfeld sobre el álgebra de grupo de un grupo finito y sus álgebras de Nichols.

El caso de módulos de Yetter-Drinfeld sobre álgebras de grupo es especialmente importante para las aplicaciones a álgebras de Hopf punteadas.

En este capítulo, se desarrollan las principales herramientas con las que se trabajará en el resto de la tesis. Explícitamente, se analizan criterios que permiten dar condiciones suficientes para que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  tenga dimensión infinita estudiando subracks de  $\mathcal{O}$ . En la Sección 2.3, se estudian criterios de dimensión infinita mediante subracks abelianos. En la Sección 2.4, se desarrollan criterios de dimensión infinita mediante subracks no abelianos. Cabe destacar que estos últimos resultan ser notablemente útiles a la hora de aplicar la estrategia de eliminación citada en la introducción, y que antes del trabajo [AF3] no se contaba con métodos de eliminación por medio de subracks no abelianos.

Asumiremos que  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  y se denotará por  $\mathbb{G}_n$  al grupo de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad en  $\mathbb{C}$ . A lo largo de esta tesis la representación del grupo cíclico  $\mathbb{Z}/2n = \langle [1] \rangle$  correspondiente a  $\rho([1]) = \omega_{2n}^n = -1$  será denotada por  $\chi_{(-1)}$ .

### 2.1. Racks, quandles y conjuntos cruzados

Introducimos ahora algunos conceptos que utilizaremos más adelante. Se seguirá el artículo [AGñ2].

**Definición 2.1.1.** Un *rack* es un par  $(X, \triangleright)$  donde  $X$  es un conjunto no vacío y  $\triangleright : X \times X \rightarrow X$  es una función, tal que

$$\phi_i : X \rightarrow X, \quad \phi_i(j) := i \triangleright j, \quad \text{es una biyección para todo } i \in X, \quad (2.1)$$

$$i \triangleright (j \triangleright k) = (i \triangleright j) \triangleright (i \triangleright k) \quad \text{para todo } i, j, k \in X. \quad (2.2)$$

Un *quandle* es un rack  $(X, \triangleright)$  que verifica

$$i \triangleright i = i, \quad \text{para todo } i \in X. \quad (2.3)$$

Un *conjunto cruzado* es un quandle  $(X, \triangleright)$  que verifica además

$$j \triangleright i = i \quad \text{siempre que} \quad i \triangleright j = j. \tag{2.4}$$

**Definición 2.1.2.** Sean  $(X, \triangleright)$  e  $(Y, \triangleright)$  racks. Se dice que  $\psi : (X, \triangleright) \rightarrow (Y, \triangleright)$  es un *morfismo de racks* si

$$\psi(i \triangleright j) = \psi(i) \triangleright \psi(j), \quad \text{para todo } i, j \in X.$$

Morfismos de quandles (resp. conjuntos cruzados) son morfismos de racks entre quandles (resp. conjuntos cruzados).

**Definición 2.1.3.** Un *subrack* de un rack  $(X, \triangleright)$  es un subconjunto  $Y$  no vacío, tal que  $y \triangleright Y = Y$ , para todo  $y \in Y$ .

Es claro que todo subrack de un quandle (resp. conjunto cruzado) es un quandle (resp. conjunto cruzado). Cabe destacar que si  $X$  es finito, entonces  $Y$  es un subrack si y sólo si  $y \triangleright Y \subset Y$ , para todo  $y \in Y$ .

**Ejemplo 2.1.4.** Sea  $G$  un grupo cualquiera y  $X \subseteq G$  un subconjunto no vacío de  $G$ . Definamos  $\triangleright : X \times X \rightarrow X$  por  $i \triangleright j := iji^{-1}$ ; luego, se tiene que:

- (I) si  $X$  es estable por conjugación en todos los elementos de  $G$ , entonces  $(X, \triangleright)$  es un rack. Más aún,  $(X, \triangleright)$  es un conjunto cruzado, que llamaremos *estándar*.
- (II) si  $X$  es estable por conjugación en sus propios elementos y  $X$  es finito, entonces  $\phi_i$  resulta suryectiva y  $(X, \triangleright)$  es un rack.

En particular, una clase de conjugación de un grupo es un conjunto cruzado.

Sea  $(X, \triangleright)$  un rack. Se dice que  $X$  es *trivial* si  $i \triangleright j = j$ , para todo  $i, j \in X$ .

**Definición 2.1.5.** Sea  $(X, \triangleright)$  un rack. Sea  $q : X \times X \rightarrow \mathbb{C}^\times$  una función. Se dice que  $q$  es un *2-cociclo* si  $q_{i,j \triangleright k} q_{j,k} = q_{i \triangleright j, i \triangleright k} q_{i,k}$ , para todo  $i, j, k \in X$ .

Sea  $(X, \triangleright)$  un rack. Sea  $q : X \times X \rightarrow \mathbb{C}^\times$  un 2-cociclo y sea  $(\mathbb{C}X, c_q)$  el espacio vectorial trenzado asociado, es decir  $\mathbb{C}X$  es un espacio vectorial con base  $e_k, k \in X$ , y trenza  $c_q(e_k \otimes e_l) = q_{k,l} e_{k \triangleright l} \otimes e_k$ , para todo  $k, l \in X$ . Se dice que un subrack  $T$  de  $X$  es *abeliano* si  $k \triangleright l = l$  para todo  $k, l \in T$ . Si  $T$  es un subrack abeliano de  $X$ , entonces  $\mathbb{C}T$  es un subespacio vectorial trenzado de  $(\mathbb{C}X, c_q)$  de tipo diagonal.

**Definición 2.1.6.** Se dice que el espacio vectorial trenzado  $(\mathbb{C}X, c_q)$  es *negativo* si para todo subrack abeliano  $T$  de  $X$  se cumple que  $q_{kk} = -1$  y  $q_{kl}q_{lk} = 1$  para todo  $k, l \in T$ . Luego,  $\mathfrak{B}(\mathbb{C}T)$  es (equivalente por torcimiento) a un álgebra exterior y  $\dim \mathfrak{B}(\mathbb{C}T) = 2^{\text{card}T}$ . En tal caso, se dirá que la trenza es *negativa*.

**Definición 2.1.7.** Se dice que  $(\mathbb{C}X, c_q)$  es *débilmente finito* si  $\dim \mathfrak{B}(\mathbb{C}T) < \infty$  para todo subrack abeliano  $T$  de  $X$ .

Uno de nuestros objetivos es verificar cuándo  $(\mathbb{C}X, c_q)$  no es débilmente finito, pues entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathbb{C}X) = \infty$ . El caso de trenza negativa es muy particular, pero hacemos notar que casi todos los espacios vectoriales trenzados con álgebra de Nichols de dimensión finita que “no vienen del caso abeliano” – ver [Gñ2] – son negativos.

Como vimos en Ejemplo 2.1.4, una clase de conjugación de un grupo es un rack; más aún, es un conjunto cruzado. En esta tesis, los racks con los que se trabajará serán de este tipo.

Sea  $G$  un grupo finito. Para un elemento  $s \in G$  denotaremos por  $\mathcal{O}_s$  a la clase de conjugación de  $s$  en  $G$  y por  $\widehat{G}$  al conjunto de clases de isomorfismos de representaciones irreducibles de  $G$ . Se denotará con el mismo símbolo tanto a un representante de una clase en  $\widehat{G}$  como a la clase misma. Si  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G}$ , entonces  $\deg \rho$  denotará la dimensión del espacio vectorial  $V$ . Usaremos la notación de rack  $g \triangleright h = ghg^{-1}$ ,  $g, h \in G$ .

Recordamos que un comódulo a izquierda  $M$  sobre el álgebra de grupo  $\mathbb{C}G$  es el espacio vectorial  $G$ -graduado  $M = \bigoplus_{h \in G} M_h$ , donde  $M_h = \{m \in M : \delta(m) = h \otimes m\}$ , [Mo, Ex. 1.6.7].

Un módulo de Yetter-Drinfeld sobre  $G$  es un  $G$ -módulo a izquierda y un  $\mathbb{C}G$ -comódulo a izquierda  $M$  satisfaciendo la condición de compatibilidad

$$\delta(g.m) = ghg^{-1} \otimes g.m,$$

para todo  $m \in M_h$ ,  $g, h \in G$ .

En lo que sigue, mostraremos que la categoría  $\mathbb{C}G\mathcal{YD}$  es semisimple, i. e. los módulos de Yetter-Drinfeld sobre  $G$  son completamente reducibles.

Sean  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$  y  $s \in \mathcal{O}$ ; obviamente,  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_s$ . Sea  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  una numeración de  $\mathcal{O}_s$  y sean  $g_j \in G$  tales que  $g_j \triangleright s = \sigma_j$ , para todo  $j$  con  $1 \leq j \leq N$ . Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G^s}$  una representación irreducible del centralizador de  $s$  en  $G$ . Definimos

$$M(\mathcal{O}_s, \rho) := \text{Ind}_{G^s}^G V = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G^s} V = \bigoplus_{j=1}^N g_j \otimes V. \quad (2.5)$$

Escribiremos  $g_j v := g_j \otimes v \in M(\mathcal{O}_s, \rho)$ ,  $1 \leq j \leq N$ ,  $v \in V$ .  $M(\mathcal{O}_s, \rho)$  resulta ser un módulo de Yetter-Drinfeld sobre  $\mathbb{C}G$  con acción y coacción dadas por

$$g \cdot (g_j v) = g_l(\gamma \cdot v) \quad \text{y} \quad \delta(g_j v) = \sigma_j \otimes g_j v, \quad (2.6)$$

donde  $gg_j = g_l \gamma$ , para algún  $1 \leq l \leq N$  y  $\gamma \in G^s$ , y trenza dada por

$$c(g_j v \otimes g_k w) = \sigma_j \cdot (g_k w) \otimes g_j v = g_l(\gamma \cdot w) \otimes g_j v, \quad (2.7)$$

para todo  $1 \leq j, k \leq N$ ,  $v, w \in V$ , donde  $\sigma_j g_k = g_l \gamma$  para únicos  $l$ ,  $1 \leq l \leq N$  y  $\gamma \in G^s$ .

De cada clase de conjugación de  $G$  elegimos un representante; de esta manera, nos formamos un subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $G$ . El siguiente resultado parametriza a los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre  $\mathbb{C}G$  – ver [AGñ1, Prop. 3.1.2], [L4], [Wit]; ver también [DiPR] y [Ci], en los cuales se da la clasificación equivalente de los bimódulos de Hopf simples sobre  $\mathbb{k}G$ , con  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  en el primero y  $\mathbb{k}$  un cuerpo cualquiera en el segundo.

**Proposición 2.1.8.** *Los módulos de Yetter-Drinfeld  $M(\mathcal{O}_s, \rho)$  son objetos simples en la categoría  $\mathbb{C}G\mathcal{YD}$ , y cualquier objeto simple de  $\mathbb{C}G\mathcal{YD}$  es isomorfo a  $M(\mathcal{O}_s, \rho)$  para un único  $s \in \mathcal{S}$  y una única  $\rho \in \widehat{G^s}$ .  $\square$*

Notar que  $M(\mathcal{O}_s, \rho)$  depende del elemento  $s$  en  $\mathcal{O}$  y de  $\rho$  en  $\widehat{G^s}$ . Sean  $s, \tilde{s} \in \mathcal{O}$  y sea  $g \in G$  tal que  $gs g^{-1} = \tilde{s}$ ; luego,  $gG^s g^{-1} = G^{\tilde{s}}$ . Sea  $\tilde{\rho} \in \widehat{G^{\tilde{s}}}$  el pullback de  $\rho \in \widehat{G^s}$  via conjugación por  $g$ . Entonces  $M(\mathcal{O}, \rho) = M(\mathcal{O}, \tilde{\rho})$ ; en particular

$$\text{las imágenes de } \rho \text{ y } \tilde{\rho} \text{ en } \text{GL}(V) \text{ coinciden.} \tag{2.8}$$

Además, la acción de  $G$  (por conjugación) sobre el rack  $\mathcal{O}$  preserva los subracks abelianos. Entonces es natural preguntar: dados dos subracks abelianos *maximales* de  $\mathcal{O}$  ¿son conjugados por algún  $g \in G$ ?

*Observación 2.1.9.* Con las hipótesis y notación anteriores se tiene que, como  $s \in Z(G^s)$ , el centro del grupo  $G^s$ , el Lema de Schur implica que

$$s \text{ actúa por un escalar } q_{ss} \text{ sobre } V. \tag{2.9}$$

Puesto que  $G$  es finito,  $q_{ss}$  está en  $\mathbb{G}_\infty$ .

*Observación 2.1.10.* Sea  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de un elemento  $s \in G$ . Sean  $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{O}$  y sean  $g_1, g_2, g_3 \in G$  tales que  $g_i \triangleright s = x_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G^s}$ . Si  $x_1 \triangleright x_2 = x_3$ , entonces para cualquier par  $v, w \in V$  se tiene que

$$c(g_1 v \otimes g_2 w) = g_3 \rho(g_3^{-1} x_1 g_2) w \otimes g_1 v.$$

En efecto, es fácil ver que

$$x_1 \triangleright x_2 = x_3 \quad \text{si y sólo si} \quad g_3^{-1} x_1 g_2 \in G^s. \tag{2.10}$$

Ahora bien, ya que la trenza está dada por

$$c(g_1 v \otimes g_2 w) = x_1 \cdot (g_2 w) \otimes g_1 v = g_3 \rho(g_3^{-1} x_1 g_2) w \otimes g_1 v,$$

el resultado sigue por (2.10).

## 2.2. Subespacios abelianos de un espacio vectorial trenzado

Como en [AF1, AF2], en un primer paso se buscan subespacios trenzados  $W$  de tipo diagonal de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  cuya álgebra de Nichols es de dimensión infinita.

Para ello, describimos a continuación cómo encontrar subespacios vectoriales trenzados  $W$  de tipo diagonal de un espacio vectorial trenzado  $M(\mathcal{O}, \rho)$ .

Sea  $G$  un grupo finito,  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$ ,  $\rho \in \widehat{G^s}$  con  $s \in \mathcal{O}$  fijo. Como en la sección anterior, fijamos una numeración  $\sigma_1 = s, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  de  $\mathcal{O}_s$  y  $g_k \in G$  tales que  $g_k \triangleright s = \sigma_k$ , para todo  $1 \leq k \leq N$ . Sean  $I \subset \{1, \dots, N\}$  y  $T := \{\sigma_k : k \in I\}$ . Se caracterizará cuándo  $T$  es un subrack abeliano de  $\mathcal{O}_s$ . Sea

$$\gamma_{k,l} := g_l^{-1} \sigma_k g_l, \quad k, l \in I. \tag{2.11}$$

Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

$$(a) \sigma_k \triangleright \sigma_l = \sigma_l \quad (\text{i. e. } \sigma_k \text{ y } \sigma_l \text{ conmutan}) \quad \text{y} \quad (b) \gamma_{k,l} \in G^s.$$

Asumamos que (a) (o, equivalentemente, (b)) se cumple para todo  $k, l \in I$ ; entonces  $\gamma_{k,l} \in \mathcal{O}_s \cap G^s$ . Sea  $V$  el espacio vectorial de la representación  $\rho$ . Sean  $v_1, \dots, v_R$  autovectores simultáneos de los operadores  $\rho(\gamma_{k,l})$ ,  $k, l \in I$ . Por (2.7), se tiene que

$$W = \mathbb{C} - \text{span } g_k v_j, \quad k \in I, 1 \leq j \leq R,$$

es un subespacio trenzado de tipo diagonal de dimensión  $R \text{ card } T$ . Notar que  $R$  depende no solamente de  $T$  sino también de la representación  $\rho$ ; por ejemplo, si  $\rho$  es un carácter, entonces  $R = 1 = \dim V$ , y  $M(\mathcal{O}_s, \rho)$  es de *tipo rack*.

Resulta claro que para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , se cumple que

$$\{g \in G : g \triangleright s = \sigma_k\} = g_k G^s. \quad (2.12)$$

**Lema 2.2.1.** *Asumamos que  $\sigma_k, \sigma_l \in \mathcal{O}_s$  conmutan y que  $\deg \rho = 1$ . El escalar  $\rho(\gamma_{k,l})$  no depende de la elección de  $g_k$  y  $g_l$ .*

*Demostración.* Sean  $\tilde{g}_k, \tilde{g}_l \in G$  tales que  $\tilde{g}_k \triangleright s = \sigma_k$  y  $\tilde{g}_l \triangleright s = \sigma_l$ . De (2.12),  $\tilde{g}_l = g_l \eta$ , con  $\eta \in G^s$ . Si llamamos  $\tilde{\gamma}_{k,l} := \tilde{g}_l^{-1} \tilde{g}_k s \tilde{g}_k^{-1} \tilde{g}_l$ , entonces

$$\tilde{\gamma}_{k,l} = \eta^{-1} g_l^{-1} \sigma_k g_l \eta = \eta^{-1} \gamma_{k,l} \eta.$$

Así,  $\rho(\tilde{\gamma}_{k,l}) = \rho(\eta)^{-1} \rho(\gamma_{k,l}) \rho(\eta) = \rho(\gamma_{k,l})$ , ya que  $\deg \rho = 1$ . □

Debido a este resultado, podemos elegir  $g_1 = e$ , el elemento identidad del grupo  $G$ .

*Observación 2.2.2.* Si  $\deg \rho = 1$ , entonces la condición de trenza negativa es equivalente a

(i)  $\rho(\gamma_{k,k}) = -1$ , y,

(ii) para todo par  $\sigma_k, \sigma_l \in \mathcal{O}_s$  que conmuta, se cumple que  $\rho(\gamma_{k,l} \gamma_{l,k}) = 1$ . □

El siguiente resultado es útil para probar que  $M(\mathcal{O}_s, \rho)$  tiene trenza negativa cuando  $\rho$  es una representación de dimensión uno.

**Lema 2.2.3.** *La condición (ii) arriba mencionada es equivalente a*

$$(ii)' \quad \text{para todo } \sigma_t \in \mathcal{O}_s \cap G^s, \text{ se satisface que } \rho(\gamma_{1,t} \gamma_{t,1}) = 1.$$

*Demostración.* Obviamente, (ii) implica (ii)'. Recíprocamente, supongamos que (ii)' se cumple. Sean  $\sigma_k, \sigma_l \in \mathcal{O}_s$  que conmutan. Entonces,  $\gamma_{k,l} = g_l^{-1} g_k s g_k^{-1} g_l$ ,  $\gamma_{l,k} = g_k^{-1} g_l s g_l^{-1} g_k$  están en  $\mathcal{O}_s \cap G^s$ . Luego,  $\gamma_{k,l} = \sigma_t$ , para algún  $1 \leq t \leq N$ ; esto implica que  $\gamma_{t,1} = \gamma_{k,l}$  y  $\gamma_{1,t} = \eta^{-1} \gamma_{l,k} \eta$ , con  $\eta \in G^s$ . Así,

$$\rho(\gamma_{k,l} \gamma_{l,k}) = \rho(\gamma_{1,t} \gamma_{t,1}),$$

pues  $\deg \rho = 1$ . Luego,  $\rho(\gamma_{k,l} \gamma_{l,k}) = 1$ , como queríamos probar. □

### 2.3. Criterios de dimensión infinita mediante subracks abelianos

A continuación, se analizarán una serie de criterios que permiten dar condiciones suficientes para que el álgebra de Nichols de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  tenga dimensión infinita mediante subracks abelianos de  $\mathcal{O}$ .

En primer lugar, damos el siguiente resultado general. La prueba del mismo sigue inmediatamente del Corolario 1.5.3.

**Lema 2.3.1.** *Si  $U$  es un subespacio de  $W$  tal que  $c(U \otimes U) = U \otimes U$  y  $\dim \mathfrak{B}(U) = \infty$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(W) = \infty$ .  $\square$*

Una primera aplicación de este Lema es cuando existe  $v \in W - 0$  tal que  $c(v \otimes v) = v \otimes v$ ; entonces  $\dim \mathfrak{B}(W) = \infty$ . En particular, si  $W = M(\mathcal{O}, \rho)$  y  $q_{ss} = 1$ , ver (2.9), entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ . Este resultado implica que si  $\mathcal{O}_e$  es la clase de conjugación del elemento identidad de  $G$  y  $\rho \in \widehat{G}$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_e, \rho) = \infty$ .

**Teorema 2.3.2.** *[H1, Theor. 4], [AS2, Theor. 1.1]. Sea  $(W, c)$  un espacio vectorial trenzado de tipo Cartan. Entonces  $\dim \mathfrak{B}(W) < \infty$  si y sólo si la matriz de Cartan es de tipo finito.  $\square$*

**Lema 2.3.3.** *[Gñ1, Lemma 3.1]. Supongamos que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ . Entonces*

- $\deg \rho > 2$  implica  $q_{ss} = -1$ .
- $\deg \rho = 2$  implica  $q_{ss} = -1$ ,  $\omega_3$  ó  $\omega_3^2$ .  $\square$

Se dice que un elemento  $s \in G$  es *real* si es conjugado a su inverso  $s^{-1}$ ; si  $s$  es real, diremos que la clase de conjugación de  $s$  es *real*. Notar que la condición de ser real puede ser leída en la tabla de caracteres del grupo  $G$  de la siguiente manera. La tabla de caracteres de un grupo es una matriz cuadrada cuyo tamaño es igual a la cantidad de clases de conjugación del grupo  $G$ , y en la entrada  $(i, j)$  aparece el escalar correspondiente al carácter de la  $i$ -ésima representación irreducible evaluado en la  $j$ -ésima clase de conjugación. Así, si todos los escalares en una columna de la tabla de caracteres de  $G$  son reales, entonces el representante de la clase de conjugación correspondiente a esa columna es real.

El siguiente lema, a diferencia del Lema 2.3.3, no supone ninguna restricción acerca del grado de la representación  $\rho \in \widehat{G^s}$ , salvo la hipótesis de que  $s$  sea real.

**Lema 2.3.4.** *Si  $s$  es real y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_s, \rho) < \infty$ , entonces  $q_{ss} = -1$  y  $s$  tiene orden par.  $\square$*

Si  $s^{-1} \neq s$ , esto es [AZ, Lema 2.2]; mientras que si  $s^{-1} = s$ , entonces  $q_{ss} = \pm 1$ , pero  $q_{ss} = 1$  es excluido por Lema 2.3.1.

Los dos lemas siguientes son generalizaciones de Lema 2.3.4 – ver [AF2, Lemas 1.8 y 1.9] o [FrGñV, Corolario 2.2]. Se considerarán elementos  $s$  que tienen una potencia en  $\mathcal{O}$ , la clase de conjugación de  $s$ . Claramente, si  $s^j = xsx^{-1}$  está en  $\mathcal{O}$ , entonces  $s^{j^l} = x^l s x^{-l}$  está en  $\mathcal{O}$ , para todo  $l$ . Así,  $s^{j^{|x|}} = s$ ; esto implica que  $|s|$  divide a  $j^{|x|} - 1$ . Luego,

$$N \quad \text{divide a} \quad j^{|x|} - 1, \tag{2.13}$$

con  $N := |q_{ss}|$ , recordar (2.9).

**Nota:** si bien el contexto es claro, notar que se está usando una misma notación para denotar dos cosas distintas. En efecto,  $|x|$  denota el orden de  $x$  en  $G$ , mientras que  $|q_{ss}|$  denota el orden de  $q_{ss}$  en  $\mathbb{G}_\infty$ .



**Lema 2.3.5.** Sean  $G$  un grupo finito,  $s \in G$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $s$  y  $\rho \in \widehat{G^s}$ . Supongamos que existe un entero  $j$  tal que  $s$ ,  $s^j$  y  $s^{j^2}$  son elementos distintos y  $s^j$  está en  $\mathcal{O}$ . Si  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , entonces  $q_{ss} = -1$  y  $s$  tiene orden par.

*Demostración.* Asumamos que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , luego  $N > 1$ . Es fácil ver que

$$x^{-h} s^{j^l} x^h = (x^{-h} s x^h)^{j^l} = (s^{j^{|x|-h}})^{j^l} = s^{j^{|x|-h+l}}, \quad \text{para todo } l, h. \quad (2.14)$$

Llamaremos  $t_l := s^{j^l}$ ,  $g_l := x^l$ ,  $l = 0, 1, 2$ ; así  $t_l = g_l s g_l^{-1}$ , para  $l = 0, 1, 2$ . Las otras relaciones entre  $t_l$ 's y  $g_h$ 's se obtienen de (2.14). Para  $v \in V - 0$  y  $l = 1$  ó  $2$ , se define  $W_l := \mathbb{C} - \text{span de } \{g_0 v, g_l v\}$ . Luego,  $W_l$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de tipo Cartan con

$$\mathcal{Q}_l = \begin{pmatrix} q_{ss} & q_{ss}^{j^{|x|-l}} \\ q_{ss}^{j^l} & q_{ss} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_l = \begin{pmatrix} 2 & a_{12}(l) \\ a_{21}(l) & 2 \end{pmatrix},$$

donde  $a_{12}(l) = a_{21}(l) \equiv j^{|x|-l} + j^l \pmod{N}$ . Puesto que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , se tiene que  $a_{12}(l) = a_{21}(l) = 0$  ó  $-1$ . Consideremos ahora dos casos.

(i) Asumamos que  $a_{12}(1) = a_{21}(1) = 0$ . Esto implica que  $j^{|x|-1} + j \equiv 0 \pmod{N}$ . Ya que  $N$  divide a  $j^{|x|} - 1$ , resulta que  $N$  divide a  $j^2 + 1$ . Analizamos las dos posibilidades.

- Si  $a_{12}(2) = a_{21}(2) = 0$ , entonces  $j^{|x|-2} + j^2 \equiv 0 \pmod{N}$ . Como  $N$  divide a  $j^{|x|} - 1$ , obtenemos que  $N$  divide a  $j^4 + 1$ . Entonces,  $-1 \equiv 1 \pmod{N}$ ; luego el resultado sigue.
- Si  $a_{12}(2) = a_{21}(2) = -1$ , entonces  $j^{|x|-2} + j^2 \equiv -1 \pmod{N}$ . Se puede ver que  $N$  divide a  $j^4 + j^2 + 1$ ; luego  $N$  divide a  $1$ , lo cual es una contradicción.

(ii) Asumamos que  $a_{12}(1) = a_{21}(1) = -1$ . Esto implica que  $j^{|x|-1} + j \equiv -1 \pmod{N}$ . Como  $N$  divide a  $j^{|x|} - 1$ , tenemos que  $N$  divide a  $j^2 + j + 1$ . Se consideran dos posibilidades.

- Si  $a_{12}(2) = a_{21}(2) = 0$ , entonces  $j^{|x|-2} + j^2 \equiv 0 \pmod{N}$ . Así,  $N$  divide a  $j^4 + 1$ . Es fácil ver que  $N$  divide a  $j^2$ . Dado que  $j$  y  $|s|$  son coprimos,  $N$  debe ser  $1$ , lo que es una contradicción.
- Si  $a_{12}(2) = a_{21}(2) = -1$ , entonces el subespacio  $\widetilde{W} := \mathbb{C} - \text{span de } \{g_0 v, g_1 v, g_2 v\}$  de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es de tipo Cartan con

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q_{ss} & q_{ss}^{j^{|x|-1}} & q_{ss}^{j^{|x|-2}} \\ q_{ss}^j & q_{ss} & q_{ss}^{j^{|x|-1}} \\ q_{ss}^{j^2} & q_{ss}^j & q_{ss} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por Teorema 2.3.2, se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , lo cual es absurdo por hipótesis.

Esto concluye la demostración. □

**Lema 2.3.6.** Sean  $G$  un grupo finito,  $s \in G$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $s$  y  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G^s}$  tales que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ . Supongamos que existe un entero  $j$  tal que  $s^j \neq s$  y  $s^j$  está en  $\mathcal{O}$ .

(a) Si  $\deg \rho > 1$ , entonces  $q_{ss} = -1$  y  $s$  tiene orden par.

(b) Si  $\deg \rho = 1$ , entonces o bien  $q_{ss} = -1$  y  $s$  tiene orden par, o bien  $q_{ss} \in \mathbb{G}_3 - 1$ .

*Demostración.* Se procederá y usará la notación como en la demostración del lema anterior. Si  $s^{j^2} \neq s$ , entonces el resultado sigue por Lema 2.3.5. Asumamos que  $s^{j^2} = s$ . Esto implica que  $|s|$  divide a  $j^2 - 1$ , así  $N$  divide a  $j^2 - 1$ .

(a) Sean  $v_1$  y  $v_2$  en  $V$  linealmente independientes y sea  $W = \mathbb{C}\text{-span} \{g_0v_1, g_0v_2, g_1v_1, g_1v_2\}$ , con  $g_0 := \text{id}$  y  $g_1 := x$ . Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de tipo Cartan con

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q_{ss} & q_{ss} & q_{ss}^{j^{|x|-1}} & q_{ss}^{j^{|x|-1}} \\ q_{ss} & q_{ss} & q_{ss}^{j^{|x|-1}} & q_{ss}^{j^{|x|-1}} \\ q_{ss}^j & q_{ss}^j & q_{ss} & q_{ss} \\ q_{ss}^j & q_{ss}^j & q_{ss} & q_{ss} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 2 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 2 \end{pmatrix},$$

donde  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i \neq j$ ,  $a_{12} \equiv 2 \equiv a_{34} \pmod{N}$ ,  $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24}$  y

$$a_{13} \equiv j^{|x|-1} + j \pmod{N}.$$

Si  $a_{12} = 0$  ó  $a_{34} = 0$ , entonces  $N$  divide a 2 y el resultado sigue. Además, si  $a_{13} = 0$ , entonces  $j^{|x|-1} + j \equiv 0 \pmod{N}$ ; esto implica que  $N$  divide a  $j^2 + 1$ , luego  $N$  divide a 2 y el resultado sigue. Por otro lado, si  $a_{ij} = a_{ji} = -1$ , para todo  $i, j$ , tenemos que la matriz  $\mathcal{A}$  no es de tipo finito; entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Teorema 2.3.2. Esto es una contradicción por hipótesis. Por lo tanto, (a) está probado.

(b) Para  $v \in V - 0$  se define  $W := \mathbb{C}\text{-span}$  de  $\{g_0v, g_1v\}$ , con  $g_0 := \text{id}$  y  $g_1 := x$ . Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de tipo Cartan con

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q_{ss} & q_{ss}^{j^{|x|-1}} \\ q_{ss}^j & q_{ss} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & a_{12} \\ a_{21} & 2 \end{pmatrix},$$

donde  $a_{12} = a_{21} \equiv j^{|x|-1} + j \pmod{N}$ . Puesto que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , se tiene que  $a_{12} = a_{21} = 0$  ó  $-1$ . Consideramos ahora dos posibilidades.

- (i) Supongamos que  $a_{12} = 0$ . Esto implica que  $j^{|x|-1} + j \equiv 0 \pmod{N}$ . Ya que  $N$  divide a  $j^{|x|-1}$ , resulta que  $N$  divide a  $j^2 + 1$ . Entonces,  $N$  divide a 2; luego  $N = 2$ , y el resultado sigue.
- (ii) Supongamos que  $a_{12} = -1$ . Esto implica que  $j^{|x|-1} + j \equiv -1 \pmod{N}$ . Como  $N$  divide a  $j^{|x|-1}$ , se tiene que  $N$  divide a  $j^2 + j + 1$ . Así,  $N$  divide a  $j + 2$ . Si  $p$  es un divisor primo de  $N$ , entonces  $p$  divide a  $j - 1$  ó  $j + 1$ , porque  $N$  divide a  $j^2 - 1$ . Si  $p$  divide a  $j + 1$ , entonces  $p$  divide a 1, una contradicción. Consecuentemente,  $N$  divide a  $j - 1$ . Por lo tanto,  $N$  divide a 3, i. e.  $N = 3$  y el resultado sigue.

Esto concluye la prueba. □

El siguiente resultado es una herramienta importante para determinar álgebras de Nichols de dimensión infinita por medio de subracks abelianos.

**Lema 2.3.7.** *Sean  $W$  un módulo de Yetter-Drinfeld,  $U \subseteq W$  un subespacio vectorial trenzado de tipo diagonal de  $W$  con coeficientes  $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$  tales que  $q_{ii}$  es una raíz de la unidad para todo  $i$ ,*

y  $\mathcal{G}$  el diagrama de Dynkin generalizado asociado a  $U$ . Si  $\mathcal{G}$  contiene un  $r$ -ciclo con  $r > 3$ , o un vértice con valencia mayor que 3, entonces el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(U)$  tiene dimensión infinita. Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(W) = \infty$ .

*Demostración.* Sigue de [H4, Lema 20]. □

## 2.4. Criterios de dimensión infinita mediante subracks no abelianos

En esta sección, presentaremos una familia de criterios que dan condiciones suficientes para que  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  tenga dimensión infinita, mediante subracks no abelianos de  $\mathcal{O}$ . Dichos criterios han sido desarrollados en [AF3]. Recordamos la notación  $x \triangleright y = xyx^{-1}$ .

### 2.4.1. Subracks de tipo $\mathcal{D}_p$

Sea  $n > 1$  un entero impar. Sea  $\mathbb{D}_n$  el grupo diedral de orden  $2n$ , generado por  $x$  e  $y$  con relaciones  $x^2 = e = y^n$  y  $xyx = y^{-1}$ . Sea  $\mathcal{O}_x$  la clase de conjugación de  $x$  y  $\text{sgn} \in \widehat{\mathbb{D}}_n^x$  la representación signo de  $\mathbb{D}_n^x = \langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ . El objetivo de esta sección es aplicar el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.1.** [AHS, Theor. 4.8]. *El álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(M(\mathcal{O}_x, \text{sgn}) \oplus M(\mathcal{O}_x, \text{sgn}))$  tiene dimensión infinita.* □

*Observación 2.4.2.* Notar que  $M(\mathcal{O}_x, \text{sgn}) \oplus M(\mathcal{O}_x, \text{sgn})$  es isomorfo como espacio vectorial trenzado a  $(\mathbb{C}X_p, \mathfrak{q})$ , donde

- $X_p$  es el rack con  $2p$  elementos  $x_i, y_j, i, j \in \mathbb{Z}/p$ , y con estructura

$$x_i \triangleright x_j = x_{2i-j}, \quad x_i \triangleright y_j = y_{2i-j}, \quad y_i \triangleright x_j = x_{2i-j}, \quad y_i \triangleright y_j = y_{2i-j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}/p;$$

- $\mathfrak{q}$  es el cociclo constante  $\mathfrak{q} \equiv -1$ .

Si  $d$  divide a  $p$ , entonces  $X_d$  puede ser identificado con un subrack de  $X_p$ . Por esta razón, a los efectos de determinar criterios de dimensión infinita basta considerar espacios vectoriales trenzados  $(\mathbb{C}X_p, \mathfrak{q})$ , con  $p$  un primo impar. No obstante, comenzamos con definiciones y propiedades para las cuales no se necesita esa restricción sobre  $p$ .

Sea  $G$  un grupo finito y  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$ .

**Definición 2.4.3.** Sea  $p \in \mathbb{Z}$ , con  $p > 1$ . Una familia  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  de elementos distintos de  $G$  es de tipo  $\mathcal{D}_p$  si

$$\sigma_i \triangleright \sigma_j = \sigma_{2i-j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}/p. \quad (2.15)$$

Sean  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  y  $(\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  dos familias de tipo  $\mathcal{D}_p$  en  $G$ , tales que  $\sigma_i \neq \tau_j$  para todo  $i, j \in \mathbb{Z}/p$ . Diremos que  $(\sigma, \tau) := (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p} \cup (\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  es de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$  si

$$\sigma_i \triangleright \tau_j = \tau_{2i-j}, \quad \tau_i \triangleright \sigma_j = \sigma_{2i-j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}/p. \quad (2.16)$$

*Observación 2.4.4.* Si  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  es de tipo  $\mathcal{D}_p$  entonces

$$\sigma_i^{-1} \triangleright \sigma_j = \sigma_{2i-j}, \quad \sigma_i \triangleright \sigma_j^{-1} = \sigma_{2i-j}^{-1}, \quad \sigma_i^{-1} \triangleright \sigma_j^{-1} = \sigma_{2i-j}^{-1}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_i^k \triangleright \sigma_j = \sigma_{2i-j}, \quad \sigma_i \triangleright \sigma_j^k = \sigma_{2i-j}^k, \quad \sigma_i^k \triangleright \sigma_j^k = \sigma_{2i-j}^k, \quad (2.18)$$

para todo  $i, j \in \mathbb{Z}/p$ , y para todo  $k$  impar.

*Observación 2.4.5.* Asumamos que  $p$  es impar. Si  $(\sigma, \tau) = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p} \cup (\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  es de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$ , entonces para todo  $i, j$ ,

$$\sigma_i^2 = \sigma_j^2, \quad \tau_i^2 = \tau_j^2, \quad \sigma_i^2 \tau_j = \tau_j \sigma_i^2, \quad \tau_i^2 \sigma_j = \sigma_j \tau_i^2. \quad (2.19)$$

En efecto,  $\sigma_h^2 \sigma_j = \sigma_j \sigma_h^2$ ; luego,  $\sigma_{2h-j}^2 = \sigma_h \sigma_j^2 \sigma_h^{-1} = \sigma_j^2$ . Así,  $h = \frac{i+j}{2}$ .

**Lema 2.4.6.** Si  $(\sigma, \tau) = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p} \cup (\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  es de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$ , entonces

- (i)  $\sigma_k \sigma_l = \sigma_{t(l-k)+k} \sigma_{t(l-k)+l}$ ,
- (ii)  $\sigma_k \tau_l = \sigma_{2t(l-k)+k} \tau_{2t(l-k)+l}$ ,
- (iii)  $\sigma_k \tau_l = \tau_{(2t+1)(l-k)+k} \sigma_{(2t+1)(l-k)+l}$ ,

para todo  $k, l, t \in \mathbb{Z}/p$ .

Notar que también se tienen relaciones análogas intercambiando los roles de  $\sigma$  y  $\tau$ .

*Demostración.* Probaremos (i) por inducción en  $t$ ; (ii) y (iii) son similares. La afirmación es obvia cuando  $t = 0$ . Puesto que  $\sigma_k \sigma_l = \sigma_l \sigma_{l \triangleright k}$ , el resultado se cumple para  $t = 1$ . Supongamos que (i) se cumple para todo  $s \leq t$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_l &= \sigma_{t(l-k)+k} \sigma_{t(l-k)+l} \\ &= \sigma_{t(l-k)+l} \sigma_{(t(l-k)+l) \triangleright (t(l-k)+k)} = \sigma_{(t+1)(l-k)+k} \sigma_{(t+1)(l-k)+l}, \end{aligned}$$

por hipótesis inductiva. □

**Lema 2.4.7.** Asumamos que  $p$  es impar. Si  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$ , entonces para cada  $i \in \mathbb{Z}/p$  se tiene que

$$\sigma_i \tau_i = \sigma_0 \tau_0, \quad (2.20)$$

$$\tau_i \sigma_i = \tau_0 \sigma_0. \quad (2.21)$$

*Demostración.* Sean  $i, j \in \mathbb{Z}/p$ , con  $i \neq j$ . Si escribimos (ii) del Lema 2.4.6 con  $k = i, l = j$  y  $t = -(p+1)/2$ , entonces obtenemos  $\sigma_i \tau_j = \sigma_{2i-j} \tau_i$ . Luego,  $\sigma_i \tau_i \tau_j^2 = \sigma_i \tau_j \tau_j \tau_i = \sigma_{2i-j} \tau_i \tau_i \tau_{2i-j} = \sigma_{2i-j} \tau_{2i-j} \tau_i^2$ , y, por (2.19),

$$\sigma_i \tau_i = \sigma_{2i-j} \tau_{2i-j}.$$

Ahora bien, tomando  $j = 2i$  se tiene (2.20). La prueba de (2.21) es análoga. □

Sea  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  una familia de tipo  $\mathcal{D}_p$  en  $G$ , con  $p$  impar. Sean

$$g_i = \sigma_{i/2}, \quad (2.22)$$

$$\alpha_{ij} = g_{i \triangleright j}^{-1} \sigma_i g_j = \sigma_{i-j/2}^{-1} \sigma_i \sigma_{j/2}, \quad (2.23)$$

para todo  $i, j \in \mathbb{Z}/p$ . Entonces

$$g_i \triangleright \sigma_0 = \sigma_i, \quad \alpha_{ij} \in G^{\sigma_0}, \quad i, j \in \mathbb{Z}/p.$$

Sea  $(\sigma, \tau)$  de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$  y supongamos que existe  $g_\infty \in G$  tal que  $g_\infty \triangleright \sigma_0 = \tau_0$ . Definimos

$$f_i = \tau_{i/2} g_\infty, \quad (2.24)$$

$$\beta_{ij} = f_{i \triangleright j}^{-1} \sigma_i f_j = g_\infty^{-1} \tau_{i-j/2}^{-1} \sigma_i \tau_{j/2} g_\infty, \quad (2.25)$$

$$\gamma_{ij} = g_{i \triangleright j}^{-1} \tau_i g_j = \sigma_{i-j/2}^{-1} \tau_i \sigma_{j/2}, \quad (2.26)$$

$$\delta_{ij} = f_{i \triangleright j}^{-1} \tau_i f_j = g_\infty^{-1} \tau_{i-j/2}^{-1} \tau_i \tau_{j/2} g_\infty. \quad (2.27)$$

Luego,

$$f_i \triangleright \sigma_0 = \tau_i, \quad \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij} \in G^{\sigma_0}, \quad i, j \in \mathbb{Z}/p.$$

**Lema 2.4.8.** *Sea  $(\sigma, \tau) = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p} \cup (\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$ , con  $p$  primo impar, y supongamos que existe  $g_\infty \in G$  tal que  $g_\infty \triangleright \sigma_0 = \tau_0$ . Sean  $g_i$  y  $f_i$  como en (2.22) y (2.24), respectivamente. Entonces, para todo  $i, j \in \mathbb{Z}/p$ ,*

$$(a) \quad \alpha_{ij} = \delta_{ij} = \sigma_0,$$

$$(b) \quad \beta_{ij} = g_\infty^{-1} \sigma_0 g_\infty,$$

$$(c) \quad \gamma_{ij} = \tau_0.$$

*Demostración.* Sean  $k, l$  en  $\mathbb{Z}/p$ . Luego, para todo  $r \in \mathbb{Z}/p$ , tenemos que

$$\sigma_k \sigma_l = \sigma_{k+r} \sigma_{l+r}, \quad \sigma_k \tau_l = \sigma_{k+r} \tau_{l+r}, \quad \sigma_k \tau_l = \tau_{k+r} \sigma_{l+r}. \quad (2.28)$$

En efecto, en el caso que  $k = l$  esto sigue de (2.19) y del Lema 2.4.7, mientras que si  $k \neq l$ , se obtiene de (2.19) y Lema 2.4.6. Existen identidades similares intercambiando  $\sigma$ 's y  $\tau$ 's. Ahora,

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \sigma_{i-j/2}^{-1} \sigma_i \sigma_{j/2} \stackrel{(2.28)}{=} \sigma_0, \\ \delta_{ij} &= g_\infty^{-1} \tau_{i-j/2}^{-1} \tau_i \tau_{j/2} g_\infty \stackrel{(2.28)}{=} g_\infty^{-1} \tau_0 g_\infty = \sigma_0, \\ \beta_{ij} &= g_\infty^{-1} \tau_{i-j/2}^{-1} \sigma_i \tau_{j/2} g_\infty \stackrel{(2.28)}{=} g_\infty^{-1} \sigma_0 g_\infty, \\ \gamma_{ij} &= \sigma_{i-j/2}^{-1} \tau_i \sigma_{j/2} \stackrel{(2.28)}{=} \sigma_{i-j/2}^{-1} \sigma_{i-j/2} \tau_0 = \tau_0, \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

Probaremos ahora el principal resultado de la sección.

**Teorema 2.4.9.** Sean  $p$  primo impar y  $(\sigma, \tau) = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p} \cup (\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  una familia de elementos en  $G$  con  $\sigma_0 \in \mathcal{O}$ . Sea  $(\rho, V)$  una representación irreducible del centralizador  $G^{\sigma_0}$ . Asumamos que

(H1)  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$ ;

(H2)  $(\sigma, \tau) \subseteq \mathcal{O}$ , con  $g_\infty \in G$  tal que  $g_\infty \triangleright \sigma_0 = \tau_0$ ;

(H3)  $q_{\sigma_0 \sigma_0} = -1$ ;

(H4) existen  $v, w \in V - 0$  tales que,

$$\rho(g_\infty^{-1} \sigma_0 g_\infty) w = -w, \quad (2.29)$$

$$\rho(\tau_0) v = -v. \quad (2.30)$$

Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

*Demostración.* Sean  $v, w \in V - 0$  como en (H4) y  $W$  el espacio vectorial generado por  $\{g_i v : i \in \mathbb{Z}/p\} \cup \{f_i w : i \in \mathbb{Z}/p\}$ . Sea  $\Psi : \mathbb{C}X_p \rightarrow W$  dada por  $\Psi(x_i) = g_i v$ ,  $\Psi(y_i) = f_i w$ ,  $i \in \mathbb{Z}/p$ . Puesto que los elementos  $\sigma_i$  y  $\tau_j$  son todos diferentes,  $\Psi$  es un isomorfismo lineal. Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  y  $\Psi$  es un isomorfismo de espacios vectoriales trenzados. En efecto, podemos calcular que la trenza en  $W$  está dada por:

$$\begin{aligned} c(g_i v \otimes g_j v) &= \sigma_i g_j v \otimes g_i v = g_{i \triangleright j} \alpha_{ij} v \otimes g_i v \stackrel{(H3)}{=} -g_{i \triangleright j} v \otimes g_i v, \\ c(g_i v \otimes f_j w) &= \sigma_s i_j w \otimes g_i v = f_{i \triangleright j} \beta_{ij} w \otimes g_i v \stackrel{(2.29)}{=} -f_{i \triangleright j} w \otimes g_i v, \\ c(f_i w \otimes g_j v) &= \tau_i g_j v \otimes f_i w = g_{i \triangleright j} \gamma_{ij} v \otimes f_i w \stackrel{(2.30)}{=} -g_{i \triangleright j} v \otimes f_i w, \\ c(f_i w \otimes f_j w) &= \tau_s i_j w \otimes f_i w = f_{i \triangleright j} \delta_{ij} w \otimes f_i w \stackrel{(H3)}{=} -f_{i \triangleright j} w \otimes f_i w, \end{aligned}$$

por Lema 2.4.8. Luego,  $\dim \mathfrak{B}(W) = \infty$  por Teorema 2.4.1. Ahora el teorema sigue del Lema 2.3.1.  $\square$

Como una consecuencia del Teorema 2.4.9, podemos enunciar un criterio muy útil.

**Corolario 2.4.10.** Sean  $G$  un grupo finito,  $\sigma_i$ ,  $0 \leq i \leq p-1$ , elementos distintos en  $G$ , con  $p$  un primo impar. Asumamos que existe  $k$ ,  $1 \leq k \leq |\sigma_0|$ , tal que  $\sigma_0^k \neq \sigma_0$  y  $\sigma_0^k \in \mathcal{O}$ , la clase de conjugación de  $\sigma_0$ . Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G^{\sigma_0}}$ . Si

(i)  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  es de tipo  $\mathcal{D}_p$ , y

(ii)  $q_{\sigma_0 \sigma_0} = -1$ ,

entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

*Demostración.* Por la hipótesis (ii), el orden de  $\sigma_0$  es par; luego,  $k$  es impar, digamos que  $k = 2t + 1$ , con  $t \geq 1$ . Sean  $\tau_i := \sigma_i^k$ ,  $0 \leq i \leq p-1$ , y  $g_\infty \in G$  tal que  $g_\infty \triangleright \sigma_0 = \sigma_0^k$ . Sea  $(\sigma, \tau) = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p} \cup (\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$ ; claramente,  $(\sigma, \tau) \subseteq \mathcal{O}$ . Afirmamos que  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$ . En efecto, es fácil ver que  $\sigma_i, \tau_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}/p$ , son todos distintos; ahora, usando (i) y (2.18) la afirmación queda probada.

Resta verificar la hipótesis (H4) del Teorema 2.4.9. Puesto que  $g_\infty \sigma_0 g_\infty^{-1} = \sigma_0^k$ , se tiene que  $g_\infty^l \sigma_0 g_\infty^{-l} = \sigma_0^{k^l}$ , para todo  $l \geq 0$ . En particular,

$$g_\infty^{-1} \sigma_0 g_\infty = g_\infty^{|g_\infty|-1} \sigma_0 g_\infty^{-|g_\infty|+1} = \sigma_0^{k^{|g_\infty|-1}}.$$

Ahora, como  $q_{\sigma_0 \sigma_0} = -1$  y  $k$  es impar, entonces tenemos que  $\rho(g_\infty^{-1} \sigma_0 g_\infty) = -\text{Id}$ . Luego, se cumple (2.29), para cualquier  $w \in V - 0$ . Además,  $\rho(\tau_0) = \rho(\sigma_0^k) = (-\text{Id})^k = -\text{Id}$ , porque  $k$  es impar; así, se cumple (2.30), para cualquier  $v \in V - 0$ . Luego, tomando cualquier  $v$  y  $w$  en  $V - 0$ , estamos en las condiciones del Teorema 2.4.9. Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .  $\square$

**Ejemplo 2.4.11.** Let  $m \geq 6$ . Let  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ ,  $\mathcal{O}$  the conjugacy class de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ . Si there exists  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , such that

- $2p$  divides  $j$ , for some impar prime  $p$ , y
- $n_j \geq 1$ ;

entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

### 2.4.2. Subracks de tipo $\mathcal{D}_3$

El caso de los racks de tipo  $\mathcal{D}_3$  son particularmente interesantes. Es por eso que, en esta subsección, se estudian criterios para determinar cuándo una clase de conjugación  $\mathcal{O}$  de un grupo contiene subracks de tipo de  $\mathcal{D}_3$ .

Sean  $G$  un grupo finito,  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in G$  distintos y  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$ . Luego,  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$  si vale que

$$\sigma_i \triangleright \sigma_j = \sigma_k, \quad \text{donde } i, j, k \text{ son todos distintos.} \quad (2.31)$$

Notar que  $\sigma_i \triangleright \sigma_i = \sigma_i$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , y que (2.31) determina 6 relaciones.

**Proposición 2.4.12.** *Si valen*

$$\sigma_0 \triangleright \sigma_1 = \sigma_2, \quad (2.32)$$

$$\sigma_0 \triangleright \sigma_2 = \sigma_1, \quad (2.33)$$

$$\sigma_1 \triangleright \sigma_2 = \sigma_0, \quad (2.34)$$

entonces  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$ .

*Demostración.* Tenemos que probar

$$\sigma_2 \triangleright \sigma_1 = \sigma_0, \quad (2.35)$$

$$\sigma_2 \triangleright \sigma_0 = \sigma_1, \quad (2.36)$$

$$\sigma_1 \triangleright \sigma_0 = \sigma_2. \quad (2.37)$$

La igualdad (2.35) sigue de

$$\sigma_2 \triangleright \sigma_1 \stackrel{(2.32)}{=} \stackrel{(2.33)}{=} (\sigma_0 \triangleright \sigma_1) \triangleright (\sigma_0 \triangleright \sigma_2) \stackrel{(2.2)}{=} \sigma_0 \triangleright (\sigma_1 \triangleright \sigma_2) \stackrel{(2.34)}{=} \sigma_0.$$

Por otro lado, si hacemos actuar  $\sigma_2$  en (2.34) tenemos

$$\sigma_2 \triangleright \sigma_0 \stackrel{(2.2)}{=} (\sigma_2 \triangleright \sigma_1) \triangleright (\sigma_2 \triangleright \sigma_2) \stackrel{(2.35)}{=} \sigma_0 \triangleright \sigma_2 \stackrel{(2.33)}{=} \sigma_1,$$

mientras que si hacemos actuar  $\sigma_1$  en (2.35) se tiene

$$\sigma_1 \triangleright \sigma_0 \stackrel{(2.2)}{=} (\sigma_1 \triangleright \sigma_2) \triangleright (\sigma_1 \triangleright \sigma_1) \stackrel{(2.34)}{=} \sigma_0 \triangleright \sigma_1 \stackrel{(2.32)}{=} \sigma_2.$$

Esto concluye la prueba. □

La siguiente es una caracterización de la propiedad de ser  $\mathcal{D}_3$ .

**Proposición 2.4.13.** *Sean  $\sigma_0, \sigma_1 \in \mathcal{O}$ . Definamos  $\sigma_2 := \sigma_0 \triangleright \sigma_1$ . Entonces  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$  si y sólo si*

$$\sigma_0 \notin G^{\sigma_1}, \tag{2.38}$$

$$\sigma_0^2 \in G^{\sigma_1}, \tag{2.39}$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 \triangleright (\sigma_0 \triangleright \sigma_1). \tag{2.40}$$

*Demostración.* Notar que la definición de  $\sigma_2$  es equivalente a (2.32) y que (2.40) equivale a (2.34).

Supongamos que  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$ . Como  $\sigma_2 \neq \sigma_1$  se tiene que  $\sigma_0 \notin G^{\sigma_1}$ . Además,  $\sigma_0^2 \triangleright \sigma_1 = \sigma_0 \triangleright (\sigma_0 \triangleright \sigma_1) = \sigma_0 \triangleright \sigma_2 = \sigma_1$ . Esto implica que  $\sigma_0^2 \in G^{\sigma_1}$ .

Recíprocamente, si  $\sigma_0 \notin G^{\sigma_1}$ , entonces  $\sigma_0 \neq \sigma_1$ ,  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , y  $\sigma_0 \neq \sigma_2$  sigue de (2.38) y (2.40). Ahora bien, (2.33) se satisface pues  $\sigma_0 \triangleright \sigma_2 = \sigma_0^2 \triangleright \sigma_1 = \sigma_1$ . Por lo tanto,  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$ . □

Sean  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_0, \tau_1, \tau_2 \in G$  elementos distintos. Notar que  $(\sigma, \tau) = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_0, \tau_1, \tau_2)$  es de tipo  $\mathcal{D}_3^{(2)}$ , si  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  y  $(\tau_j)_{0 \leq j \leq 2}$  son de tipo  $\mathcal{D}_3$  y vale

$$\sigma_i \triangleright \tau_j = \tau_k, \quad \tau_i \triangleright \sigma_j = \sigma_k, \quad \text{donde } i, j, k \text{ son todos distintos.} \tag{2.41}$$

Notar que (2.41) determina 18 relaciones.

**Lema 2.4.14.** *Sean  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  y  $(\tau_j)_{0 \leq j \leq 2}$  tales que valen (2.32), (2.33), (2.34) para  $\sigma$  y para  $\tau$ , y además valen*

$$\sigma_0 \triangleright \tau_0 = \tau_0, \tag{2.42}$$

$$\sigma_0 \triangleright \tau_1 = \tau_2, \tag{2.43}$$

$$\sigma_1 \triangleright \tau_0 = \tau_2, \tag{2.44}$$

entonces  $\sigma_i \triangleright \tau_i = \tau_i$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , y  $\sigma_i \triangleright \tau_j = \tau_k$ , para todo  $i, j, k$  distintos.

*Demostración.* Tenemos que probar

$$\sigma_0 \triangleright \tau_2 = \tau_1, \tag{2.45}$$

$$\sigma_2 \triangleright \tau_2 = \tau_2, \tag{2.46}$$

$$\sigma_1 \triangleright \tau_1 = \tau_1, \tag{2.47}$$

$$\sigma_2 \triangleright \tau_0 = \tau_1, \tag{2.48}$$

$$\sigma_2 \triangleright \tau_1 = \tau_0, \tag{2.49}$$

$$\sigma_1 \triangleright \tau_2 = \tau_0, \tag{2.50}$$



La igualdad (2.45) es cierta pues

$$\sigma_0 \triangleright \tau_2 = \sigma_0 \triangleright (\tau_0 \triangleright \tau_1) = \tau_0 \triangleright \tau_2 = \tau_1,$$

mientras que (2.46) y (2.47) valen pues

$$\begin{aligned} \sigma_2 \triangleright \tau_2 &= (\sigma_1 \triangleright \sigma_0) \triangleright (\sigma_1 \triangleright \tau_0) = \sigma_1 \triangleright (\sigma_0 \triangleright \tau_0) = \sigma_1 \triangleright \tau_0 = \tau_2, \\ \sigma_1 \triangleright \tau_1 &= (\sigma_0 \triangleright \sigma_2) \triangleright (\sigma_0 \triangleright \tau_2) = \sigma_0 \triangleright (\sigma_2 \triangleright \tau_2) = \sigma_0 \triangleright \tau_2 = \tau_1. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\sigma_2 \triangleright \tau_0 = (\sigma_0 \triangleright \sigma_1) \triangleright (\sigma_0 \triangleright \tau_0) = \sigma_0 \triangleright (\sigma_1 \triangleright \tau_0) = \sigma_0 \triangleright \tau_2 = \tau_1,$$

muestra (2.48). Finalmente,

$$\sigma_2 \triangleright \tau_1 = \sigma_2 \triangleright (\sigma_0 \triangleright \tau_2) = \sigma_1 \triangleright (\sigma_2 \triangleright \tau_2) = \sigma_1 \triangleright \tau_2 = \sigma_1 \triangleright (\tau_0 \triangleright \tau_1) = \tau_2 \triangleright \tau_1 = \tau_0,$$

prueba (2.49) y (2.50).  $\square$

*Observación 2.4.15.* Con esto hemos mostrado que 6 generadores  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_0, \tau_1, \tau_2 \in G$ , y 12 relaciones (2.32), (2.33), (2.34), para  $\sigma$  y para  $\tau$ , (2.42), (2.43), (2.44), y sus relaciones análogas

$$\tau_0 \triangleright \sigma_0 = \sigma_0, \tag{2.51}$$

$$\tau_0 \triangleright \sigma_1 = \sigma_2, \tag{2.52}$$

$$\tau_1 \triangleright \sigma_0 = \sigma_2, \tag{2.53}$$

implican que  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathcal{D}_2^{(3)}$ .

Veremos que podemos prescindir de 3 de las 12 relaciones.

**Lema 2.4.16.** Sean  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_0, \tau_1, \tau_2 \in G$ , tales que valen (2.32), (2.33), (2.34), para  $\sigma$  y para  $\tau$ , y las relaciones (2.42), (2.44) y (2.52). Entonces  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathcal{D}_3^{(2)}$ .

*Demostración.* Por Lema 2.4.14, basta ver que valen (2.43), (2.51) y (2.53).

En primer lugar, (2.51) vale pues  $\tau_0 = \sigma_0 \triangleright \tau_0 = \sigma_0 \tau_0 \sigma_0^{-1}$ . Por otro lado, haciendo actuar por  $\tau_0$  a (2.44) tenemos que

$$\tau_1 = \tau_0 \triangleright \tau_2 = (\tau_0 \triangleright \sigma_1) \triangleright (\tau_0 \triangleright \tau_0) = \sigma_2 \triangleright \tau_0;$$

ahora haciendo actuar por  $\sigma_0$  a esta última se tiene que

$$\sigma_0 \triangleright \tau_1 = (\sigma_0 \triangleright \sigma_2) \triangleright (\sigma_0 \triangleright \tau_0) = \sigma_1 \triangleright \tau_0 \stackrel{(2.44)}{=} \tau_2.$$

Luego, vale (2.43). Por Lema 2.4.14, vale que  $\sigma_i \triangleright \tau_i = \tau_i$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , y  $\sigma_i \triangleright \tau_j = \tau_k$ , para todo  $i, j, k$  distintos. Ahora bien, haciendo actuar por  $\sigma_2$  a (2.52) tenemos que

$$\sigma_2 = (\sigma_2 \triangleright \tau_0) \triangleright (\sigma_2 \triangleright \sigma_1) = \tau_1 \triangleright \sigma_0,$$

que es (2.53). Luego, por Lema 2.4.14, cambiando los roles de  $\sigma$  y  $\tau$ , se tiene que  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathcal{D}_3^{(2)}$ , como se quería probar.  $\square$

Los resultados anteriores nos permiten caracterizar la propiedad de ser  $\mathcal{D}_3^{(2)}$  de una manera análoga a lo hecho en la Proposición 2.4.13.

**Proposición 2.4.17.** *Sean  $\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1$  todos distintos que verifican*

- (1)  $\sigma_0 \notin G^{\sigma_1}$ ,
- (2)  $\sigma_0^2 \in G^{\sigma_1}$ ,
- (3)  $\sigma_0 = \sigma_1 \triangleright (\sigma_0 \triangleright \sigma_1)$ ,
- (4)  $\tau_0 \notin G^{\tau_1}$ ,
- (5)  $\tau_0^2 \in G^{\tau_1}$ ,
- (6)  $\tau_0 = \tau_1 \triangleright (\tau_0 \triangleright \tau_1)$ ,
- (7)  $\sigma_0 \triangleright \tau_0 = \tau_0$ ,
- (8)  $\sigma_1 \triangleright \tau_0 = \tau_2$ ,
- (9)  $\tau_0 \triangleright \sigma_1 = \sigma_2$ ,

donde  $\sigma_2 = \sigma_0 \triangleright \sigma_1$  y  $\tau_2 = \tau_0 \triangleright \tau_1$ . Entonces  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathcal{D}_3^{(2)}$ . □

**Lema 2.4.18.** *Sea  $G$  grupo finito,  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$  y  $\sigma_i, \tau_i \in \mathcal{O}$ ,  $0 \leq i \leq 2$ . Supongamos que  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathcal{D}_3^{(2)}$ . Entonces*

- (i)  $\sigma_0\tau_1 = \tau_2\sigma_0 = \sigma_1\tau_2 = \tau_0\sigma_1 = \sigma_2\tau_0 = \tau_1\sigma_2$ ,
- (ii)  $\sigma_0\tau_2 = \tau_1\sigma_0 = \sigma_2\tau_1 = \tau_0\sigma_2 = \sigma_1\tau_0 = \tau_2\sigma_1$ ,
- (iii)  $\sigma_0\tau_0 = \sigma_1\tau_1 = \sigma_2\tau_2$ ,
- (iv)  $\tau_0\sigma_0 = \tau_1\sigma_1 = \tau_2\sigma_2$ .

*Demostración.* (i) y (ii). Por cálculos directos. Veamos (iii). Usando (i) y las relaciones de rack, tenemos que

$$\sigma_1\tau_1\tau_0^2 = \sigma_1\tau_1\tau_2^2 = \sigma_1\tau_2\tau_2\tau_1 = \sigma_0\tau_1\tau_1\tau_0 = \sigma_0\tau_1^2\tau_0 = \sigma_0\tau_0^2\tau_0 = \sigma_0\tau_0^3.$$

Luego,  $\sigma_1\tau_1 = \sigma_0\tau_0$ . Ahora, aplicando  $\tau_0 \triangleright \_$  a esta última identidad se tiene que  $\sigma_2\tau_2 = \sigma_0\tau_0$ . (iv) se prueba de manera análoga a (iii). □

## Aplicaciones

Presentaremos ahora una especialización de la Observación 2.4.2 al caso  $p = 3$ . Si bien lo mismo vale cuando  $p$  es un primo impar cualquiera, desarrollaremos este caso dado la importancia del criterio  $\mathcal{D}_3$  a la hora de eliminar pares  $(\mathcal{O}, \rho)$ .

Sean  $G$  un grupo finito,  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$ . Sean  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{O}$  elementos distintos tales que  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$ . Definimos

$$g_1 := \sigma_0, \quad g_2 := \sigma_2, \quad g_3 := \sigma_1;$$

luego, se cumple que  $\sigma_i = g_i \triangleright \sigma_0$ ,  $0 \leq i \leq 2$ . Es fácil ver que se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{array}{lll} \sigma_0 g_1 = g_1 \sigma_0, & \sigma_0 g_2 = g_3 \sigma_0, & \sigma_0 g_3 = g_2 \sigma_0, \\ \sigma_1 g_1 = g_3 \sigma_0, & \sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_0, & \sigma_1 g_3 = g_1 \sigma_0, \\ \sigma_2 g_1 = g_2 \sigma_0, & \sigma_2 g_2 = g_1 \sigma_0, & \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_0. \end{array}$$

Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G^{\sigma_0}}$  y sea  $v \in V - 0$ . Definimos  $W := \text{span}\{g_1 v, g_2 v, g_3 v\}$ . Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}, \rho)$ ; para ello usar las relaciones inmediatas anteriores y el hecho de que la trenza en  $W$  satisface

$$c(g_i v \otimes g_j v) = g_{i \triangleright j} \rho(g_{i \triangleright j}^{-1} \sigma_i g_j)(v) \otimes g_i v, \quad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq 3,$$

por la Observación 2.1.10.

**Lema 2.4.19.** *Sean  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, g_1, g_2, g_3, (\rho, V), W$  como arriba. Supongamos que  $q_{\sigma_0 \sigma_0} = -1$ . Entonces la trenza en  $W$  satisface*

$$c(g_i v \otimes g_j v) = -g_{i \triangleright j} v \otimes g_i v, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

donde  $i \triangleright i = i$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , e  $i \triangleright j = k$ , para  $i, j, k$  distintos. Más aún,  $W$  es isomorfo a  $M(\mathcal{O}_2^3, \text{sgn})$  como espacios vectoriales trenzados, donde  $\mathcal{O}_2^3$  denota la clase de conjugación de las transposiciones en  $\mathbb{S}_3$  y  $\text{sgn}$  es la representación signo de  $\mathbb{Z}/2$ .

*Demostración.* Por la primera identidad de (2.19) y  $q_{\sigma_0 \sigma_0} = -1$ , tenemos que  $\rho(\sigma_1^2) = \text{Id} = \rho(\sigma_2^2)$ . Ahora mostrar la primera afirmación es fácil. Veamos la segunda afirmación. La clase de conjugación de las transposiciones en  $\mathbb{S}_3$  es

$$\mathcal{O}_2^3 = \{\tilde{\sigma}_1 = (1 \ 2), \tilde{\sigma}_2 = (2 \ 3), \tilde{\sigma}_3 = (1 \ 3)\}.$$

Si  $\tilde{g}_1 = \tilde{\sigma}_1$ ,  $\tilde{g}_2 = \tilde{\sigma}_3$ ,  $\tilde{g}_3 = \tilde{\sigma}_2$ , entonces  $\tilde{g}_i \triangleright \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_i$ ,  $0 \leq i \leq 2$ . Luego,  $M(\mathcal{O}_2^3, \text{sgn}) = \text{span}\{\tilde{g}_1 v_0, \tilde{g}_2 v_0, \tilde{g}_3 v_0\}$ , con  $v_0 \in V_0 - 0$ , donde  $V_0$  es el espacio vectorial de la representación signo de  $\mathbb{Z}/2$ . Ahora bien, el mapa  $W \rightarrow M(\mathcal{O}_2^3, \text{sgn})$  dado por

$$g_1 v \mapsto \tilde{g}_1 v_0, \quad g_2 v \mapsto \tilde{g}_2 v_0, \quad g_3 v \mapsto \tilde{g}_3 v_0,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales trenzados. □

*Observación 2.4.20.* La prueba del lema anterior equivale a decir que el *segundo grupo de cohomología de rack* – ver [AGñ2, Definición 4.3] –  $H^2(\mathcal{D}_3, \mathbb{Z})$ , es isomorfo al grupo de los números enteros – ver [AGñ2, Remark 4.8].

En los capítulos subsiguientes, se dará una gran variedad de ejemplos de subracks de tipo  $\mathcal{D}_p$  en una clase de conjugación.

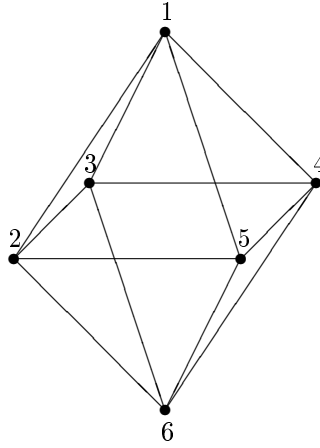


Figura 2.1: Rack del octaedro.

### 2.4.3. Subracks de tipo $\mathfrak{D}$

El *rack del octaedro* es el rack  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  dado por los vértices del octaedro con la operación de rack dada por la regla de la “mano derecha”, i. e. si  $T_i$  es el mapa lineal ortogonal que fija a  $i$  y rota el plano ortogonal en un ángulo de  $\pi/2$  con la regla de la mano derecha (dirigiendo el pulgar hacia  $i$ ), entonces definimos  $\triangleright : X \times X \rightarrow X$  por  $i \triangleright j := T_i(j)$  – ver Figura 2.1.

Explícitamente,

$$\begin{aligned}
 1 \triangleright 1 &= 1, & 2 \triangleright 1 &= 3, & 3 \triangleright 1 &= 4, & 4 \triangleright 1 &= 5, & 5 \triangleright 1 &= 2, & 6 \triangleright 1 &= 1, \\
 1 \triangleright 2 &= 5, & 2 \triangleright 2 &= 2, & 3 \triangleright 2 &= 1, & 4 \triangleright 2 &= 2, & 5 \triangleright 2 &= 6, & 6 \triangleright 2 &= 3, \\
 1 \triangleright 3 &= 2, & 2 \triangleright 3 &= 6, & 3 \triangleright 3 &= 3, & 4 \triangleright 3 &= 1, & 5 \triangleright 3 &= 3, & 6 \triangleright 3 &= 4, \\
 1 \triangleright 4 &= 3, & 2 \triangleright 4 &= 4, & 3 \triangleright 4 &= 6, & 4 \triangleright 4 &= 4, & 5 \triangleright 4 &= 1, & 6 \triangleright 4 &= 5, \\
 1 \triangleright 5 &= 4, & 2 \triangleright 5 &= 1, & 3 \triangleright 5 &= 5, & 4 \triangleright 5 &= 6, & 5 \triangleright 5 &= 5, & 6 \triangleright 5 &= 2, \\
 1 \triangleright 6 &= 6, & 2 \triangleright 6 &= 5, & 3 \triangleright 6 &= 2, & 4 \triangleright 6 &= 3, & 5 \triangleright 6 &= 4, & 6 \triangleright 6 &= 6.
 \end{aligned}$$

Sean  $G$  un grupo finito,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \in G$  distintos y  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma_1$  en  $G$ . Recordamos la notación  $x \triangleright y = xyx^{-1}$ .

**Definición 2.4.21.** Diremos que  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6}$  es de *tipo  $\mathfrak{D}$*  si vale que

$$\sigma_i \triangleright \sigma_j = \sigma_{i \triangleright j}, \quad 1 \leq i, j \leq 6,$$

donde la operación  $\triangleright$  en el subíndice es la operación de rack en el rack del octaedro. En otras palabras,  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6}$  es de tipo  $\mathfrak{D}$  si y sólo si  $\{\sigma_i : 1 \leq i \leq 6\}$  forma un subrack en  $\mathcal{O}$  isomorfo al rack del octaedro.

**Ejemplo 2.4.22.** Sea  $m \geq 4$ . Consideremos en  $\mathbb{S}_m$  los 4-ciclos

$$\sigma_1 = (1234), \quad \sigma_2 = (1243), \quad \sigma_3 = (1324), \quad \sigma_4 = (1342), \quad \sigma_5 = (1423), \quad \sigma_6 = (1432).$$

Es fácil ver que  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6}$  satisface las relaciones dadas en la definición anterior. Luego,  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6}$  es de tipo  $\mathfrak{D}$ .

**Proposición 2.4.23.** Sean  $G$  grupo finito,  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$  y  $\sigma_i \in \mathcal{O}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . Entonces  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6}$  es de tipo  $\mathfrak{D}$  si y sólo si valen las siguientes relaciones

$$\sigma_1 \triangleright \sigma_2 = \sigma_5, \quad \sigma_1 \triangleright \sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_1 \triangleright \sigma_4 = \sigma_3, \quad \sigma_1 \triangleright \sigma_5 = \sigma_4, \quad \sigma_1 \triangleright \sigma_6 = \sigma_6, \quad (2.54)$$

$$\sigma_2 \triangleright \sigma_1 = \sigma_3, \quad \sigma_2 \triangleright \sigma_3 = \sigma_6, \quad \sigma_2 \triangleright \sigma_4 = \sigma_4, \quad \sigma_2 \triangleright \sigma_5 = \sigma_1, \quad \sigma_2 \triangleright \sigma_6 = \sigma_5. \quad (2.55)$$

*Demostración.* Aplicando  $\sigma_1 \triangleright \_$  a las relaciones en (2.55) y usando (2.54), se obtienen las relaciones  $\sigma_5 \triangleright \sigma_j = \sigma_{5 \triangleright j}$ ,  $1 \leq j \leq 6$ . De manera análoga, se obtienen las relaciones  $\sigma_i \triangleright \sigma_j = \sigma_{i \triangleright j}$ ,  $1 \leq j \leq 6$ , para  $i = 3, 4$ . Finalmente, las relaciones  $\sigma_6 \triangleright \sigma_j = \sigma_{6 \triangleright j}$ ,  $1 \leq j \leq 6$ , salen de aplicar  $\sigma_5 \triangleright \_$  a las relaciones en (2.55) y usando (2.54).  $\square$

**Lema 2.4.24.** Sean  $G$  grupo finito,  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$  y  $\sigma_i \in \mathcal{O}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . Si  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6}$  es de tipo  $\mathfrak{D}$ , entonces

$$(i) \quad \sigma_1^4 = \sigma_2^4 = \sigma_3^4 = \sigma_4^4 = \sigma_5^4 = \sigma_6^4,$$

$$(ii) \quad \sigma_1 \sigma_6 = \sigma_2 \sigma_4 = \sigma_3 \sigma_5,$$

$$(iii) \quad \sigma_2^2 \sigma_5^2 = \sigma_1^3 \sigma_6 = \sigma_3^2 \sigma_2^2,$$

$$(iv) \quad \sigma_5^2 \sigma_2^2 = \sigma_1 \sigma_6^3 = \sigma_2^2 \sigma_3^2.$$

*Demostración.* (i). Ya que  $\sigma_i \triangleright (\sigma_i \triangleright (\sigma_i \triangleright (\sigma_i \triangleright \sigma_j))) = \sigma_j$  para todo  $i, j$ , entonces  $\sigma_i^4 \in G^{\sigma_j}$ ,  $1 \leq i, j \leq 6$ . Con esto podemos hacer

$$\begin{aligned} \sigma_1^4 &= (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_3^{-1})^4 = \sigma_3 \sigma_2^4 \sigma_3^{-1} = \sigma_2^4 = (\sigma_1 \sigma_3 \sigma_1^{-1})^4 = \sigma_1 \sigma_3^4 \sigma_1^{-1} = \sigma_3^4 = (\sigma_1 \sigma_4 \sigma_1^{-1})^4 = \sigma_1 \sigma_4^4 \sigma_1^{-1} = \\ &\sigma_4^4 = (\sigma_1 \sigma_5 \sigma_1^{-1})^4 = \sigma_1 \sigma_5^4 \sigma_1^{-1} = \sigma_5^4 = (\sigma_2 \sigma_6 \sigma_2^{-1})^4 = \sigma_2 \sigma_6^4 \sigma_2^{-1} = \sigma_6^4. \end{aligned}$$

(ii). Usando las relaciones dadas en la Definición 2.4.21 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_3 \sigma_5 &= \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_5 \sigma_2^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_5 \sigma_1^{-1} = \sigma_2 \sigma_4, \\ \sigma_3 \sigma_5 &= \sigma_3 \sigma_2 \sigma_6 \sigma_2^{-1} = \sigma_3 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_6^{-1} \sigma_6 \sigma_2^{-1} = \sigma_6 \sigma_2 \sigma_5 \sigma_2^{-1} = \sigma_6 \sigma_1. \end{aligned}$$

Luego,  $\sigma_1 \sigma_6 = \sigma_2 \sigma_4 = \sigma_3 \sigma_5$ .

(iii). Usando las relaciones del rack y (ii), tenemos que

$$\sigma_2^2 \sigma_5^2 = \sigma_2 \sigma_5 \sigma_1 \sigma_5 = \sigma_5 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_5 = \sigma_5 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_1 = \sigma_5 \sigma_3 \sigma_1^2 = \sigma_1 \sigma_6 \sigma_1^2 = \sigma_1^3 \sigma_6.$$

Luego,  $\sigma_2^2 \sigma_5^2 = \sigma_1^3 \sigma_6$ . Aplicando  $\sigma_1 \triangleright (\sigma_1 \triangleright (\sigma_1 \triangleright \_))$  a esta última expresión se tiene que  $\sigma_3^2 \sigma_2^2 = \sigma_1^3 \sigma_6$ .

(iv). Sigue de (iii) aplicando  $\sigma_2 \triangleright (\sigma_2 \triangleright \_)$ .  $\square$

**Definición 2.4.25.** Sean  $\sigma_i, \tau_i \in G$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , elementos distintos. Diremos que  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ , si  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6}$  y  $(\tau_j)_{1 \leq j \leq 6}$  son de tipo  $\mathfrak{D}$  y

$$\sigma_i \triangleright \tau_j = \tau_{i \triangleright j}, \quad \tau_i \triangleright \sigma_j = \sigma_{i \triangleright j}, \quad 1 \leq i, j \leq 6, \quad (2.56)$$

donde la operación  $\triangleright$  en el subíndice es la operación de rack en el rack del octaedro.

**Lema 2.4.26.** Sean  $G$  grupo finito,  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$  y  $\sigma_i, \tau_i \in \mathcal{O}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . Supongamos que  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Entonces

- (i)  $\sigma_1\tau_6 = \sigma_6\tau_1 = \sigma_2\tau_4 = \sigma_4\tau_2 = \sigma_3\tau_5 = \sigma_5\tau_3$ ,
- (ii)  $\sigma_j^{-1}\tau_j = \sigma_1^{-1}\tau_1$ ,  $2 \leq j \leq 6$ ,
- (iii)  $\tau_2^{-2}\sigma_5\tau_5 = \tau_1^{-1}\sigma_6$ ,
- (iv)  $\tau_2^{-2}\sigma_3\tau_3 = \sigma_1\tau_6^{-1}$ ,
- (v)  $\sigma_2^{-2}\sigma_5\tau_5 = \sigma_1^{-2}\tau_1\sigma_6$ ,
- (vi)  $\sigma_2^{-2}\sigma_3\tau_3 = \tau_1\sigma_6^{-1}$ .

*Demostración.* (i). Primero vemos que

$$\sigma_1\tau_6 = \sigma_1\sigma_2\tau_3\sigma_2^{-1} = \tau_3\sigma_2\tau_3^{-1}\tau_3\sigma_6\tau_3^{-1}\tau_3\sigma_2^{-1} = \tau_3\sigma_2\sigma_6\sigma_2^{-1} = \tau_3\sigma_5. \quad (2.57)$$

Ahora bien, aplicando  $\sigma_2 \triangleright \_$  a (2.57) se tiene  $\sigma_3\tau_5 = \tau_6\sigma_1$ . Aplicando nuevamente  $\sigma_2 \triangleright \_$  a ésta última igualdad se tiene  $\sigma_6\tau_1 = \tau_5\sigma_3$ . Las demás identidades se prueban de manera análoga.

(ii). Por (i) y Lema 2.4.24 (i) para  $(\tau_i)_{1 \leq i \leq 6}$ , tenemos que

$$\sigma_2^{-1}\tau_2 = \sigma_2^{-1}\tau_4^{-1}\tau_4\tau_2 = \sigma_1^{-1}\tau_6^{-1}\tau_1\tau_6 = \sigma_1^{-1}\tau_1.$$

Las demás relaciones se obtienen de manera análoga.

(iii). Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \tau_2^{-2}\sigma_5\tau_5 &= \tau_2^{-4}\tau_2\tau_2\tau_5\sigma_5 = \tau_1^{-4}\tau_2\tau_5\tau_1\sigma_5 = \tau_1^{-4}\tau_5\tau_1\tau_1\sigma_5 \\ &= \tau_1^{-4}\tau_5\tau_1\sigma_4\tau_1 = \tau_1^{-4}\tau_5\sigma_3\tau_1\tau_1 = \tau_1^{-4}\tau_1\sigma_6\tau_1^2 = \tau_1^{-1}\sigma_6. \end{aligned}$$

(iv). Se obtiene aplicando  $\sigma_2 \triangleright (\sigma_2 \triangleright \_)$  a la identidad dada en (iii).

(v). Claramente,

$$\begin{aligned} \sigma_2^{-2}\sigma_5\tau_5 &= \sigma_2^{-4}\sigma_2\sigma_2\sigma_5\tau_5 = \sigma_1^{-4}\sigma_2\sigma_5\sigma_1\tau_5 = \sigma_1^{-4}\sigma_5\sigma_1\sigma_1\tau_5 = \sigma_1^{-4}\sigma_5\sigma_1\tau_4\sigma_1 \\ &= \sigma_1^{-4}\sigma_5\tau_3\sigma_1\sigma_1 = \sigma_1^{-4}\sigma_1\tau_6\sigma_1\sigma_1 = \sigma_1^{-1}\tau_6 = \sigma_1^{-2}\tau_1\sigma_6. \end{aligned}$$

(vi). Se obtiene aplicando  $\sigma_2 \triangleright (\sigma_2 \triangleright \_)$  a la identidad dada en (v). □

## Aplicaciones

Sean  $G$  un grupo finito,  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$  y  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6} \subset \mathcal{O}$  de tipo  $\mathfrak{D}$ . Definimos

$$g_1 := \sigma_1, \quad g_2 := \sigma_5, \quad g_3 := \sigma_2, \quad g_4 := \sigma_3, \quad g_5 := \sigma_4, \quad g_6 := \sigma_2^2\sigma_1; \quad (2.58)$$

luego, se cumple que  $\sigma_i = g_i \triangleright \sigma_1$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . Es fácil ver que se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 g_1 &= g_1 \sigma_1, & \sigma_1 g_2 &= g_5 \sigma_1, & \sigma_1 g_3 &= g_2 \sigma_1, & \sigma_1 g_4 &= g_3 \sigma_1, & \sigma_1 g_5 &= g_4 \sigma_1, & \sigma_1 g_6 &= g_6 \sigma_6, \\
 \sigma_2 g_1 &= g_3 \sigma_1, & \sigma_2 g_2 &= g_2 \sigma_1, & \sigma_2 g_3 &= g_6 \sigma_1^{-1}, & \sigma_2 g_4 &= g_4 \sigma_6, & \sigma_2 g_5 &= g_1 \sigma_6, & \sigma_2 g_6 &= g_5 \sigma_6^3, \\
 \sigma_3 g_1 &= g_4 \sigma_1, & \sigma_3 g_2 &= g_1 \sigma_6, & \sigma_3 g_3 &= g_3 \sigma_1, & \sigma_3 g_4 &= g_6 \sigma_6^{-1}, & \sigma_3 g_5 &= g_5 \sigma_6, & \sigma_3 g_6 &= g_2 \sigma_1^3, \\
 \sigma_4 g_1 &= g_5 \sigma_1, & \sigma_4 g_2 &= g_2 \sigma_6, & \sigma_4 g_3 &= g_1 \sigma_6, & \sigma_4 g_4 &= g_4 \sigma_1, & \sigma_4 g_5 &= g_6 \sigma_1 \sigma_6^{-2}, & \sigma_4 g_6 &= g_3 \sigma_1^2 \sigma_6, \\
 \sigma_5 g_1 &= g_2 \sigma_1, & \sigma_5 g_2 &= g_6 \sigma_1^{-2} \sigma_6, & \sigma_5 g_3 &= g_3 \sigma_6, & \sigma_5 g_4 &= g_1 \sigma_6, & \sigma_5 g_5 &= g_5 \sigma_1, & \sigma_5 g_6 &= g_4 \sigma_1 \sigma_6^2, \\
 \sigma_6 g_1 &= g_1 \sigma_6, & \sigma_6 g_2 &= g_3 \sigma_6, & \sigma_6 g_3 &= g_4 \sigma_6, & \sigma_6 g_4 &= g_5 \sigma_6, & \sigma_6 g_5 &= g_2 \sigma_6, & \sigma_6 g_6 &= g_6 \sigma_1.
 \end{aligned}$$

Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G^{\sigma_1}}$  y sea  $v \in V - 0$ . Definimos  $W := \text{span-}\{g_i v : 1 \leq i \leq 6\}$ . Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}, \rho)$ .

**Lema 2.4.27.** *Sean  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6}$ ,  $(g_i)_{1 \leq i \leq 6}$  y  $W$  como arriba. Sea  $(\rho, V) \in \widehat{G^{\sigma_1}}$ , con  $q_{\sigma_1 \sigma_1} = -1$ . Entonces  $W$  y  $M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)})$  son isomorfos como espacios vectoriales trenzados, donde  $\mathcal{O}_4^4$  denota la clase de conjugación de los 4-ciclos en  $\mathbb{S}_4$  y  $\chi_{(-1)} \in \widehat{\mathbb{S}_4^{(1234)}}$  es tal que  $\chi_{(-1)}(1234) = -1$ .*

*Demostración.* Por Lema (2.4.24) (i) y  $q_{\sigma_1 \sigma_1} = -1$ , tenemos que  $\rho(\sigma_i^4) = \text{Id}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . La clase de conjugación de los 4-ciclos en  $\mathbb{S}_4$  es

$$\mathcal{O}_4^4 = \{\tilde{\sigma}_1 = (1234), \tilde{\sigma}_2 = (1243), \tilde{\sigma}_3 = (1324), \tilde{\sigma}_4 = (1342), \tilde{\sigma}_5 = (1423), \tilde{\sigma}_6 = (1432)\}.$$

Si elegimos

$$\tilde{g}_1 = \tilde{\sigma}_1, \quad \tilde{g}_2 = \tilde{\sigma}_5, \quad \tilde{g}_3 = \tilde{\sigma}_2, \quad \tilde{g}_4 = \tilde{\sigma}_3, \quad \tilde{g}_5 = \tilde{\sigma}_4, \quad \tilde{g}_6 = \tilde{\sigma}_2^2 \tilde{\sigma}_1,$$

entonces  $\tilde{g}_i \triangleright \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . Luego,  $M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}) = \text{span-}\{\tilde{g}_i v_0, : 1 \leq i \leq 6\}$ , con  $v_0 \in V_0 - 0$ , donde  $V_0$  es el espacio vectorial de la representación  $\chi_{(-1)}$  de  $\mathbb{S}_4^{(1234)}$ . Ahora bien, el mapa  $W \rightarrow M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)})$  dado por

$$g_i v \mapsto \tilde{g}_i v_0, \quad 1 \leq i \leq 6,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales trenzados.  $\square$

Nuestro objetivo es aplicar el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.28.** *[AHS, Theor. 4.7] El álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}) \oplus M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}))$  tiene dimensión infinita.  $\square$*

A los efectos de dar una aplicación del mismo, comenzamos determinando el espacio vectorial trenzado subyacente a  $M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}) \oplus M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)})$ .

*Observación 2.4.29.* Sea  $(\mathbb{C}X, \mathfrak{q})$  el espacio vectorial trenzado dado por

- $X = \{x_i, y_j : 1 \leq i, j \leq 6\}$  es un rack de 12 elementos con la siguiente estructura de rack

$$x_i \triangleright x_j = x_{i \triangleright j}, \quad y_i \triangleright y_j = y_{i \triangleright j}, \quad x_i \triangleright y_j = y_{i \triangleright j}, \quad y_i \triangleright x_j = x_{i \triangleright j}, \quad \text{para todo } i, j,$$

donde la operación  $\triangleright$  en el subíndice es la operación de rack en el rack del octaedro.

- $\mathfrak{q}$  es el cociclo constante  $-1$ , i. e.  $\mathfrak{q} \equiv -1$ .

Entonces  $(\mathbb{C}X, \mathfrak{q}) \simeq M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}) \oplus M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)})$  como espacios vectoriales trenzados.

*Demostración.* Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &:= (1234) =: \tilde{\tau}_1, & \tilde{\sigma}_2 &:= (1243) =: \tilde{\tau}_2, & \tilde{\sigma}_3 &:= (1324) =: \tilde{\tau}_3, \\ \tilde{\sigma}_4 &:= (1342) =: \tilde{\tau}_4, & \tilde{\sigma}_5 &:= (1423) =: \tilde{\tau}_5, & \tilde{\sigma}_6 &:= (1432) =: \tilde{\tau}_6. \end{aligned}$$

Denotaremos por  $(\tilde{\sigma}_j)_{1 \leq j \leq 6}$  (resp.  $(\tilde{\tau}_j)_{1 \leq j \leq 6}$ ) a la primera copia (resp. a la segunda copia) de  $\mathcal{O}_4^4$ , con sistema de representantes de coclases a izquierda de  $\mathbb{S}_4^{(1234)}$  dados por  $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_7 = \tilde{\sigma}_1$ ,  $\tilde{g}_2 = \tilde{g}_8 = \tilde{\sigma}_5$ ,  $\tilde{g}_3 = \tilde{g}_9 = \tilde{\sigma}_2$ ,  $\tilde{g}_4 = \tilde{g}_{10} = \tilde{\sigma}_3$ ,  $\tilde{g}_5 = \tilde{g}_{11} = \tilde{\sigma}_4$ ,  $\tilde{g}_6 = \tilde{g}_{12} = \tilde{\sigma}_2^2 \tilde{\sigma}_1$ . Ahora bien, el mapa  $M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}) \oplus M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}) \rightarrow (\mathbb{C}X, \mathfrak{q})$  dado por

$$\tilde{\sigma}_i \mapsto x_i \quad \text{y} \quad \tilde{\tau}_i \mapsto y_i, \quad 1 \leq i \leq 6,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales trenzados.  $\square$

Antes de enunciar el resultado más importante de esta subsección mostraremos el siguiente resultado.

**Lema 2.4.30.** *Sean  $\sigma_i, \tau_i \in G$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , elementos distintos, y  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$ . Supongamos que  $(\sigma, \tau) \subseteq \mathcal{O}$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ , con  $g \in G$  tal que  $g \triangleright \sigma_1 = \tau_1$ . Sean*

$$g_1 = \sigma_1, \quad g_2 = \sigma_5, \quad g_3 = \sigma_2, \quad g_4 = \sigma_3, \quad g_5 = \sigma_4, \quad g_6 = \sigma_2^2 \sigma_1, \quad (2.59)$$

$$g_7 = g \sigma_1, \quad g_8 = \tau_5 g, \quad g_9 = \tau_2 g, \quad g_{10} = \tau_3 g, \quad g_{11} = \tau_4 g, \quad g_{12} = \tau_2^2 g \sigma_1. \quad (2.60)$$

Entonces valen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \tau_1 g_7 &= g_7 \sigma_1, & \tau_1 g_8 &= g_{11} \sigma_1, & \tau_1 g_9 &= g_8 \sigma_1, \\ \tau_2 g_7 &= g_9 \sigma_1, & \tau_2 g_8 &= g_8 \sigma_1, & \tau_2 g_9 &= g_{12} \sigma_1^{-1}, \\ \tau_3 g_7 &= g_{10} \sigma_1, & \tau_3 g_8 &= g_7 g^{-1} \tau_6 g, & \tau_3 g_9 &= g_9 \sigma_1, \\ \tau_4 g_7 &= g_{11} \sigma_1, & \tau_4 g_8 &= g_8 g^{-1} \tau_6 g, & \tau_4 g_9 &= g_7 g^{-1} \tau_6 g, \\ \tau_5 g_7 &= g_8 \sigma_1, & \tau_5 g_8 &= g_{12} \sigma_1^{-2} g^{-1} \tau_6 g, & \tau_5 g_9 &= g_9 g^{-1} \tau_6 g, \\ \tau_6 g_7 &= g_7 g^{-1} \tau_6 g, & \tau_6 g_8 &= g_9 g^{-1} \tau_6 g, & \tau_6 g_9 &= g_{10} g^{-1} \tau_6 g, \\ \\ \tau_1 g_{10} &= g_9 \sigma_1, & \tau_1 g_{11} &= g_{10} \sigma_1, & \tau_1 g_{12} &= g_{12} g^{-1} \tau_6 g, \\ \tau_2 g_{10} &= g_{10} g^{-1} \tau_6 g, & \tau_2 g_{11} &= g_7 g^{-1} \tau_6 g, & \tau_2 g_{12} &= g_{11} (g^{-1} \tau_6 g)^3, \\ \tau_3 g_{10} &= g_{12} (g^{-1} \tau_6 g)^{-1}, & \tau_3 g_{11} &= g_{11} g^{-1} \tau_6 g, & \tau_3 g_{12} &= g_8 \sigma_1^3, \\ \tau_4 g_{10} &= g_{10} \sigma_1, & \tau_4 g_{11} &= g_{12} \sigma_1 (g^{-1} \tau_6 g)^{-2}, & \tau_4 g_{12} &= g_9 \sigma_1^2 g^{-1} \tau_6 g, \\ \tau_5 g_{10} &= g_7 g^{-1} \tau_6 g, & \tau_5 g_{11} &= g_{11} \sigma_1, & \tau_5 g_{12} &= g_{10} \sigma_1 (g^{-1} \tau_6 g)^2, \\ \tau_6 g_{10} &= g_{11} g^{-1} \tau_6 g, & \tau_6 g_{11} &= g_8 g^{-1} \tau_6 g, & \tau_6 g_{12} &= g_{12} \sigma_1, \end{aligned}$$



$$\begin{array}{lll}
 \sigma_{1g7} = g_7g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{1g8} = g_{11}g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{1g9} = g_8g^{-1}\sigma_{1g}, \\
 \sigma_{2g7} = g_9g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{2g8} = g_8g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{2g9} = g_{12}\sigma^{-2}(g^{-1}\sigma_{1g}), \\
 \sigma_{3g7} = g_{10}g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{3g8} = g_7g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{3g9} = g_9g^{-1}\sigma_{1g}, \\
 \sigma_{4g7} = g_{11}g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{4g8} = g_8g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{4g9} = g_7g^{-1}\sigma_{6g}, \\
 \sigma_{5g7} = g_8g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{5g8} = g_{12}\sigma_1^{-2}g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{5g9} = g_9g^{-1}\sigma_{6g}, \\
 \sigma_{6g7} = g_7g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{6g8} = g_9g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{6g9} = g_{10}g^{-1}\sigma_{6g},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \sigma_{1g10} = g_9g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{1g11} = g_{10}g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{1g12} = g_{12}g^{-1}\sigma_{6g}, \\
 \sigma_{2g10} = g_{10}g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{2g11} = g_7g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{2g12} = g_{11}\gamma_{2,12}, \\
 \sigma_{3g10} = g_{12}\gamma_{3,10}, & \sigma_{3g11} = g_{11}g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{3g12} = g_8\sigma_1^2(g^{-1}\sigma_{1g}), \\
 \sigma_{4g10} = g_{10}g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{4g11} = g_{12}\gamma_{4,11}, & \sigma_{4g12} = g_9\sigma_1^2g^{-1}\sigma_{6g}, \\
 \sigma_{5g10} = g_7g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{5g11} = g_{11}g^{-1}\sigma_{1g}, & \sigma_{5g12} = g_{10}\gamma_{5,12}, \\
 \sigma_{6g10} = g_{11}g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{6g11} = g_8g^{-1}\sigma_{6g}, & \sigma_{6g12} = g_{12}g^{-1}\sigma_{1g},
 \end{array}$$

$$\gamma_{2,12} = \sigma_1^2(g^{-1}\sigma_{1g})^{-2}(g^{-1}\sigma_{6g})^3, \gamma_{3,10} = \sigma_1^{-2}(g^{-1}\sigma_{1g})^2(g^{-1}\sigma_{6g})^{-1}, \gamma_{4,11} = \sigma_1^{-2}(g^{-1}\sigma_{1g})^3(g^{-1}\sigma_{6g})^{-2}$$

$y \gamma_{5,12} = \sigma_1^2(g^{-1}\sigma_{1g})^{-1}(g^{-1}\sigma_{6g})^2,$

$$\begin{array}{lll}
 \tau_{1g1} = g_1\tau_1, & \tau_{1g2} = g_5\tau_1, & \tau_{1g3} = g_2\tau_1, \\
 \tau_{2g1} = g_3\tau_1, & \tau_{2g2} = g_2\tau_1, & \tau_{2g3} = g_6\sigma_1^{-2}\tau_1, \\
 \tau_{3g1} = g_4\tau_1, & \tau_{3g2} = g_1\tau_6, & \tau_{3g3} = g_3\tau_1, \\
 \tau_{4g1} = g_5\tau_1, & \tau_{4g2} = g_2\tau_6, & \tau_{4g3} = g_1\tau_6, \\
 \tau_{5g1} = g_2\tau_1, & \tau_{5g2} = g_6\sigma_1^{-2}\tau_6, & \tau_{5g3} = g_3\tau_6, \\
 \tau_{6g1} = g_1\tau_6, & \tau_{6g2} = g_3\tau_6, & \tau_{6g3} = g_4\tau_6,
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \tau_{1g4} = g_3\tau_1, & \tau_{1g5} = g_4\tau_1, & \tau_{1g6} = g_6\tau_6, \\
 \tau_{2g4} = g_4\tau_6, & \tau_{2g5} = g_1\tau_6, & \tau_{2g6} = g_5\sigma_1^3\tau_1\sigma_6, \\
 \tau_{3g4} = g_6\sigma_1^{-1}\tau_1\sigma_6^{-1}, & \tau_{3g5} = g_5\tau_6, & \tau_{3g6} = g_2\sigma_1^2\tau_1, \\
 \tau_{4g4} = g_4\tau_1, & \tau_{4g5} = g_6\tau_1\sigma_6^{-2}, & \tau_{4g6} = g_3\sigma_1\tau_1\sigma_6, \\
 \tau_{5g4} = g_1\tau_6, & \tau_{5g5} = g_5\tau_1, & \tau_{5g6} = g_4\tau_1\sigma_6^2, \\
 \tau_{6g4} = g_5\tau_6, & \tau_{6g5} = g_2\tau_6, & \tau_{6g6} = g_6\tau_1.
 \end{array}$$

*Demostración.* Por cálculos directos usando Lema 2.4.24 para  $\sigma$  y  $\tau$ , y Lema 2.4.26.  $\square$

Los resultados anteriores nos permiten enunciar el siguiente.

**Teorema 2.4.31.** *Sean  $\sigma_i, \tau_i \in G$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , elementos distintos,  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$  y  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G^{\sigma_1}}$ . Supongamos que*

(H1)  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ ,

(H2)  $(\sigma, \tau) \subseteq \mathcal{O}$ , con  $g \in G$  tal que  $g \triangleright \sigma_1 = \tau_1$ ,

$$(H3) \quad q_{\sigma_1\sigma_1} = -1,$$

que existe  $v \in V - 0$  tal que

$$(H4) \quad \rho(\sigma_6)v = -v,$$

$$(H5) \quad \rho(\tau_1)v = -v,$$

y que existe  $w \in V - 0$  tal que

$$(H6) \quad \rho(g^{-1}\sigma_1g)w = -w,$$

$$(H7) \quad \rho(g^{-1}\sigma_6g)w = -w,$$

Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

*Demostración.* Sean  $g_j$ ,  $1 \leq j \leq 12$ , como en (2.59) y (2.60). Luego,  $g_j \triangleright \sigma_1 = \sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq 6$ , y  $g_j \triangleright \sigma_1 = \tau_j$ ,  $7 \leq j \leq 12$ . Por Lema 2.4.30, se tiene que

- (a) si  $1 \leq i, j \leq 6$ , entonces  $g_{i \triangleright j}^{-1} \sigma_i g_j = \sigma_1^r \sigma_6^s$ , con  $r + s$  impar,
- (b) si  $7 \leq i, j \leq 12$ , entonces  $g_{i \triangleright j}^{-1} \tau_{i-6} g_j = \sigma_1^r (g^{-1} \tau_6 g)^s$ , con  $r + s$  impar,
- (c) si  $1 \leq i \leq 6$  y  $7 \leq j \leq 12$ , entonces  $g_{i \triangleright j}^{-1} \sigma_i g_j = \sigma_1^r (g^{-1} \sigma_1 g)^s (g^{-1} \sigma_6 g)^t$ , con  $r + s + t$  impar,
- (d) si  $1 \leq j \leq 6$  y  $7 \leq i \leq 12$ , entonces  $g_{i \triangleright j}^{-1} \tau_{i-6} g_j = \sigma_1^r \tau_1^s \sigma_6^t$ , con  $r + s + t$  impar, pues  $\tau_6 = \sigma_1^{-1} \tau_1 \sigma_6$ .

Sean  $W := \text{span}\{g_i v, : 1 \leq i \leq 6\}$  y  $W' := \text{span}\{g_i w, : 7 \leq i \leq 12\}$ , con  $v, w \in V - 0$ , donde  $v$  satisface (H4)-(H5) y  $w$  satisface (H6)-(H7). Luego,  $W$  y  $W'$  son subespacios vectoriales trenzados de  $M(\mathcal{O}, \rho)$ . Probaremos que

$$W \oplus W' \simeq M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}) \oplus M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}),$$

como espacios vectoriales trenzados. Así, tendremos que  $W \oplus W'$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  con  $\dim \mathfrak{B}(W \oplus W') = \infty$ , por Teorema 2.4.28. Ahora el resultado sigue por Lema 2.3.1.

Por Observación 2.4.29, sólo tenemos que ver que el isomorfismo de espacios vectoriales trenzados dado por

$$\tilde{\sigma}_i \mapsto \sigma_i \quad \text{y} \quad \tilde{\tau}_i \mapsto \tau_i, \quad 1 \leq i \leq 6,$$

respeto el cociclo, i. e.  $\mathfrak{q} \equiv -1$ . Para ello, calcularemos explícitamente la trenza en la base  $g_i v$ ,  $g_{j+6} w$ ,  $1 \leq i, j \leq 6$ , de  $W \oplus W'$ .

Por (a), (H3) y (H4), si  $1 \leq i, j \leq 6$ , entonces

$$c(g_i v \otimes g_j v) = g_{i \triangleright j} \rho(g_{i \triangleright j}^{-1} \sigma_i g_j)(v) \otimes g_i v = -g_{i \triangleright j} v \otimes g_i v.$$

Por Lema 2.4.26 (i),  $\tau_6 = \sigma_1^{-1} \tau_1 \sigma_6$ . Luego,  $g^{-1} \tau_6 g = (g^{-1} \sigma_1 g)^{-1} \sigma_1 (g^{-1} \sigma_6 g)$ . Por (b), (H3), (H6) y (H7), si  $7 \leq i, j \leq 12$ , entonces

$$c(g_i w \otimes g_j w) = g_{i \triangleright j} \rho(g_{i \triangleright j}^{-1} \tau_{i-6} g_j)(w) \otimes g_i w = -g_{i \triangleright j} w \otimes g_i w.$$

Por (c), (H3), (H6) y (H7), si  $1 \leq i \leq 6$  y  $7 \leq j \leq 12$ , entonces

$$c(g_i v \otimes g_j w) = g_{i \triangleright j} \rho(g_{i \triangleright j}^{-1} \sigma_i g_j)(w) \otimes g_i v = -g_{i \triangleright j} w \otimes g_i v.$$

Por (d), (H3), (H4) y (H5), si  $1 \leq j \leq 6$  y  $7 \leq i \leq 12$ , entonces

$$c(g_i w \otimes g_j v) = g_{i \triangleright j} \rho(g_{i \triangleright j}^{-1} \tau_{i-6} g_j)(v) \otimes g_i w = -g_{i \triangleright j} v \otimes g_i w.$$

Esto concluye la prueba.  $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 2.4.31.

**Corolario 2.4.32.** *Sean  $\sigma_i, \tau_i \in G$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , elementos distintos,  $\mathcal{O}$  una clase de conjugación de  $G$  y  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G^{\sigma_1}}$  con  $q_{\sigma_1 \sigma_1} = -1$ . Supongamos que  $(\sigma, \tau) \subseteq \mathcal{O}$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Si  $\sigma_6 = \sigma_1^d$  y  $\tau_1 = \sigma_1^e$ ,  $d, e \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .  $\square$*

*Demostración.* Notar que  $d$  y  $e$  deden ser impares, pues son coprimos con  $|\sigma_1|$ . Luego, las hipótesis (H4) y (H5) se cumplen. Por otro lado,  $g^{-1} \sigma_1 g = \sigma_1^{e|g|-1}$ ; esto implica que  $\rho(g^{-1} \sigma_1 g) = -\text{Id}$ , y, por lo tanto, (H6) se cumple. La prueba de (H7) es similar.  $\square$



## Capítulo 3

# Álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos simétricos

En este capítulo, se estudian las álgebras de Nichols de módulos de Yetter-Drinfeld sobre los grupos simétricos. Como resultado, se prueba que o bien el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  es de dimensión infinita, o bien la trenza del módulo Yetter-Drinfeld es negativa.

Este capítulo está dividido de la siguiente manera. En la Sección 3.1 se introducen las notaciones y nociones básicas. En la Sección 3.2, se consideran clases de conjugación *puras* y se utilizan los criterios de dimensión infinita mediante subracks abelianos, desarrollados en la Subsección 2.3, para descartar pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  con  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ . Finalmente, en la Sección 3.3, se aplican los criterios de subracks no abelianos a otras clases de conjugación además de las puras.

Los resultados aquí presentados forman parte de los trabajos [AF1] y [AF3].

### 3.1. Notación y generalidades

Sean  $m \in \mathbb{N}$  y  $\sigma \in \mathbb{S}_m$ . El *tipo* de la permutación  $\sigma$  es un símbolo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$  que quiere decir que en la descomposición de  $\sigma$  como producto de ciclos disjuntos aparecen  $n_j$  ciclos de longitud  $j$ ; claramente,  $\sum_j^m j n_j = m$ . Así, escribiremos

$$\sigma = A_1 \cdots A_m, \quad (3.1)$$

donde  $A_j = A_{1,j} \cdots A_{n_j,j}$  es el producto de los  $n_j$   $j$ -ciclos  $A_{1,j}, \dots, A_{n_j,j}$  de  $\sigma$ . Se omitirá escribir  $A_j$  cuando  $n_j = 0$ . Elegimos  $A_1, \dots, A_m$  tales que  $A_{1,1} = (1), \dots, A_{n_1,1} = (n_1), A_{1,2} = (n_1 + 1 \ n_1 + 2), \dots, A_{n_2,2} = (n_1 + 2n_2 - 1 \ n_1 + 2n_2)$ , y así siguiendo. Más precisamente, si  $1 \leq j \leq m$  y  $r := \sum_{1 \leq k \leq j-1} kn_k$ , entonces

$$A_{l,j} := \left( r + (l-1)j + 1 \quad r + (l-1)j + 2 \quad \cdots \quad r + lj \right),$$
$$B_{h,j} := \left( r + (h-1)j + 1 \quad r + hj + 1 \right) \left( r + (h-1)j + 2 \quad r + hj + 2 \right) \cdots \left( r + hj \quad r + (h+1)j \right),$$

para todo  $l, h$ , con  $1 \leq l \leq n_j, 1 \leq h \leq n_j - 1$ . Notar que  $B_{h,j}$  es una involución.

La clase de conjugación de  $\sigma$  es

$$\mathcal{O}_\sigma = \{\tau \in \mathbb{S}_m : \text{tipo de } \tau = \text{tipo de } \sigma\}.$$

Algunas veces también se usará el tipo como un subíndice de una clase de conjugación. El centralizador de  $\sigma$  en  $\mathbb{S}_m$  es  $\mathbb{S}_m^\sigma = T_1 \times \cdots \times T_m$ , con

$$T_j = \langle A_{1,j}, \dots, A_{n_j,j} \rangle \rtimes \langle B_{1,j}, \dots, B_{n_j-1,j} \rangle \simeq (\mathbb{Z}/j)^{n_j} \rtimes \mathbb{S}_{n_j}, \quad (3.2)$$

para todo  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , donde  $B_{h,j}$ ,  $1 \leq h \leq n_j - 1$ , actúa sobre  $A_{1,j}, \dots, A_{n_j,j}$  como la trasposición  $(h \ h+1)$  sobre  $1, \dots, n_j$ .

A continuación describiremos las representaciones irreducibles de  $\mathbb{S}_m^\sigma$ . Para ello mencionaremos antes algunos hechos conocidos sobre teoría de representaciones de grupos finitos. Recordamos que para un grupo finito  $G$ ,  $\widehat{G}$  denota el conjunto de clases de isomorfismos de representaciones irreducibles de  $G$  y que se denotará con el mismo símbolo tanto a un representante de una clase en  $\widehat{G}$  como a la clase misma.

Sean  $G$  un grupo finito,  $H$  un subgrupo de  $G$  y  $\theta = (\theta, W) \in \widehat{H}$ , una representación irreducible de  $H$ . Describiremos brevemente la *representación inducida* de  $\theta$ .

Denotemos por  $\mathcal{L} = \{\phi_1, \dots, \phi_k\}$  a las coclases a izquierda de  $H$  en  $G$ , donde  $k = [G : H]$  es el índice de  $H$  en  $G$ , y sea  $\{g_{\phi_1} = e_G, \dots, g_{\phi_k}\}$  un sistema completo de representantes de coclases a izquierda de  $H$  en  $G$ . Así,

$$G = H \cup g_{\phi_2}H \cup \cdots \cup g_{\phi_k}H.$$

Sea  $g \in G$ . Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , existe un único  $\bar{i}$ ,  $1 \leq \bar{i} \leq k$ , y un único  $h \in H$  tales que  $gg_{\phi_i} = g_{\phi_{\bar{i}}}h$ . Notar que  $\bar{i}$  y  $h$  dependen de  $i$  y de  $g$ .

Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , definimos formalmente  $V_i := g_{\phi_i}W$ . Claramente,  $V_i \simeq W$ . Definamos  $V := \bigoplus_{1 \leq i \leq k} V_i$ ; en otras palabras, sea  $w_1, \dots, w_r$  una base de  $W$ , entonces  $V$  es el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de base  $X$ , con  $X := \{g_{\phi_i}w_j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r\}$ .

Para  $i, j$ , con  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq r$  definimos  $\rho : G \rightarrow \text{End}(V)$  por

$$\rho(g)(g_{\phi_i}w_j) = g_{\phi_{\bar{i}}}\theta(h)w_j, \quad \text{donde } gg_{\phi_i} = g_{\phi_{\bar{i}}}h. \quad (3.3)$$

Se puede ver que  $\rho = (\rho, V)$  es una representación de  $G$ , con  $\deg \rho = [G : H] \deg \theta$ .

Let  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{\mathbb{S}_m^\sigma}$ . Luego,  $\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_m$ , con  $\rho_j \in \widehat{T_j}$ . Por (3.2), esto nos lleva a considerar las representaciones irreducibles de grupos de la forma  $\Gamma \rtimes \Lambda$ , con  $\Gamma$  abeliano. Las mismas se describen de la siguiente manera. Sea  $\chi \in \widehat{\Gamma}$  y  $\mu \in \widehat{\Lambda^\times}$ , donde  $\Lambda^\times$  es el subgrupo de isotropía con respecto a la acción natural de  $\Lambda$  sobre  $\widehat{\Gamma}$ . Así, la representación inducida  $\text{Ind}_{\Gamma \rtimes \Lambda^\times}^{\Gamma \rtimes \Lambda}(\chi \otimes \mu)$  es irreducible y cualquier representación irreducible de  $\Gamma \rtimes \Lambda$  es isomorfa a una de esta forma, para únicos  $\chi$  y  $\mu \in \widehat{\Lambda^\times}$  (salvo la acción de  $\Lambda$ ) – ver [Se, 8.2]. Por lo tanto,  $\rho_j \in \widehat{T_j}$  tiene la forma

$$\rho_j = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/j)^{n_j} \rtimes \mathbb{S}_{n_j}^{\chi_j}}^{(\mathbb{Z}/j)^{n_j} \rtimes \mathbb{S}_{n_j}}(\chi_j \otimes \mu_j), \quad (3.4)$$

con  $\chi_j \in \widehat{(\mathbb{Z}/j)^{n_j}}$ ,  $\mu_j \in \widehat{\mathbb{S}_{n_j}^{\chi_j}}$ . La representaciones irreducibles de  $(\mathbb{Z}/j)^{n_j}$  son de la forma  $\chi_{(t_{1,j}, \dots, t_{n_j,j})}$ , donde  $0 \leq t_{1,j}, \dots, t_{n_j,j} \leq j-1$  son tales que

$$\chi_{(t_{1,j}, \dots, t_{n_j,j})}(A_{l,j}) = \omega_j^{t_{l,j}}, \quad 1 \leq l \leq n_j. \quad (3.5)$$

Notar que si  $\rho_j$  es como en (3.4), entonces

$$\deg \rho_j = [\mathbb{S}_{n_j} : \mathbb{S}_{n_j}^{(\chi_j)}] \deg \mu_j. \quad (3.6)$$

*Observación 3.1.1.* Puesto que cada  $A_j$  pertenece a  $Z(\mathbb{S}_m^\sigma)$ ,  $A_j$  actúa por un escalar  $q_{A_j}$  sobre  $V$ . Luego,

$$q_{\sigma\sigma} = q_e q_o, \quad \text{donde } q_e = \prod_{j \text{ par}} q_{A_j} \text{ y } q_o = \prod_{1 < j \text{ impar}} q_{A_j}.$$

*Observación 3.1.2.* Asumamos que  $\deg(\rho) = 1$ . Esto implica que  $\deg(\rho_j) = 1$ , para todo  $j$ . Entonces

$$\mathbb{S}_{n_j}^{(\chi_j)} = \mathbb{S}_{n_j} \quad \text{y} \quad \mu_j = \epsilon \text{ ó } \text{sgn} \in \widehat{\mathbb{S}}_{n_j}, \quad \text{para todo } j, \quad (3.7)$$

por (3.6). Luego,  $t_j := t_{1,j} = \dots = t_{n_j,j}$  y  $\rho_j = \chi_j \otimes \mu_j$ , para todo  $j$ . En este caso, denotaremos a  $\chi_j = \chi_{(t_j, \dots, t_j)}$  por  $\overrightarrow{\chi}_{t_j}$ . Por lo tanto, para todo  $j$  existe  $t_j$ , con  $0 \leq t_j \leq j - 1$ , tal que

$$\rho = (\overrightarrow{\chi}_{t_1} \otimes \mu_1) \otimes \dots \otimes (\overrightarrow{\chi}_{t_m} \otimes \mu_m). \quad (3.8)$$

Si  $n_j = 0$  ó  $1$ , entonces  $\rho_j$  es sólo la representación trivial. Denotaremos

$$\mathbf{t} := (t_1, \dots, t_m); \quad (3.9)$$

esta  $m$ -tupla depende de  $\rho$ . Cualquier representación de  $\mathbb{S}_m^\sigma$  de dimensión 1 está completamente determinada por  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$  y  $\mathbf{t}$  como arriba.

Denotaremos por  $\epsilon$  y  $\text{sgn}$  a las representaciones trivial y signo de  $\mathbb{S}_n$ , respectivamente.

## 3.2. Usando técnicas basadas en subracks abelianos

En esta subsección, se considerarán clases de conjugación  $\mathcal{O}$  puras y su buscarán subespacios vectoriales trenzados de tipo diagonal  $U$  de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  tales que  $\dim \mathfrak{B}(U) = \infty$ .

**Definición 3.2.1.** Diremos que  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  es *pura* si el tipo de  $\sigma$  es  $(k^n)$ , i. e. si  $\sigma$  es un producto de  $n$  ciclos disjuntos de la misma longitud  $k$  y  $m = kn$ .

También llamaremos pura a la clase de conjugación de una permutación pura.

### 3.2.1. Álgebras de Nichols correspondientes a ciclos de longitud par

Sea  $\sigma \in \mathbb{S}_k$  de tipo  $(k)$ , con  $2 < k$ . Como se mencionó anteriormente, la clase de conjugación  $\mathcal{O}_\sigma$  de  $\sigma$  es el conjunto de los  $k$ -ciclos en  $\mathbb{S}_k$ .

Si  $k$  es impar, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_k$ , por Lema 2.3.4.

Asumamos que  $k = 2r$ , con  $r \geq 1$ , y sea  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ k)$ ; el centralizador de  $\sigma$  es  $\mathbb{S}_k^\sigma = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/k$ . Si  $\gcd(j, k)$  denota el máximo común divisor de  $j$  y  $k$ , entonces un subrack abeliano maximal de  $\mathcal{O}_\sigma$  es

$$T = \{\sigma^j : \gcd(j, k) = 1\}.$$

Claramente,  $\text{card} T \geq 2$ . Sean  $\omega \in \mathbb{G}_k$  y  $\chi_\omega$  el carácter de  $\mathbb{S}_k^\sigma$  definido por  $\chi_\omega(\sigma) := \omega$ ; sean  $M(\mathcal{O}_\sigma, \chi_\omega)$  el correspondiente módulo de Yetter-Drinfeld y  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \chi_\omega)$  su álgebra de Nichols. Se concluye de Lema 2.3.4:

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $\sigma \in \mathbb{S}_k$  de tipo  $(k)$ , con  $k$  par. Sea  $\omega \in \mathbb{G}_k$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \chi_\omega) = \infty$  si  $\omega \neq -1$ , y la trenza es negativa si  $\omega = -1$ .  $\square$*

### 3.2.2. Álgebras de Nichols de órbitas con $n$ transposiciones

En esta subsección, se considerará el caso en que  $m = 2n$  y el tipo de  $\sigma$  en  $\mathbb{S}_{2n}$  es  $(2^n)$ ,  $n > 1$ . Así,  $\mathcal{O}_\sigma$  es el conjunto de permutaciones en  $\mathbb{S}_{2n}$  que son producto de  $n$  transposiciones disjuntas. Fijemos  $\sigma = A_1 \cdots A_n$  en  $\mathbb{S}_{2n}$ , con  $A_i = (2i-1 \ 2i)$ . El centralizador es

$$\mathbb{S}_{2n}^\sigma = \langle A_1, \dots, A_n \rangle \rtimes \langle B_1, \dots, B_{n-1} \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n,$$

donde  $B_j = (2j-1 \ 2j+1)(2j \ 2j+2)$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ . Es fácil ver que se verifican las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} A_i^2 = \text{id} = B_j^2, & & A_i A_j = A_j A_i, & & A_i B_j = B_j A_i, \quad i \neq j, j+1, \\ A_j B_j = B_j A_{j+1}, & & B_i B_j = B_j B_i, \quad |i-j| > 1, & & B_j B_{j\pm 1} B_j = B_{j\pm 1} B_j B_{j\pm 1}. \end{aligned}$$

#### Representaciones irreducibles de $(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n$

En primer lugar, listamos las representaciones irreducibles de  $(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n$ . Sea  $e_i \in (\mathbb{Z}/2)^n$  el elemento con un 1 en el lugar  $i$  y 0 en el resto; sea  $\chi_i \in \widehat{(\mathbb{Z}/2)^n}$  dada por  $\chi_i(e_j) = (-1)^{\delta_{i,j}}$ . Las representaciones irreducibles de  $(\mathbb{Z}/2)^n$  son los caracteres lineales

$$\chi_{i_1, \dots, i_k} := \chi_{i_1} \cdots \chi_{i_k}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n,$$

donde  $k=0$  corresponde a la representación trivial  $\chi_{(0)}$  de  $(\mathbb{Z}/2)^n$ . Sea  $\chi_{(k)} := \chi_{1, \dots, k}$ . La acción de  $\mathbb{S}_n$  sobre  $(\mathbb{Z}/2)^n$  induce una acción natural de  $\mathbb{S}_n$  sobre  $\widehat{(\mathbb{Z}/2)^n}$ ; la órbita y el subgrupo de isotropía de  $\chi = \chi_{i_1, \dots, i_k} \in \widehat{(\mathbb{Z}/2)^n}$  son

$$\mathcal{O}_\chi = \{\chi_{j_1, \dots, j_k} : 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n\} \quad \text{y} \quad \mathbb{S}_n^\chi \simeq \mathbb{S}_{n-k} \times \mathbb{S}_k, \quad (3.10)$$

respectivamente. En consecuencia, los caracteres  $\chi_{(k)}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , forman un conjunto completo de representantes de las órbitas en  $\widehat{(\mathbb{Z}/2)^n}$ . Como se discutió en la Subsección 3.1, todas las representaciones irreducibles de  $(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n$  son de la forma

$$\rho = \rho_{\chi_{(k)}, \mu} = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n^{\chi_{(k)}}}^{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n} (\chi_{(k)} \otimes \mu), \quad 0 \leq k \leq n, \quad \mu \in \widehat{\mathbb{S}_n^{\chi_{(k)}}}.$$

Existen  $\sum_{k=0}^n \mathcal{P}(n-k)\mathcal{P}(k)$  representaciones irreducibles de  $(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n$ , donde  $\mathcal{P}$  es la función partición, pero no se necesita considerar a todas ellas. Notar que  $\deg(\rho_{\chi_{(k)}, \mu}) = [\mathbb{S}_n : \mathbb{S}_n^{\chi_{(k)}}] \deg(\mu)$ .

*Observación 3.2.3.* (i) Si  $k = n$ , entonces  $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_n^{\chi_{(k)}}$ , y  $\rho_{\chi_{(n)}, \mu} = \chi_{(n)} \otimes \mu$ , para toda  $\mu \in \widehat{\mathbb{S}_n}$ . En particular, las representaciones  $\chi_{(n)} \otimes \epsilon$  y  $\chi_{(n)} \otimes \text{sgn}$  son de grado 1.

(ii) Si  $k$  es par, entonces  $\rho_{\chi_{(k)}, \mu}(\sigma)$  actúa por  $q_{\sigma\sigma} = 1$ , para todo  $\mu \in \widehat{\mathbb{S}_n^{\chi_{(k)}}}$ . Así,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Por esta razón, podemos asumir  $k$  impar.



Sea  $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  una numeración de  $\mathcal{O}_\sigma$ , como en Subsección 2 del capítulo 1. Hacemos notar que los elementos  $g_1, \dots, g_N$  que satisfacen  $g_i \triangleright \sigma = \sigma_i$ , pueden ser elegidos involuciones.

**Proposición 3.2.4.** *Si  $n$  es impar, entonces el espacio vectorial trenzado  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$ , con  $\rho = \chi_{(n)} \otimes \epsilon$ ,  $\chi_{(n)} \otimes \text{sgn}$ , es negativo.*

*Demostración.* Asumamos que  $\sigma_i \neq \sigma_j$  conmutan. Debemos mostrar que  $q_{ii} = -1$ ,  $q_{jj} = -1$  y  $q_{ij}q_{ji} = 1$ . Las dos primeras condiciones se cumplen porque  $\sigma_l g_l = g_l \sigma$ ,  $1 \leq l \leq N$ . Para la tercera, notar que  $\gamma_{ij} := g_j^{-1} \sigma_i g_j$  y  $\gamma_{ji} := g_i^{-1} \sigma_j g_i$  están en  $\mathbb{S}_{2n}^\sigma$ , ver Sección 2.2; así podemos escribir

$$\gamma_{ij} = A_1^{d_1} \cdots A_n^{d_n} B_{h_1} \cdots B_{h_p}, \quad \gamma_{ji} = A_1^{e_1} \cdots A_n^{e_n} B_{l_1} \cdots B_{l_q},$$

donde  $d_1, \dots, d_n, e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\}$ . Ya que  $\gamma_{ij}, \gamma_{ji} \in \mathcal{O}_\sigma$ , los signos de las permutaciones  $\gamma_{ij}$  y  $\gamma_{ji}$  son iguales al signo de  $\sigma$ , que es  $-1$ , porque  $n$  es impar y el signo de cada permutación  $B_l$  es  $1$ ,  $1 \leq l \leq n-1$ . Esto implica que  $d_1 + \dots + d_n$  y  $e_1 + \dots + e_n$  son impares. Ahora bien, puesto que  $\sigma_i g_j = g_j \gamma_{ij}$  y  $\sigma_j g_i = g_i \gamma_{ji}$  entonces  $q_{ij}q_{ji} = \rho(\gamma_{ij}\gamma_{ji})$ . Consideraremos ambos casos.

(a) *Asumir que  $\rho = \chi_{(n)} \otimes \epsilon$ .* En este caso, el resultado se cumple pues

$$\rho(\gamma_{ij}\gamma_{ji}) = (-1)^{d_1 + \dots + d_n} (-1)^{e_1 + \dots + e_n} = 1.$$

(b) *Asumir que  $\rho = \chi_{(n)} \otimes \text{sgn}$ .* Si  $\sigma_i = \sigma$ , entonces  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \sigma_j$ , porque  $g_j$  es una involución, y el resultado sigue. Veremos que el caso general sigue del caso  $\sigma_i = \sigma$ . Por definición,  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$  es un  $\mathbb{S}_{2n}$ -comódulo, con coacción dada por  $\delta(g_l v) = \sigma_l \otimes g_l v$ , donde  $V = \mathbb{C}$  - span de  $v$ . Entonces  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{S}_{2n}} M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)_\tau$ , donde

$$M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)_\tau := \{m \in M(\mathcal{O}_\sigma, \rho) : \delta(m) = \tau \otimes m\}.$$

Claramente,  $M(\mathcal{O}, \rho)_\tau = g_i V$ , si  $\tau = \sigma_i$ , y  $M(\mathcal{O}, \rho)_\tau = 0$ , si  $\tau \notin \mathcal{O}_\sigma$ .

Si denotamos  $\widetilde{\sigma}_1 := \sigma_i$ , entonces  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho) \simeq \text{Ind}_{\mathbb{S}_{2n}^{\widetilde{\sigma}_1}}^{\mathbb{S}_{2n}} \widetilde{V}$ , donde  $\widetilde{V}$  es una representación irreducible de dimensión 1 de  $\mathbb{S}_{2n}^{\widetilde{\sigma}_1} \simeq \mathbb{S}_{2n}^\sigma$ , ver (2.8). Sean  $\widetilde{\sigma}_2 := \sigma_j$ ,  $\widetilde{g}_1 := \text{id}$  y  $\widetilde{g}_2$  tales que  $\widetilde{g}_2 \widetilde{\sigma}_1 \widetilde{g}_2^{-1} = \widetilde{\sigma}_2$ . Luego, existe  $\widetilde{v}$  en  $\widetilde{V}$  que satisface

$$g_i \mathbb{C}v = M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)_{\sigma_i} = \widetilde{g}_1 \mathbb{C}\widetilde{v}, \quad g_j \mathbb{C}v = M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)_{\sigma_j} = \widetilde{g}_2 \mathbb{C}\widetilde{v};$$

digamos que  $\widetilde{g}_1 \widetilde{v} = \lambda_1 g_i v$  y  $\widetilde{g}_2 \widetilde{v} = \lambda_2 g_j v$ . Entonces

$$\begin{aligned} c(\widetilde{g}_1 \widetilde{v} \otimes \widetilde{g}_2 \widetilde{v}) &= c(\lambda_1 g_i v \otimes \lambda_2 g_j v) = \lambda_1 \lambda_2 c(g_i v \otimes g_j v) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 q_{ij} g_j v \otimes g_i v = q_{ij} \widetilde{g}_2 \widetilde{v} \otimes \widetilde{g}_1 \widetilde{v}, \end{aligned}$$

y por el otro lado,  $c(\widetilde{g}_1 \widetilde{v} \otimes \widetilde{g}_2 \widetilde{v}) = \widetilde{q}_{12} \widetilde{g}_1 \widetilde{v} \otimes \widetilde{g}_2 \widetilde{v}$ ; así,  $q_{ij} = \widetilde{q}_{12}$ . Análogamente,  $q_{ji} = \widetilde{q}_{21}$ . Por lo tanto,  $q_{ij}q_{ji} = \widetilde{q}_{12}\widetilde{q}_{21} = 1$ , y el resultado sigue.  $\square$

Se procede ahora a considerar los diferentes casos de acuerdo a la paridad de  $n$ . El caso  $n = 2$  está contenido en [AZ]. En primer lugar, consideramos  $n = 3, 4$  y después los casos generales  $n$  par y  $n$  impar.

**Caso  $n = 3$** 

Sea  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$  en  $\mathbb{S}_6$ . Entonces  $\mathcal{O}_\sigma$  tiene 15 elementos y el centralizador de  $\sigma$  es

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_6^\sigma &= \langle A_1 = (1\ 2), A_2 = (3\ 4), A_3 = (5\ 6) \rangle \rtimes \langle B = (1\ 3)(2\ 4), C = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \rangle \\ &\simeq (\mathbb{Z}/2)^3 \rtimes \mathbb{S}_3. \end{aligned}$$

Las relaciones para los generadores  $A_1, A_2, A_3, B$  y  $C$  son  $B^2 = C^3 = 1 = A_i^2$ ,  $A_i A_j = A_j A_i$ ,  $BCB = C^{-1}$  y

$$\begin{aligned} BA_1B &= A_2, & BA_2B &= A_1, & BA_3B &= A_3, \\ CA_1C^{-1} &= A_2, & CA_2C^{-1} &= A_3, & CA_3C^{-1} &= A_1. \end{aligned}$$

Por lo visto en la Subsección 3.2.2, las representaciones irreducibles de  $\mathbb{S}_6^\sigma$  son:

- (1) Cuatro caracteres  $\chi_{\pm, \pm}$ , dados por  $\chi_{\pm, \pm}(A_i) = \pm 1$  (el primer subíndice),  $\chi_{\pm, \pm}(B) = \pm 1$  (el segundo subíndice),  $\chi_{\pm, \pm}(C) = 1$ .
- (2) Dos representaciones  $\theta_\pm$ , de dimensión 2, dadas por

$$\theta_\pm(A_i) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_\pm(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_\pm(C) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix},$$

donde  $\omega \in \mathbb{G}_3$  es una raíz tercera primitiva de la unidad.

- (3) Cuatro representaciones  $\phi_\pm, \psi_\pm$ , de dimensión 3, dadas por

$$\phi_\pm(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_\pm(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_\pm(A_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_\pm(B) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_\pm(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\psi_\pm(A_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_\pm(A_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_\pm(A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_\pm(B) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_\pm(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las representaciones  $\chi_{-, \pm}$  coinciden con  $\chi_{(n)} \otimes \epsilon$  y  $\chi_{(n)} \otimes \text{sgn}$  de Proposición 3.2.4, luego no podemos decidir la dimensión de sus álgebras de Nichols. Para las otras, se tiene:

**Proposición 3.2.5.** *Sea  $\sigma \in \mathbb{S}_6$  de tipo  $(2^3)$ . Sea  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{S}}_6^\sigma$ . Si  $\rho \neq \chi_{-, \pm}$  entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Podemos suponer que  $\sigma = A_1 A_2 A_3 = (12)(34)(56)$ . Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{\mathbb{S}}_6^c$ . Buscamos un subespacio trenzado de tipo diagonal de  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$ . Definimos  $\sigma_1 := \sigma$ ,  $\sigma_2 := (12)(35)(46)$ ,  $\sigma_3 := (12)(36)(45)$  en  $\mathcal{O}_\sigma$ ; si  $g_1 = \text{id}$ ,  $g_2 = (45)$ ,  $g_3 = (46)$  entonces  $g_j \triangleright \sigma = \sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ . Sea  $g_j v := g_j \otimes v$ ,  $v \in V$ ,  $1 \leq j \leq 3$ . La coacción en el módulo de Yetter-Drinfeld  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$  está dada por  $\delta(g_j v) = g_j \triangleright \sigma \otimes g_j v$ ; necesitamos las acciones de los elementos  $\sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , las cuales son

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdot g_1 v &= g_1 \rho(\sigma)(v), & \sigma_1 \cdot g_2 v &= g_2 \rho(\sigma_2)(v), & \sigma_1 \cdot g_3 v &= g_3 \rho(\sigma_3)(v), \\ \sigma_2 \cdot g_1 v &= g_1 \rho(\sigma_2)(v), & \sigma_2 \cdot g_2 v &= g_2 \rho(\sigma)(v), & \sigma_2 \cdot g_3 v &= g_3 \rho(\sigma_2)(v), \\ \sigma_3 \cdot g_1 v &= g_1 \rho(\sigma_3)(v), & \sigma_3 \cdot g_2 v &= g_2 \rho(\sigma_3)(v), & \sigma_3 \cdot g_3 v &= g_3 \rho(\sigma)(v). \end{aligned}$$

Luego, la trenza está dada por

$$\begin{aligned} c(g_1 v \otimes g_2 w) &= g_2 \rho(\sigma_2)(w) \otimes g_1 v, & c(g_1 v \otimes g_3 w) &= g_3 \rho(\sigma_3)(w) \otimes g_1 v, \\ c(g_2 v \otimes g_1 w) &= g_1 \rho(\sigma_2)(w) \otimes g_2 v, & c(g_2 v \otimes g_3 w) &= g_3 \rho(\sigma_2)(w) \otimes g_2 v, \\ c(g_3 v \otimes g_1 w) &= g_1 \rho(\sigma_3)(w) \otimes g_3 v, & c(g_3 v \otimes g_2 w) &= g_2 \rho(\sigma_3)(w) \otimes g_3 v, \end{aligned}$$

y  $c(g_j v \otimes g_j w) = (g_j \triangleright \sigma) \cdot g_j w \otimes g_j v = g_j \rho(\sigma)(w) \otimes g_j v = -g_j w \otimes g_j v$ , para todo  $1 \leq j \leq 3$  y  $v, w \in V$ .

Se considera ahora las diferentes posibilidades para  $\rho$ . Si  $\rho = \chi_{+, \pm}$ ,  $\theta_+$  ó  $\psi_{\pm}$ , entonces  $q_{\sigma\sigma} = 1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.1.

Si  $\rho = \theta_-$ , entonces  $\rho(\sigma_2) = \rho(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$ . Elegimos  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix}$  y  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}$ . Luego,  $\rho(\sigma_2)(v_1) = \rho(\sigma_3)(v_1) = v_1$ ,  $\rho(\sigma_2)(v_2) = \rho(\sigma_3)(v_2) = -v_2$ . Por lo tanto, la trenza es diagonal de tipo Cartan en la base

$$w_1 = g_1 v_1, \quad w_2 = g_1 v_2, \quad w_3 = g_2 v_1, \quad w_4 = g_2 v_2, \quad w_5 = g_3 v_1, \quad w_6 = g_3 v_2.$$

El correspondiente diagrama de Dynkin es  $A_5^{(1)}$ . Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \theta_-) = \infty$ .

Supongamos que  $\rho = \phi_+$ . Entonces  $\phi_+(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\phi_+(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Elegimos  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_2)(v_1) &= -v_1, & \rho(\sigma_2)(v_2) &= v_2, & \rho(\sigma_2)(v_3) &= -v_3, \\ \rho(\sigma_3)(v_1) &= -v_1, & \rho(\sigma_3)(v_2) &= -v_2, & \rho(\sigma_3)(v_3) &= v_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la trenza es diagonal de tipo Cartan en la base

$$\begin{aligned} w_1 &= g_1 v_1, & w_2 &= g_1 v_2, & w_3 &= g_1 v_3, \\ w_4 &= g_2 v_1, & w_5 &= g_2 v_2, & w_6 &= g_2 v_3, \\ w_7 &= g_3 v_1, & w_8 &= g_3 v_2, & w_9 &= g_3 v_3; \end{aligned}$$

esto implica que el correspondiente diagrama de Dynkin contiene al diagrama de Dynkin afín  $A_2^{(1)}$ . Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \phi_+) = \infty$ . Finalmente, el caso  $\rho = \phi_-$  es análogo.  $\square$

**Caso  $n = 4$** 

Sea  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$  en  $\mathbb{S}_8$ . El centralizador de  $\sigma$  es

$$\mathbb{S}_8^\sigma = \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle \rtimes \langle B_1, B_2, B_3 \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2)^4 \rtimes \mathbb{S}_4,$$

donde  $A_1 = (1\ 2)$ ,  $A_2 = (3\ 4)$ ,  $A_3 = (5\ 6)$ ,  $A_4 = (7\ 8)$ ,  $B_1 = (1\ 3)(2\ 4)$ ,  $B_2 = (3\ 5)(4\ 6)$  y  $B_3 = (5\ 7)(6\ 8)$ . Por lo visto en la Sección 3.2.2, existen 20 representaciones irreducibles de  $\mathbb{S}_8^\sigma$ , pero por Observación 3.2.3 (ii) sólo se necesitan considerar 6 de ellas. Ellas son

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{Ind}(\chi_{(1)} \otimes \epsilon), & \rho_2 &= \text{Ind}(\chi_{(1)} \otimes \text{sgn}), & \rho_3 &= \text{Ind}(\chi_{(1)} \otimes \theta), \\ \rho_4 &= \text{Ind}(\chi_{(3)} \otimes \epsilon), & \rho_5 &= \text{Ind}(\chi_{(3)} \otimes \text{sgn}), & \rho_6 &= \text{Ind}(\chi_{(3)} \otimes \theta), \end{aligned}$$

donde  $\text{Ind}$  quiere decir  $\text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^4 \rtimes \mathbb{S}_3}^{(\mathbb{Z}/2)^4 \rtimes \mathbb{S}_4}$  y  $\theta$  es la representación estándar de  $\mathbb{S}_3$  (notar que  $\mathbb{S}_4^{X(1)} \simeq \mathbb{S}_3 \simeq \mathbb{S}_4^{X(3)}$  – ver (3.10)). Con esta notación, podemos enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.6.** *Sea  $\sigma \in \mathbb{S}_8$  de tipo  $(2^4)$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}_8^\sigma}$ .*

*Demostración.* Podemos suponer que  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$ . Probaremos más adelante que si  $j = 1, 2, 4$  ó  $5$  entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho_j) = \infty$ , ver Lemas 3.2.7 y 3.2.8. Veamos ahora los casos restantes  $j = 3, 6$ . Es claro que  $\sigma_1 := \sigma$ ,  $\sigma_2 := (1\ 2)(3\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$  y  $\sigma_3 := (1\ 2)(3\ 4)(5\ 8)(6\ 7)$  están en  $\mathcal{O}_\sigma$  y que satisfacen las mismas relaciones que en la demostración de Proposición 3.2.5, con  $g_1 = \text{id}$ ,  $g_2 = (6\ 7)$ ,  $g_3 = (6\ 8)$ . Consideremos  $\rho_3$ . En una base adecuada, se tiene

$$\rho_3(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\omega \in \mathbb{C}_3$  es una raíz tercera primitiva de la unidad. Es fácil ver que

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 + \omega e_5, & v_2 &= e_2 + \omega e_6, & v_3 &= e_3 + e_4, & v_4 &= e_3 - e_4, \\ v_5 &= e_1 - \omega e_5, & v_6 &= e_2 - \omega e_6, & v_7 &= e_7 + e_8, & v_8 &= e_7 - e_8, \end{aligned}$$

son autovectores de autovalores 1 o  $-1$ . En particular,

$$\rho_3(\sigma_2)v_7 = v_7, \quad \rho_3(\sigma_2)v_8 = -v_8, \quad \rho_3(\sigma_3)v_7 = -v_7, \quad \rho_3(\sigma_3)v_8 = v_8.$$

Así, en la base  $w_1 = g_1v_7$ ,  $w_2 = g_1v_8$ ,  $w_3 = g_2v_7$ ,  $w_4 = g_2v_8$ ,  $w_5 = g_3v_7$ ,  $w_6 = g_3v_8$ , la trenza es diagonal de tipo Cartan. El correspondiente diagrama de Dynkin es no conexo; sus componentes conexas son  $\{1, 4, 6\}$  y  $\{2, 3, 5\}$ , cada una de ellas dan lugar al diagrama de Dynkin afín  $A_2^{(1)}$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho_3) = \infty$  por Teorema 2.3.2.

Finalmente, si  $\rho = \rho_6$  se tiene que

$$\rho_6(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_6(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los siguientes son autovectores de autovalores 1 o  $-1$

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 + e_2, & v_2 &= e_1 - e_2, & v_3 &= e_3 + \omega e_7, & v_4 &= e_4 + \omega e_8, \\ v_5 &= e_5 + e_6, & v_6 &= e_5 - e_6, & v_7 &= e_3 - \omega e_7, & v_8 &= e_4 - \omega e_8. \end{aligned}$$

En particular,

$$\rho_6(\sigma_2)v_1 = v_1, \quad \rho_6(\sigma_2)v_2 = -v_2, \quad \rho_6(\sigma_3)v_1 = -v_1, \quad \rho_6(\sigma_3)v_2 = v_2.$$

Así, en la base  $w_1 = g_1v_1$ ,  $w_2 = g_1v_2$ ,  $w_3 = g_2v_1$ ,  $w_4 = g_2v_2$ ,  $w_5 = g_3v_1$ ,  $w_6 = g_3v_2$ , la trenza es diagonal de tipo Cartan. Esto es similar al caso de  $\rho_3$  intercambiando los roles de  $v_7$  por  $v_1$  y  $v_8$  por  $v_2$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho_6) = \infty$  por Teorema 2.3.2.  $\square$

### Caso $n$ general

Se comienza ahora el análisis del caso general. En primer lugar, se probarán dos lemas.

**Lema 3.2.7.** Si  $\rho = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n}^{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n}(\chi_{(1)} \otimes \mu)$ , con  $\mu = \epsilon$  ó  $\text{sgn}$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para todo  $n \geq 2$ .

*Demostración.* Sean  $g_1 = \text{id}$ ,  $g_2 = (2n - 2 \ 2n - 1)$  y  $g_3 = (2n - 2 \ 2n)$ . Se definen  $\sigma_2 := g_2 \triangleright \sigma$  y  $\sigma_3 := g_3 \triangleright \sigma$ , así

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= A_1 A_2 \cdots A_{n-2} (2n - 3 \ 2n - 1) (2n - 2 \ 2n), \\ \sigma_3 &= A_1 A_2 \cdots A_{n-2} (2n - 3 \ 2n) (2n - 2 \ 2n - 1); \end{aligned}$$

consideremos  $T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Por cálculos directo se puede ver que

$$\sigma_2 = \sigma A_{n-1} A_n B_{n-1} = \sigma_3 A_{n-1} A_n \quad \text{y} \quad \sigma_3 = \sigma B_{n-1}. \quad (3.11)$$

Se procede ahora como en la demostración de la Proposición 3.2.5. Escribimos  $g_j v := g_j \otimes v$ ,  $v \in V$ ,  $1 \leq j \leq 3$ . La coacción está dada por  $\delta(g_j v) = g_j \triangleright \sigma \otimes \sigma_j v$ ; la acción de los elementos  $\sigma$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  es

$$\begin{aligned} \sigma \cdot g_1 v &= g_1 \rho(\sigma)(v), & \sigma \cdot g_2 v &= g_2 \rho(\sigma_2)(v), & \sigma \cdot g_3 v &= g_3 \rho(\sigma_3)(v), \\ \sigma_2 \cdot g_1 v &= g_1 \rho(\sigma_2)(v), & \sigma_2 \cdot g_2 v &= g_2 \rho(\sigma)(v), & \sigma_2 \cdot g_3 v &= g_3 \rho(\sigma_2)(v), \\ \sigma_3 \cdot g_1 v &= g_1 \rho(\sigma_3)(v), & \sigma_3 \cdot g_2 v &= g_2 \rho(\sigma_3)(v), & \sigma_3 \cdot g_3 v &= g_3 \rho(\sigma)(v). \end{aligned}$$

Luego, la trenza está dada por

$$\begin{aligned} c(g_1 v \otimes g_2 w) &= g_2 \rho(\sigma_2)(w) \otimes g_1 v, & c(g_1 v \otimes g_3 w) &= g_3 \rho(\sigma_3)(w) \otimes g_1 v, \\ c(g_2 v \otimes g_1 w) &= g_1 \rho(\sigma_2)(w) \otimes g_2 v, & c(g_2 v \otimes g_3 w) &= g_3 \rho(\sigma_2)(w) \otimes g_2 v, \\ c(g_3 v \otimes g_1 w) &= g_1 \rho(\sigma_3)(w) \otimes g_3 v, & c(g_3 v \otimes g_2 w) &= g_2 \rho(\sigma_3)(w) \otimes g_3 v, \end{aligned}$$

y  $c(g_j v \otimes g_j w) = (g_j \triangleright \sigma) \cdot g_j w \otimes g_j v = g_j \rho(\sigma)(w) \otimes g_j v = -g_j w \otimes g_j v$ , para todo  $1 \leq j \leq 3$  y  $v, w \in V$ .

Consideremos  $\rho = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n}^{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n^{\chi_{(1)}}} (\chi_{(1)} \otimes \epsilon)$ . El espacio vectorial de la representación  $\rho$  tiene dimensión  $n$ . Es fácil ver que para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , la matriz  $\rho(A_i)$  es diagonal con  $(\rho(A_i))_{i,i} = -1$  y 1 en el resto; mientras que

$$\rho(B_{n-1}) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{n-2} & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene que  $\rho(\sigma) = -\text{Id}$  y, por (3.11),

$$\rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -\text{Id}_{n-2} & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_3) = \begin{pmatrix} -\text{Id}_{n-2} & & \\ & 0 & -1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elegimos  $v_i = e_i$ ,  $1 \leq i \leq n-2$ ,  $v_{n-1} = e_{n-1} + e_n$  y  $v_n = e_{n-1} - e_n$ . Luego,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_2)v_i &= -v_i, & \rho(\sigma_2)v_{n-1} &= v_{n-1}, & \rho(\sigma_2)v_n &= -v_n, \\ \rho(\sigma_3)v_i &= -v_i, & \rho(\sigma_3)v_{n-1} &= -v_{n-1}, & \rho(\sigma_3)v_n &= v_n, \end{aligned}$$

con  $1 \leq i \leq n-2$ . Entonces la trenza es diagonal de tipo Cartan en la base  $\mathcal{B} = \{g_j v_i\}$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $1 \leq i \leq n$ . El correspondiente diagrama de Dynkin no es de tipo finito porque contiene al diagrama de Dynkin affine  $A_2^{(1)}$ . Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .

Finalmente, si  $\rho = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n}^{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n^{\chi_{(1)}}} (\chi_{(1)} \otimes \text{sgn})$ ,  $\rho(A_i)$  son como antes y

$$\rho(B_{n-1}) = \begin{pmatrix} -\text{Id}_{n-2} & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{n-2} & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_3) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{n-2} & & \\ & 0 & -1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea  $v_i$  como antes; luego,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_2)v_i &= v_i, & \rho(\sigma_2)v_{n-1} &= v_{n-1}, & \rho(\sigma_2)v_n &= -v_n, \\ \rho(\sigma_3)v_i &= v_i, & \rho(\sigma_3)v_{n-1} &= -v_{n-1}, & \rho(\sigma_3)v_n &= v_n, \end{aligned}$$

con  $1 \leq i \leq n-2$ . Entonces la trenza es diagonal de tipo Cartan en la base  $\mathcal{B}$ . El correspondiente diagrama de Dynkin no es de tipo finito porque contiene al diagrama afin  $A_2^{(1)}$ . Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .  $\square$

**Lema 3.2.8.** Si  $\rho = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^n \times \mathbb{S}_n}^{(\mathbb{Z}/2)^n \times \mathbb{S}_n} (\chi_{(n-1)} \otimes \mu)$ , con  $\mu = \epsilon$  ó  $\text{sgn}$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para todo  $n \geq 2$ .

*Demostración.* Sean  $g_j, \sigma_j, 1 \leq j \leq 3$ , como en la demostración de Lema 3.2.7.

Si  $\rho = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^n \times \mathbb{S}_n}^{(\mathbb{Z}/2)^n \times \mathbb{S}_n} (\chi_{(n-1)} \otimes \epsilon)$ , entonces para cada  $i, 1 \leq i \leq n$ , la matriz  $\rho(A_i)$  es diagonal con  $(\rho(A_i))_{n-i+1, n-i+1} = 1$  y  $-1$  en el resto; mientras que

$$\rho(B_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & & \text{Id}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene que  $\rho(\sigma) = -\text{Id}$  y, por (3.11),

$$\rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & & \text{Id}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & & -\text{Id}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Elegimos  $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 - e_2$  y  $v_i = e_i, 3 \leq i \leq n$ . Luego,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_2)v_1 &= -v_1, & \rho(\sigma_2)v_2 &= v_2, & \rho(\sigma_2)v_i &= v_i, \\ \rho(\sigma_3)v_1 &= -v_1, & \rho(\sigma_3)v_2 &= v_2, & \rho(\sigma_3)v_i &= -v_i, \end{aligned}$$

con  $3 \leq i \leq n$ . Entonces la trenza es diagonal de tipo Cartan en la base  $\mathcal{B} = \{g_j v_i\}, j = 1, 2, 3, 1 \leq i \leq n$ . El correspondiente diagrama de Dynkin no es de tipo finito porque contiene al diagrama de Dynkin afin  $A_5^{(1)}$ . Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .

Finalmente, si  $\rho = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^n \times \mathbb{S}_n}^{(\mathbb{Z}/2)^n \times \mathbb{S}_n} (\chi_{(n-1)} \otimes \text{sgn})$  entonces las matrices  $\rho(A_i)$  son las mismas que en el caso previo y

$$\rho(B_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & & -\text{Id}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & -\text{Id}_{n-2} & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & & \text{Id}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Sea  $v_i$  como antes; luego,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_2)v_1 &= -v_1, & \rho(\sigma_2)v_2 &= v_2, & \rho(\sigma_2)v_i &= -v_i, \\ \rho(\sigma_3)v_1 &= -v_1, & \rho(\sigma_3)v_2 &= v_2, & \rho(\sigma_3)v_i &= v_i, \end{aligned}$$

con  $3 \leq i \leq n$ . Entonces la trenza es diagonal de tipo Cartan en la base  $\mathcal{B}$ . El correspondiente diagrama de Dynkin no es de tipo finito porque contiene al diagrama de Dynkin afín  $A_5^{(1)}$ . Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .  $\square$

Notar que si  $n$  es impar, entonces el análogo del Lema 3.2.8 sigue de la Observación 3.2.3 (ii). A continuación se dará alguna notación para los casos  $n$  par y  $n$  impar, separadamente.

**Notación en el caso  $n$  par.** Supongamos que  $n = 2L$  y para cada  $l$ , con  $1 \leq l \leq L$ , se define  $g_l^+ := (4l-2 \ 4l-1)$ ,  $g_l^- := (4l-2 \ 4l)$ ,

$$\alpha_l := g_l^+ \triangleright \sigma, \quad \text{y} \quad \beta_l := g_l^- \triangleright \sigma.$$

Esto es, si  $\sigma = A_1 A_2 \cdots A_{2l-1} A_{2l} \cdots A_{2L-1} A_{2L}$ , entonces

$$\begin{aligned} \alpha_l &= A_1 A_2 \cdots (4l-3 \ 4l-1)(4l-2 \ 4l) \cdots A_{2L-1} A_{2L}, \\ \beta_l &= A_1 A_2 \cdots (4l-3 \ 4l)(4l-2 \ 4l-1) \cdots A_{2L-1} A_{2L}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que  $g_l^\pm g_h^\pm = g_h^\pm g_l^\pm$ , para todo  $l, h$  distintos. Sea  $T$  el conjunto

$$T = \{g_{l_k}^\pm \triangleright (\cdots (g_{l_1}^\pm \triangleright \sigma) \cdots) : 1 \leq k \leq L, 1 \leq l_1 < \cdots < l_k \leq L\} \cup \{\sigma\}.$$

Notar que  $g_{l_k}^\pm \triangleright (\cdots (g_{l_1}^\pm \triangleright \sigma) \cdots) = (g_{l_k}^\pm \cdots g_{l_1}^\pm) \triangleright \sigma$ . Sea  $T = \{\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  una numeración de  $T$ ; elegimos  $g_0 = \text{id}$  y  $g_j$  a los elementos  $g_l^\pm$  tales que  $g_j \triangleright \sigma = \sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ .

El siguiente resultado sale por cálculos directos.

**Lema 3.2.9.** *Para todo  $l$ ,  $1 \leq l \leq L$ , se tiene que*

- (i)  $g_l^- g_l^+ A_{2l-1} A_{2l} g_l^+ g_l^- = g_l^+ A_{2l-1} A_{2l} g_l^+$ .
- (ii)  $g_l^+ g_l^- A_{2l-1} A_{2l} g_l^- g_l^+ = g_l^- A_{2l-1} A_{2l} g_l^-$ .
- (iii)  $g_l^\pm A_{2l-1} A_{2l} g_l^\pm A_{2l-1} A_{2l} = g_l^\mp A_{2l-1} A_{2l} g_l^\mp$ .
- (iv)  $A_{2l-1} A_{2l} g_l^\pm A_{2l-1} A_{2l} g_l^\pm = g_l^\mp A_{2l-1} A_{2l} g_l^\mp$ .
- (v)  $\alpha_l \beta_l = A_{2l-1} A_{2l} = \beta_l \alpha_l$ .  $\square$



**Lema 3.2.10.** (1) Si  $1 \leq l \leq L$ , entonces

$$\alpha_l = \sigma A_{2l-1} A_{2l} B_{2l-1} = \beta_l A_{2l-1} A_{2l} \quad y \quad \beta_l = \sigma B_{2l-1}.$$

(2)  $T \subseteq \mathcal{O}_\sigma \cap \mathbb{S}_{2n}^\sigma$ .

(3) Para cada  $i, j$ ,  $0 \leq i, j \leq N$ , existe  $k$ ,  $0 \leq k \leq N$  tal que  $\sigma_i g_j = g_j \sigma_k$ .

(4)  $T$  es abeliano.

*Demostración.* (1) es obvio. (2) Claramente,  $T \subseteq \mathcal{O}_\sigma$ . Para ver que  $T \subseteq \mathbb{S}_{2n}^\sigma$  se necesita probar que  $\sigma_i = (g_{l_k}^\pm \cdots g_{l_1}^\pm) \triangleright \sigma$  en  $\mathbb{S}_{2n}^\sigma$ . Esto es claro para  $k = 1$ ; luego se sigue por inducción en  $k$ .

(3) Notar que si  $i = 0$  entonces  $k = j$ ; si  $i = j$  entonces  $k = 0$ , etc. Fijemos  $\sigma_i = (g_{l_k}^\pm \cdots g_{l_1}^\pm) \triangleright \sigma$ , con  $1 \leq l_1 < \cdots < l_k \leq L$ ; supongamos que  $g_j = g_{h_M}^\pm \cdots g_{h_1}^\pm$ , con  $1 \leq h_1 < \cdots < h_M \leq L$ . Entonces

$$g_j \sigma_i g_j = g_{l_k}^\pm \cdots g_{l_1}^\pm g_{h_M}^\pm \cdots g_{h_1}^\pm \sigma g_{h_1}^\pm \cdots g_{h_M}^\pm g_{l_1}^\pm \cdots g_{l_k}^\pm.$$

Si  $l_r \neq h_s$  para todo  $r, s$ , entonces  $\sigma_k := g_j \sigma_i g_j$  está en  $T$ . Si  $l_r = h_s$  para algunos  $r$  y  $s$ , se tiene que en la expresión  $g_j \sigma_i g_j$  los factores  $g_{l_r}^\pm$  y  $g_{h_s}^\pm$  se cancelan mutuamente mientras que para los factores  $g_{l_r}^\pm$  y  $g_{h_s}^\mp$  usamos el Lema 3.2.9(i),(ii) y resulta que

$$g_j \sigma_i g_j = \cdots g_{l_r}^\pm g_{h_s}^\mp \sigma g_{h_s}^\mp g_{l_r}^\pm \cdots = \cdots g_{h_s}^\mp \sigma g_{h_s}^\mp \cdots.$$

Por lo tanto,  $g_j \sigma_i g_j$  está en  $T$ .

(4) Tenemos que probar que  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ , para todo  $i, j$ .

(a) Analizamos los casos cuando  $\sigma_i = \alpha_l$  ó  $\beta_l$  y  $\sigma_j = \alpha_h$  ó  $\beta_h$ .

(i) Si  $\sigma_i = \alpha_l$  y  $\sigma_j = \alpha_h$ , entonces

$$\sigma_i \sigma_j = g_l^+ A_{2l-1} A_{2l} g_l^+ g_h^+ A_{2h-1} A_{2h} g_h^+.$$

Si  $l = h$  entonces la afirmación es claramente cierta. Si  $l \neq h$  se tiene que  $g_l^+ A_{2l-1} A_{2l} g_l^+$  y  $g_h^+ A_{2h-1} A_{2h} g_h^+$  conmutan porque son permutaciones disjuntas; luego el resultado sigue.

(ii) Si  $\sigma_i = \beta_l$  y  $\sigma_j = \beta_h$ , entonces procedemos en forma análoga al caso anterior.

(iii) Si  $\sigma_i = \alpha_l$  y  $\sigma_j = \beta_h$ , entonces

$$\sigma_i \sigma_j = g_l^+ A_{2l-1} A_{2l} g_l^+ g_h^- A_{2h-1} A_{2h} g_h^-.$$

Si  $l \neq h$  entonces  $g_l^+ A_{2l-1} A_{2l} g_l^+$  y  $g_h^- A_{2h-1} A_{2h} g_h^-$  conmutan; de allí que  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ . Mientras que si  $l = h$ , se verifica fácilmente que  $\sigma_i \sigma_j = \alpha_l \beta_l = \text{id} = \beta_l \alpha_l = \sigma_j \sigma_i$ , y el resultado sigue.

(b) En general, para  $\sigma_i = (g_{l_k}^\pm \cdots g_{l_1}^\pm) \triangleright \sigma$  y  $\sigma_j = (g_{h_M}^\pm \cdots g_{h_1}^\pm) \triangleright \sigma$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \sigma_i &= A_1 A_2 \cdots g_{l_1}^\pm A_{2l_1-1} A_{2l_1} g_{l_1}^\pm \cdots g_{l_k}^\pm A_{2l_k-1} A_{2l_k} g_{l_k}^\pm \cdots A_{2L-1} A_{2L}, \\ \sigma_j &= A_1 A_2 \cdots g_{h_1}^\pm A_{2h_1-1} A_{2h_1} g_{h_1}^\pm \cdots g_{h_M}^\pm A_{2h_M-1} A_{2h_M} g_{h_M}^\pm \cdots A_{2L-1} A_{2L}. \end{aligned}$$

Ahora se tienen dos casos:

(i) Si  $l_r \neq h_s$ , para todo  $r, s$ . Entonces

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= g_{l_1}^\pm A_{2l_1-1} A_{2l_1} g_{l_1}^\pm \cdots g_{l_k}^\pm A_{2l_k-1} A_{2l_k} g_{l_k}^\pm \\ &\quad g_{h_1}^\pm A_{2h_1-1} A_{2h_1} g_{h_1}^\pm \cdots g_{h_M}^\pm A_{2h_M-1} A_{2h_M} g_{h_M}^\pm = \sigma_j \sigma_i, \end{aligned}$$

porque cada  $g_{l_r}^\pm A_{2l_r-1} A_{2l_r} g_{l_r}^\pm$  conmuta con cada  $g_{h_s}^\pm A_{2h_s-1} A_{2h_s} g_{h_s}^\pm$ .

(ii) Si  $l_r = h_s$ , para algún  $r, s$ , entonces usamos (a) en cada factor correspondiente a  $l_r = h_s$ .

Esto concluye la prueba.  $\square$

Para el resto de esta subsección fijamos un orden en  $T$  dado por

$$T = \{\sigma_0 = \sigma, \sigma_1 = \alpha_1, \sigma_2 = \beta_1, \dots, \sigma_{2L-1} = \alpha_L, \sigma_{2L} = \beta_L, \dots\}.$$

A continuación se trabajará con  $\rho = \rho_{\chi(k), \mu}$  en  $\widehat{\mathbb{S}}_{2n}^\sigma$ , como en la Sección 3.2.2; sean  $V$  y  $V_\mu$  los espacios vectoriales de las representaciones  $\rho$  y  $\mu$ , respectivamente. Por Observación 3.2.3 (ii), sólo se necesita considerar  $k$  impar; así  $\rho(\sigma) = -\text{Id}$ . Ya que  $\sigma_i^2 = \text{id}$ , para todo  $i$ , entonces los posibles autovalores de los operadores  $\{\rho(\sigma_i) : 0 \leq i \leq N\}$  son 1 y  $-1$ . Más aún, puesto que  $T$  es abeliano existe una base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_R\}$  de  $V$  formada por autovectores simultáneos para dichos operadores. Notar que

$$\dim V = [\mathbb{S}_n : \mathbb{S}_n^{\chi(k)}] \dim V_\mu = \binom{n}{k} \dim V_\mu.$$

Para cada  $i$ ,  $0 \leq i \leq N$  definimos  $\mathbf{f}^i = (f_1^i, f_2^i, \dots, f_R^i)$  donde  $\rho(\sigma_i)v_r = f_r^i v_r$ ,  $1 \leq r \leq R$ ; por ejemplo  $\mathbf{f}^0 = (-1, -1, \dots, -1)$ . Denotamos por  $E_i$  a la matriz con todas sus filas iguales a  $\mathbf{f}^i$ . Luego,  $E_0$  es la matriz  $\dim V \times \dim V$  con todas sus entradas iguales a  $-1$ .

Consideremos el subespacio  $W$  de  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$  con base  $\{w_{i,r} := g_i v_r = \sigma_i \otimes v_r : 0 \leq i \leq N, 1 \leq r \leq R\}$ . Entonces  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de tipo Cartan y la matriz de los escalares  $(q_{a,b})_{a,b}$ — ver Definición 1.3.3— tiene la forma

$$Q = \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & \cdots & E_{2L-1} & E_{2L} & \cdots \\ E_1 & E_0 & E_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_2 & E_2 & E_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{2L-1} & \cdots & \cdots & \cdots & E_0 & E_{2L-1} & \cdots \\ E_{2L} & \cdots & \cdots & \cdots & E_{2L} & E_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Aquí los bloques diagonales son iguales a la matriz  $E_0$ ; mientras que el bloque en la posición  $i, j$  es la matriz  $E_k$  donde  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_k$ .

**Notación en el caso  $n$  impar.** Supongamos que  $n = 2L + 1$  y que para cada  $l$ , con  $1 \leq l \leq L$ , tomamos  $g_l^+, g_l^-, \alpha_l, \beta_l$  y  $T$  como en caso  $n$  par. Así,

$$\begin{aligned} \sigma &= A_1 A_2 \cdots A_{2l-1} A_{2l} \cdots A_{2L-1} A_{2L} A_{2L+1}, \\ \alpha_l &= A_1 A_2 \cdots (4l-3 \quad 4l-1)(4l-2 \quad 4l) \cdots A_{2L-1} A_{2L} A_{2L+1}, \\ \beta_l &= A_1 A_2 \cdots (4l-3 \quad 4l)(4l-2 \quad 4l-1) \cdots A_{2L-1} A_{2L} A_{2L+1}. \end{aligned}$$

Entonces  $g_l^\pm, \alpha_l, \beta_l, \sigma_i, \sigma_j$  y  $T$  satisfacen las mismas propiedades que antes.

**Proposición 3.2.11.** *Sea  $\rho = (\rho, V)$  en  $\widehat{\mathbb{S}}_{2n}^\sigma$ ,  $n \geq 2$ . Si*

- (a)  $n$  es par, ó
- (b)  $n = 3$  y  $\rho \neq \chi_{-, \pm}$ , ó
- (c)  $n$  es impar y  $\rho \neq \rho_{\chi_{(n)}, \mu}$ , para todo  $\mu$  en  $\widehat{\mathbb{S}}_n$ ,

entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .

*Demostración.* Sean  $\rho = \rho_{\chi_{(k)}, \mu}$ ,  $\chi_{(k)}$  en  $(\mathbb{Z}/2)^n$  y  $\mu$  en  $\widehat{\mathbb{S}}_n$ . Por Observación 3.2.3 (ii), podemos asumir que  $k$  es impar. Distinguiamos dos posibilidades.

(1) Par todo  $l$ , con  $1 \leq l \leq L$ ,  $\rho(\alpha_l) = \text{Id} = \rho(\beta_l)$  o  $\rho(\alpha_l) = -\text{Id} = \rho(\beta_l)$ . Por Lema 3.2.10 (1), esto implica que

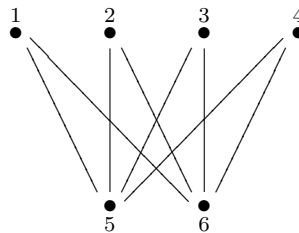
$$\rho(A_{2l-1}A_{2l}) = \text{Id}, \quad \text{para todo } l.$$

*Asumamos que  $n$  es par.* Luego,  $\rho(\sigma) = \rho(A_1A_2 \cdots A_{2L-1}A_{2L}) = \text{Id}$ ; así que  $q_{\sigma, \sigma} = 1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .

*Asumamos que  $n$  es impar.* Ya que  $\rho(\sigma) = -\text{Id}$ , resulta que  $\rho(A_{2L+1}) = -\text{Id}$ . Por lo discutido en Subsección 3.2.2, esto implica que  $\rho(A_j) = -\text{Id}$ ,  $1 \leq j \leq 2L+1$ . Entonces  $\rho = \rho_{\chi_{(n)}, \mu}$ , pero esto es una contradicción por hipótesis.

(2) Existe  $l$  con  $\rho(\alpha_l) \neq \pm \text{Id}$  o  $\rho(\beta_l) \neq \pm \text{Id}$  o  $\rho(\alpha_l) = \pm \text{Id} = \mp \rho(\beta_l)$ . Aquí se tiene que si  $\dim V > 4$  entonces la matriz de Cartan generalizada  $\mathcal{A}$  es tal que su diagrama de Dynkin asociado no es de tipo finito y el resultado sigue. Para ver esto supongamos que existe  $l$  con  $\rho(\alpha_l) \neq \pm \text{Id}$ ; para los otros casos el argumento es similar. Recordemos que las componentes del vector  $\mathbf{f}^l$  son 1 o  $-1$ ; luego definimos  $c^+ := \text{card}\{r : f_r^l = 1\}$  y  $c^- := \text{card}\{r : f_r^l = -1\}$ ; notar que  $c^+ + c^- = R$ . Consideramos tres casos.

- (I) Si  $\dim V \geq 7$  entonces el diagrama de Dynkin asociado tiene un vértice  $w$  con  $\lambda_w \geq 4$ , donde  $\lambda_w$  denota el número de vértices del diagrama que son adyacentes a  $w$ . Consecuentemente, tal diagrama no es de tipo finito.
- (II) Supongamos que  $\dim V = 6$ ; si  $c^+ \geq 4$  o  $c^- \geq 4$  procedemos como en (I). Así, debemos considerar  $c^+ \leq 3$  y  $c^- \leq 3$ . Como  $c^+ + c^- = 6$  entonces  $c^+ = 3$  y  $c^- = 3$ , pero ya que no existe diagrama de Dynkin de tipo finito con dos vértices  $w, w'$  con  $\lambda_w = 3$  y  $\lambda_{w'} = 3$ , el resultado sigue.
- (III) Si  $\dim V = 5$  sólo debemos considerar o bien  $c^+ = 3$  y  $c^- = 2$  o bien  $c^+ = 2$  y  $c^- = 3$ , por (II). En cualquier caso se tiene que el diagrama de Dynkin asociado tiene dos vértices  $w, w'$  con  $\lambda_w = 3$  y  $\lambda_{w'} = 3$  y el resultado sigue.



En consecuencia, sólo nos queda considerar el caso  $\dim V \leq 4$ . Entonces, ya que  $\dim V = \binom{n}{k} \dim V_\mu$ , donde  $V_\mu$  es el espacio vectorial de la representación  $\mu$ , se deben analizar las diferentes posibilidades para  $n$ ,  $k$  y  $\mu$  que satisfagan la condición

$$\binom{n}{k} \dim V_\mu \leq 4.$$

Esta desigualdad se cumple solamente en los siguientes casos

- (i)  $n = 2$  y  $k = 1$ .
- (ii)  $n = 3$ ,  $k = 1$  o  $2$  y  $\dim V_\mu = 1$ .
- (iii)  $n = 4$ ,  $k = 1$  o  $3$  y  $\dim V_\mu = 1$ .
- (iv)  $n$  cualquiera,  $k = 0$  ó  $k = n$  y  $\dim V_\mu = 1, 2, 3$  ó  $4$ .

En (i), (ii) y (iii) el resultado se verifica por [AZ, Th. 2.7], Propositiones 3.2.5 y 3.2.6, respectivamente. En el caso (iv),  $k \neq 0$  por Observación 3.2.3 (ii) y  $k = n$  sería considerado para  $n$  impar, pero esto fue descartado por hipótesis.  $\square$

**Teorema 3.2.12.** *Sea  $\sigma \in \mathbb{S}_{2n}$  de tipo  $(2^n)$ .*

- (a). *Si  $n$  es par entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$  para toda  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_{2n}^\sigma$ .*
- (b). *Si  $n$  es impar y  $\rho \neq \chi_{(n)} \otimes \epsilon$ ,  $\chi_{(n)} \otimes \text{sgn}$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$  para toda  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_{2n}^\sigma$ .*

Recordemos que si  $\rho = \chi_{(n)} \otimes \epsilon$  ó  $\chi_{(n)} \otimes \text{sgn}$ , entonces  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$  tiene trenza negativa por Proposición 3.2.4.

*Demostración.* Podemos asumir que  $\sigma = (1 \ 2)(3 \ 4) \cdots (2n-1 \ 2n)$ . Por las Propositiones 3.2.5 y 3.2.11, sólo se necesita considerar  $3 < n$  impar y  $\rho = \rho_{\chi_{(n)}, \mu}$ , con  $\mu$  en  $\widehat{\mathbb{S}}_n$ ,  $\mu \neq \epsilon, \text{sgn}$ . Notar que

$$\rho = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n}^{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n} (\chi_{(n)} \otimes \mu) = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n}^{(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n} (\chi_{(n)} \otimes \mu) = \chi_{(n)} \otimes \mu.$$

Se distinguen dos posibilidades, como en la demostración de 3.2.11.

(1). Supongamos que  $\rho(\alpha_l) = \text{Id} = \rho(\beta_l)$  o  $\rho(\alpha_l) = -\text{Id} = \rho(\beta_l)$ , para todo  $l$ , con  $1 \leq l \leq L$ . Entonces es fácil verificar que  $\rho(B_{2l-1}) = \pm \text{Id}$ ,  $1 \leq l \leq L$ . Ya que  $B_2, B_4, \dots, B_{2L}$  son permutaciones disjuntas se tiene que los operadores  $\rho(B_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , conmutan. Luego, existe una base de autovectores simultáneos para tales operadores. Esto dice que la representación  $\mu$  no es irreducible salvo que  $\dim V_\mu = 1$ , y por lo tanto  $\mu = \text{sgn}$ , pero esto es una contradicción por hipótesis. El caso  $\rho(\alpha_l) = -\text{Id} = \rho(\beta_l)$ ,  $1 \leq l \leq L$ , implica  $\rho(B_{2l-1}) = \text{Id}$ ,  $1 \leq l \leq L$ ; por argumentos análogos se concluye  $\mu = \epsilon$ , lo que es una contradicción por hipótesis.

(2). Si  $n \geq 7$  y  $\mu \neq \epsilon, \text{sgn}$ , entonces  $\dim V_\mu > 4$ , ver [FuHa, I.4.14]; luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma^{2n}, \rho) = \infty$ . Sólo queda el caso  $n = 5$  con las representaciones

$$\rho = \chi_{(5)} \otimes \phi, \quad \rho = \chi_{(5)} \otimes \psi,$$

donde  $\phi, \psi$  son las dos representaciones irreducibles de  $\mathbb{S}_5$  de dimensión 4, digamos  $\phi$  la representación estándar de  $\mathbb{S}_5$  y  $\psi$  su representación conjugada.

Consideremos  $\rho = \chi_{(5)} \otimes \phi$ ; tomamos  $\sigma = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5, B_j, \sigma^\pm, \alpha_l, \beta_l, \sigma_i, \sigma_j$  y  $T$  como en el caso  $n$  impar; entonces  $\mathbb{S}_{10}^\sigma = \langle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \rangle \rtimes \langle B_1, B_2, B_3, B_4 \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2)^5 \rtimes \mathbb{S}_5$  y  $T = \{\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_8\}$  que satisfacen

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= B_1 A_3 A_4 A_5, \quad \sigma_2 = \sigma B_1, \quad \sigma_3 = A_1 A_2 B_3 A_5, \quad \sigma_4 = \sigma B_3, \quad \sigma_5 = B_1 B_3 A_5, \\ \sigma_6 &= B_1 A_3 A_4 B_3 A_5, \quad \sigma_7 = A_1 A_2 B_1 B_3 A_5, \quad \sigma_8 = A_1 A_2 B_1 A_3 A_4 B_3 A_5. \end{aligned}$$

La representación estándar de  $\mathbb{S}_5$  puede ser dada por

$$\begin{aligned} \phi(1 \ 2) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \phi(2 \ 3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \phi(3 \ 4) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \phi(4 \ 5) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces es claro que

$$\begin{aligned} \rho(\sigma) &= -\text{Id}, & \rho(\sigma_1) &= \rho(\sigma_2) = -\phi(B_1), & \rho(\sigma_3) &= \rho(\sigma_4) = -\phi(B_3), \\ \rho(\sigma_5) &= \rho(\sigma_6) = \rho(\sigma_7) = \rho(\sigma_8) = -\phi(B_1)\phi(B_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si  $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, -1, 0)$ ,  $v_3 = (1, 0, 0, -2)$  y  $v_4 = (1, 1, 1, -4)$  entonces éstos son autovectores simultáneos de aquellos operadores. Así, resulta que  $\mathbf{f}^1 = \mathbf{f}^2 = (1, -1, -1, -1)$ ,  $\mathbf{f}^3 = \mathbf{f}^4 = (-1, 1, -1, -1)$  y  $\mathbf{f}^5 = \mathbf{f}^6 = \mathbf{f}^7 = \mathbf{f}^8 = (1, 1, -1, -1)$ . Luego, en la base

$$\begin{aligned} w_1 &= g_0 v_1, & w_2 &= g_0 v_2, & w_3 &= g_1 v_1 \\ w_4 &= g_1 v_2, & w_5 &= g_2 v_1, & w_6 &= g_2 v_2, \end{aligned}$$

la trenza es diagonal de tipo Cartan y la matriz  $\mathcal{Q}$  de los escalares  $(q_{a,b})_{a,b}$  es

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

el correspondiente diagrama de Dynkin es  $A_5^{(1)}$ . Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma^{10}, \rho) = \infty$ .

Finalmente, si  $\rho = \chi_{(5)} \otimes \psi$  se procede como en el caso previo usando que la representación  $\psi$  está dada por  $\psi = \text{sgn} \times \phi$ . De allí que, en la misma base anterior, la trenza resulta ser diagonal de tipo Cartan y se obtiene la misma matriz  $\mathcal{Q}$ ; luego, el resultado sigue.  $\square$

### 3.2.3. Álgebras de Nichols correspondientes a permutaciones pares puras

Sean  $r, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, n \geq 2$ . Sea  $\sigma = A_1 \cdots A_n$  en  $\mathbb{S}_{2rn}$ , donde  $A_j$  es el  $2r$ -ciclo

$$A_j = (2rj - 2r + 1 \ 2rj - 2r + 2 \ \cdots \ 2rj),$$

para todo  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Como se explicó en la Sección 3.1, se tiene que

$$\mathbb{S}_{2rn}^\sigma = \langle A_1, \dots, A_n \rangle \rtimes \langle B_1, \dots, B_{n-1} \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2r)^n \rtimes \mathbb{S}_n, \quad (3.12)$$

donde  $B_i$  es la involución

$$B_i = \left(2r(i-1) + 1 \ 2ri + 1\right) \left(2r(i-1) + 2 \ 2ri + 2\right) \cdots \left(2ri \ 2r(i+1)\right),$$

$1 \leq i \leq n-1$ . Entonces  $A_j$  y  $B_i$  satisfacen relaciones análogas a las dadas en la Subsección 3.2.2. Sea  $\rho$  una representación irreducible de  $\mathbb{S}_{2rn}^\sigma$  de la forma

$$\rho = \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2r)^n \rtimes \mathbb{S}_n^\chi}^{(\mathbb{Z}/2r)^n \rtimes \mathbb{S}_n} (\chi \otimes \mu), \quad (3.13)$$

donde  $\chi \in \widehat{(\mathbb{Z}/2r)^n}$  y  $\mu \in \widehat{\mathbb{S}_n^\chi}$ . Sea  $\omega = \exp\left(\frac{i\pi}{r}\right) \in \mathbb{G}_{2r}$  una  $2r$ -ésima raíz primitiva de la unidad; cualquier representación irreducible de  $(\mathbb{Z}/2r)^n$  es isomorfa a  $\chi_{u_1, \dots, u_n}$ , donde

$$\chi_{u_1, \dots, u_n}(A_j) = \omega^{u_j}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.14)$$

con  $0 \leq u_j \leq 2r-1$ .

**Notación:** si  $\rho$  es como en (3.13), con  $\chi$  como en (3.14), escribiremos  $\rho = \rho_{u_1, \dots, u_n, \mu}$ .

Por Lema 2.3.4, si  $\rho(\sigma) \neq -\text{Id}$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ . Luego, en lo sucesivo sólo se considerará  $\rho = \rho_{\chi_{u_1, \dots, u_n}, \mu}$  tal que  $\rho(\sigma) = -\text{Id}$ ; esto es

$$\omega^{u_1 + \dots + u_n} = -1, \quad (3.15)$$

i. e.  $u_1 + \dots + u_n = r, 3r, 5r, \dots, (2n-1)r$ .

Para cada  $(i, j)$ , con  $1 \leq i < j \leq n$ , se define

$$B_{ij} := \begin{cases} B_i & , \text{ si } |i-j| = 1, \\ B_i B_{i+1} \cdots B_{j-1} \cdots B_{i+1} B_i & , \text{ si } |i-j| > 1, \end{cases}$$

y  $\sigma_{(i,j)} := \sigma B_{ij}$ . Notamos que  $B_{ij}$  actúa como la transposición  $(i \ j)$  sobre  $A_1, \dots, A_n$  y que los  $\sigma_{(i,j)}$  están en  $\mathbb{S}_{2rn}^\sigma$ .

Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , definimos

$$g_{A_j} := \prod_{h=1}^r \left(2(j-1)r + h \ 2jr - h + 1\right). \quad (3.16)$$

Luego,  $g_{A_j}$  es una involución y satisface  $A_j^{-1} = g_{A_j} A_j g_{A_j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Ahora podemos enunciar el siguiente Lema.

**Lema 3.2.13.** *Para cada  $(i, j)$ , con  $1 \leq i < j \leq n$ , se tiene que*

- (a)  $\sigma_{(i,j)}$  está en  $\mathcal{O}$ .
- (b) existe una involución  $g_{(i,j)}$  en  $\mathbb{S}_{2rn}$  tal que  $\sigma_{(i,j)} = g_{(i,j)}\sigma g_{(i,j)}$ .
- (c) existen involuciones  $g, \tilde{g}_{(i,j)}$  en  $\mathbb{S}_{2rn}$  tales que  $\sigma^{-1} = g\sigma g$  y  $\sigma_{(i,j)}^{-1} = \tilde{g}_{(i,j)}\sigma_{(i,j)}\tilde{g}_{(i,j)}$ .

*Demostración.* Es suficiente probar esto para  $i = 1$  y  $j = 2$ .

(a) y (b). Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \sigma_{(1,2)} = \sigma B_1 = & (1 \quad 2r+2 \quad 3 \quad 2r+4 \quad 5 \cdots 4r-2 \quad 2r-1 \quad 4r) \\ & \times (2 \quad 2r+3 \quad 4 \quad 2r+5 \quad 6 \cdots 4r-1 \quad 2r \quad 2r+1) A_3 \cdots A_n, \end{aligned}$$

y que si

$$g_{(1,2)} = (2 \quad 2r+2)(4 \quad 2r+4) \cdots (2r-2 \quad 4r-2)(2r \quad 4r),$$

entonces  $g_{(1,2)}$  es una involución y  $\sigma_{(1,2)} = g_{(1,2)}\sigma g_{(1,2)} \in \mathcal{O}$ .

(c) Si definimos  $g := g_{A_1} \cdots g_{A_n}$ , ver (3.16), entonces  $g$  es involución y satisface  $\sigma^{-1} = g\sigma g$ . Finalmente, si  $r$  es par y

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{(1,2)} = & (2 \quad 4r)(4 \quad 4r-2) \cdots (2r \quad 2r+2) \\ & (3 \quad 2r-1)(5 \quad 2r-3) \cdots (r-3 \quad r+5)(r-1 \quad r+3) \\ & (2r+3 \quad 4r-1)(2r+5 \quad 4r-3) \cdots (2r+r-1 \quad 2r+r+3), \end{aligned}$$

ó si  $r$  es impar y

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{(1,2)} = & (2 \quad 4r)(4 \quad 4r-2) \cdots (2r \quad 2r+2) \\ & (3 \quad 2r-1)(5 \quad 2r-3) \cdots (r-2 \quad r+4)(r \quad r+2) \\ & (2r+3 \quad 4r-1)(2r+5 \quad 4r-3) \cdots (2r+r \quad 2r+r+2), \end{aligned}$$

entonces  $\tilde{g}_{(1,2)}$  es involución y satisface  $\sigma_{(1,2)}^{-1} = \tilde{g}_{(1,2)}\sigma_{(1,2)}\tilde{g}_{(1,2)}$ . □

Se considerarán dos casos diferentes de acuerdo al grado de  $\rho$ .

**Caso I:**  $\deg \rho > 1$ .

**Teorema 3.2.14.** *Sea  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{S}}_{2rn}^\sigma$ . Si  $\deg \rho > 1$  entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Consideremos dos posibilidades.

(A) Asumamos que existe  $(i, j)$ , con  $1 \leq i < j \leq n$ , tal que  $\rho(\sigma_{(i,j)}) \neq \pm \text{Id}$ . Para simplificar la notación, escribiremos

$$\begin{array}{llll} \sigma_1 := \sigma, & \sigma_2 := \sigma^{-1}, & \sigma_3 := \sigma_{(i,j)}, & \sigma_4 := \sigma_{(i,j)}^{-1}, \\ g_1 := \text{id}, & g_2 := g, & g_3 := g_{(i,j)}, & g_4 := \tilde{g}_{(i,j)}. \end{array}$$

Ahora se tienen las siguientes relaciones:  $\sigma_1 g_l = g_l t_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , y

$$\sigma_2 g_1 = g_1 \sigma_2, \quad \sigma_2 g_2 = g_2 \sigma_1, \quad \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_4, \quad \sigma_2 g_4 = g_4 \sigma_3, \quad (3.17)$$

$$\sigma_3 g_1 = g_1 \sigma_3, \quad \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_4, \quad \sigma_3 g_3 = g_3 \sigma_1, \quad \sigma_3 g_4 = g_4 \sigma_2, \quad (3.18)$$

$$\sigma_4 g_1 = g_1 \sigma_4, \quad \sigma_4 g_2 = g_2 \sigma_3, \quad \sigma_4 g_3 = g_3 \sigma_2, \quad \sigma_4 g_4 = g_4 \sigma_1. \quad (3.19)$$

Puesto que los elementos  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y  $\sigma_4$  conmutan entre sí entonces existe una base de  $V$  formada por autovectores simultáneos  $\{v_1, \dots, v_R\}$ ,  $V$  el espacio vectorial de la representación  $\rho$ . Luego, o bien el operador  $\rho(\sigma_{(i,j)})$  tiene al menos dos autovalores distintos o bien  $\rho(\sigma_{(i,j)}) = \lambda \text{Id}$ , con  $\lambda \neq \pm 1$ .

En el primer caso, existen  $s$  y  $s'$ ,  $1 \leq s, s' \leq R$ , tales que

$$\rho(\sigma_{(i,j)}) v_s = \lambda_s v_s \quad \text{y} \quad \rho(\sigma_{(i,j)}) v_{s'} = \lambda_{s'} v_{s'},$$

con  $\lambda_s \neq \lambda_{s'}$ ; consideremos el subespacio  $W$  de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  generado por

$$\{g_1 v_s, g_1 v_{s'}, g_2 v_s, g_2 v_{s'}, g_3 v_s, g_3 v_{s'}, g_4 v_s, g_4 v_{s'}\}. \quad (3.20)$$

Es claro que  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de tipo diagonal de  $M(\mathcal{O}, \rho)$ . Ahora bien, si  $\lambda_s^2 \neq 1$  entonces es fácil ver que su diagrama de Dynkin generalizado contiene un ciclo de la forma

$$\begin{array}{ccc} & -1 & \\ \lambda_s^2 & \bullet & \lambda_s^{-2} \\ -1 & \bullet & \bullet & -1 \\ \lambda_s^{-2} & & \lambda_s^2 & \\ & -1 & & \end{array}, \quad (3.21)$$

mientras que si  $\lambda_s^2 = 1$  entonces  $\lambda_s \lambda_{s'} \neq 1$ , esto implica que el diagrama de Dynkin generalizado contiene un ciclo de la forma

$$\begin{array}{ccc} & -1 & \\ \lambda_s \lambda_{s'} & \bullet & \lambda_s^{-1} \lambda_{s'}^{-1} \\ -1 & \bullet & \bullet & -1 \\ \lambda_s^{-1} \lambda_{s'}^{-1} & & \lambda_s \lambda_{s'} & \\ & -1 & & \end{array}.$$

Luego, en ambos casos se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.7.

En el segundo caso, tomamos cualquier  $s$ ,  $1 \leq s \leq R$ ; entonces el subespacio de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  generado por

$$\{g_1 v_s, g_2 v_s, g_3 v_s, g_4 v_s\},$$

es un subespacio vectorial trenzado de tipo diagonal de  $M(\mathcal{O}, \rho)$ , y su diagrama de Dynkin contiene un ciclo como en (3.21). Por Lema 2.3.7,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .



(B) *Asumamos que  $\rho(\sigma_{(i,j)}) = \pm \text{Id}$ , para todo  $(i,j)$ , con  $1 \leq i < j \leq n$ .* La relación  $\sigma_{(1,2)} = \sigma B_1$  da que  $\rho(B_1) = \mp \text{Id}$ ; las relaciones  $\sigma_{(1,3)} = \sigma B_1 B_2 B_1$  y  $\rho(B_1) = \pm \text{Id}$  implican que  $\rho(B_2) = \mp \text{Id}$ , y así siguiendo. Luego, los operadores  $\rho(A_1), \dots, \rho(A_n), \rho(B_1), \dots, \rho(B_{n-1})$  conmutan, y, por lo tanto, existe una base de autovectores simultáneos de  $V$  para dichos operadores. Ya que  $\deg \rho > 1$ ,  $\rho$  no sería una representación irreducible de  $\mathbb{S}_{2rn}^\sigma$ , lo cual es una contradicción por hipótesis.  $\square$

**Caso II:**  $\deg \rho = 1$ .

Sea  $v \in V - 0$ . Por (3.13),  $\deg \rho = [\mathbb{S}_n : \mathbb{S}_n^X] \deg \mu$ ; luego  $\mathbb{S}_n^X = \mathbb{S}_n$  y  $\deg \mu = 1$ . Esto implica que  $\rho = \chi_{c,\dots,c} \otimes \mu$ , para algún  $c$ , con  $0 \leq c \leq 2r - 1$ , y  $\mu = \epsilon$  ó  $\text{sgn}$ . Notar que si  $c = 0$  entonces  $\rho(\sigma) = 1$ , lo cual es una contradicción por hipótesis asumida al comienzo de la subsección. Así, podemos suponer que  $c \neq 0$ .

Comenzaremos por el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.15.** *Sea  $\rho = \chi_{c,\dots,c} \otimes \mu$ , con  $0 < c \leq 2r - 1$ .*

- (a) *Si  $r$  es impar y  $c \neq r$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*
- (b) *Si  $r$  es par y  $c \neq \frac{r}{2}, r, \frac{3r}{2}$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Sean

$$\begin{array}{llll} \sigma_1 := \sigma, & \sigma_2 := \sigma^{-1}, & \sigma_3 := A_1^{-1} A_2 \cdots A_n, & \sigma_4 := \sigma_3^{-1}, \\ g_1 := \text{id}, & g_2 := g, & g_3 := g_{A_1}, & g_4 := \sigma_2 \cdots \sigma_n, \end{array}$$

donde  $g_{A_1}$  fué definido en (3.16) y  $g$  es como en la parte (c) de la prueba de Lema 3.2.13. Es claro que se satisfacen  $\sigma_1 g_l = g_l t_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , y las relaciones (3.17), (3.18) y (3.19) como en la parte (A) de la prueba del Teorema 3.2.14. Entonces el subespacio de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  generado por  $\{g_1 v, g_2 v, g_3 v, g_4 v\}$  es trenzado de tipo diagonal cuya matriz de coeficientes  $(q_{ij})_{ij}$  está dada por

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\omega^{-2c} & -\omega^{2c} \\ -1 & -1 & -\omega^{2c} & -\omega^{-2c} \\ -\omega^{-2c} & -\omega^{2c} & -1 & -1 \\ -\omega^{2c} & -\omega^{-2c} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ya que  $c \leq 2r - 1$ , es fácil ver que  $\omega^{4c} = 1$  si y sólo si  $2c = r, 2r$  o  $3r$ . Ahora bien, resulta claro que si  $r$  es impar y  $c \neq r$ , o si  $r$  es par y  $c \neq \frac{r}{2}, r, \frac{3r}{2}$ , se tiene que  $\omega^{4c} \neq 1$ . Esto implica que el diagrama de Dynkin generalizado tiene un ciclo como en (3.21). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .  $\square$

En los casos restantes, la trenza es siempre negativa.

**Teorema 3.2.16.** *Asumamos que  $\rho(\sigma) = -1$ .*

- (a) *Si  $r$  es impar y  $\rho = \chi_{r,\dots,r} \otimes \mu$ , con  $\mu = \epsilon$  ó  $\text{sgn}$ , entonces la trenza es negativa.*
- (b) *Si  $r$  es par y  $\rho = \chi_{c,\dots,c} \otimes \mu$ , con  $c = \frac{r}{2}, r$  ó  $\frac{3r}{2}$  y  $\mu = \epsilon$  ó  $\text{sgn}$ , entonces la trenza es negativa.*

Notar que, para  $\rho$  como en (a) ó en (b),  $\rho(\sigma)$  no es necesariamente igual a  $-1$ .

Para probar este Teorema, necesitaremos dos lemas. Recordemos que  $\sigma_1 = \sigma, \dots, \sigma_N$  es una numeración de  $\mathcal{O}_\sigma$  y sean  $g_l \in \mathbb{S}_{2rn}$  tales que  $g_l \sigma g_l^{-1} = \sigma_l$ , para todo  $l, 1 \leq l \leq N$ ; elegimos  $g_1 = \text{id}$ .

Sea  $\sigma_l$  en  $\mathcal{O}_\sigma$ , tal que  $\sigma\sigma_l = \sigma_l\sigma$ , i. e.  $\sigma_l$  en  $\mathbb{S}_{2rn}^\sigma$ . Sabemos que  $\gamma_{l1} := g_1^{-1}\sigma_l g_1 = \sigma_l$  y  $\gamma_{1l} := g_l^{-1}\sigma g_l$  están en  $\mathcal{O}_\sigma \cap \mathbb{S}_{2rn}^\sigma$ . Por (3.12), podemos escribir

$$\gamma_{l1} = A_1^{d_1} \cdots A_n^{d_n} B, \quad (3.22)$$

$$\gamma_{1l} = A_1^{e_1} \cdots A_n^{e_n} B', \quad (3.23)$$

donde  $B$  y  $B'$  están en  $\langle B_1, \dots, B_{n-1} \rangle \simeq \mathbb{S}_n$ . Sea  $\Phi : \langle B_1, \dots, B_{n-1} \rangle \rightarrow \mathbb{S}_n$  el isomorfismo de grupo dado por  $\Phi(B_i) = (i \ i+1)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ .

Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , se define

$$\mathbf{A}_j := \{2rj - 2r + 1, 2rj - 2r + 2, \dots, 2rj\},$$

i. e.  $\mathbf{A}_j$  es el conjunto de números naturales que son "movidos" por  $A_j$ . También definimos

$$J := \{j : A_j B \neq B A_j\}. \quad (3.24)$$

Si  $j \notin J$  entonces  $d_j$  es coprimo con  $2r$ , porque  $A_j^{d_j}$  es un ciclo de longitud  $2r$ . Por ejemplo, si el tipo de  $\Phi(B)$  es  $(L)$ , entonces  $\text{card } J = L$ . Así, podemos escribir

$$\gamma_{l1} = \prod_{j \notin J} A_j^{d_j} \prod_{j \in J} A_j^{d_j} B, \quad (3.25)$$

y  $g_l$  puede ser elegido

$$g_l = \nu \prod_{j \notin J} \xi_{l,j}, \quad (3.26)$$

donde

- $\xi_{l,j} A_j \xi_{l,j}^{-1} = A_j^{d_j}$ , para todo  $j \notin J$ ,
- si  $j \notin J$  y  $j' \neq j$ , entonces todo elemento de  $\mathbf{A}_{j'}$  queda fijo por  $\xi_{l,j}$ ,
- $\nu$  es tal que todo elemento de  $\mathbf{A}_j$ , con  $j \notin J$ , queda fijo por  $\nu$ , y

$$\nu \prod_{j \in J} A_j \nu^{-1} = \prod_{j \in J} A_j^{d_j} B. \quad (3.27)$$

**Lema 3.2.17.**  $\Phi(B)$  y  $\Phi(B')$  tienen el mismo tipo en  $\mathbb{S}_n$ .

*Demostración.* Consideraremos distintos casos de acuerdo al tipo de  $\Phi(B)$  en  $\mathbb{S}_n$ .

Si el tipo de  $\Phi(B)$  es  $(1^{2rn})$ ; esto quiere decir  $B = \text{id}$ . Se tiene que  $J = \emptyset$ ; luego, podemos elegir  $g_l = \xi_{l,1} \cdots \xi_{l,n}$ . Entonces

$$\gamma_{l1} = g_l^{-1} \sigma g_l = \xi_{l,1}^{-1} A_1 \xi_{l,1} \cdots \xi_{l,n}^{-1} A_n \xi_{l,n},$$

y puesto que  $\gamma_{l1}$  está en  $\mathcal{O}_\sigma$ , i. e. es un producto de ciclos disjuntos de longitud  $2r$ , tenemos que  $\xi_{l,j}^{-1} A_j \xi_{l,j}$  es un ciclo de longitud  $2r$ , para todo  $j$ . Esto implica que

$$\gamma_{l1} = A_1^{e_1} \cdots A_n^{e_n},$$

con  $e_1, \dots, e_n$  coprimos con  $2r$ ; lo cual dice que  $B' = \text{id}$ .

Si el tipo de  $\Phi(B)$  es (2). Es suficiente hacer la prueba para el caso en que  $B = B_i$  para algún  $i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . Luego,  $J = \{i, i+1\}$ . Así, si  $j \neq i, i+1$ , entonces  $d_j$  es coprimo con  $2r$  y  $g_l$  puede elegido como en (3.26), i. e.

$$g_l = \nu \prod_{j \neq i, i+1} \xi_{l,j},$$

donde  $\nu$  satisface  $\nu A_i A_{i+1} \nu^{-1} = A_i^{d_i} A_{i+1}^{d_{i+1}} B$ , y si  $j \neq i, i+1$  entonces los elementos de  $\mathbf{A}_j$  quedan fijos por  $\nu$ . Luego,

$$\gamma_{1l} = g_l^{-1} \sigma g_l = \left( \prod_{j \neq i, i+1} \xi_{l,j}^{-1} A_j \xi_{l,j} \right) \nu^{-1} A_i A_{i+1} \nu = \left( \prod_{j \neq i, i+1} A_j^{e_j} \right) A_i^{e_i} A_{i+1}^{e_{i+1}} B',$$

con  $e_j$  coprimo con  $2r$ , si  $j \neq i, i+1$ . Esto implica que el tipo de  $\Phi(B')$  es  $(h_1^{b_1}, \dots, h_K^{b_K})$  con

$$b_1 h_1 + \dots + b_K h_K \leq 2.$$

Entonces el tipo de  $\Phi(B')$  es (1) ó (2); si es (1) se tiene que  $B' = \text{id}$ , entonces  $B = \text{id}$ , por el primer caso, esto es una contradicción. Luego, el tipo de  $\Phi(B')$  es (2).

Notar que si el tipo de  $\Phi(B)$  es  $(2^a)$  entonces lo mismo ocurre para  $\Phi(B')$ , repitiendo el argumento previo en cada transposición disjunta que aparece en la descomposición de  $\Phi(B)$  como producto de permutaciones disjuntas de  $\mathbb{S}_n$ .

En general, podemos probar con el mismo argumento que si el resultado es cierto para cuando el tipo de  $\Phi(B)$  es  $(L_1)$  y  $(L_2)$  entonces el resultado es también cierto si el tipo de  $\Phi(B)$  es  $(L_1^2)$ , con  $L_1 = L_2$ , ó  $(L_1, L_2)$ , con  $L_1 \neq L_2$ .

Sea  $\Phi(B)$  de tipo  $(L)$ . Usaremos inducción en  $L$  y el párrafo previo para probar que el tipo de  $\Phi(B')$  es  $(L)$ . Explícitamente, asumamos que existe  $L > 2$  tal que para todo  $h < L$  vale lo siguiente: si el tipo de  $\Phi(B)$  es  $(h)$ , entonces el tipo de  $\Phi(B')$  es  $(h)$ . Supongamos que el tipo de  $\Phi(B)$  es  $(h_1^{b_1}, \dots, h_K^{b_K})$ . Se procede como en el caso  $L = 2$ . Podemos elegir  $g_l$  como en (3.26), con  $\nu$  que satisface (3.27), y si  $j \notin J$  entonces los elementos de  $\mathbf{A}_j$  quedan fijos por  $\nu$ . Luego,

$$\gamma_{1l} = g_l^{-1} \sigma g_l = \left( \prod_{j \notin J} \xi_{l,j}^{-1} A_j \xi_{l,j} \right) \left( \nu^{-1} \prod_{j \in J} A_j \nu \right) = \prod_{j \notin J} A_j^{e_j} \prod_{j \in J} A_j^{e_j} B',$$

con  $e_j$  coprimos con  $2r$  si  $j \notin J$ , porque  $\gamma_{1l}$  está en  $\mathcal{O}_\sigma$ . Esto implica que

$$b_1 h_1 + \dots + b_K h_K \leq L.$$

Si  $b_1 h_1 + \dots + b_K h_K < L$  ó si  $b_1 h_1 + \dots + b_K h_K = L$  con  $K > 1$ , entonces  $h_1, \dots, h_K < L$ , y por hipótesis inductiva y el párrafo previo se tiene que el tipo de  $\Phi(B)$  es  $(h_1^{b_1}, \dots, h_K^{b_K}) \neq (L)$ , lo cual es una contradicción. Así, el tipo de  $\Phi(B')$  es  $(h_1)^{b_1}$ , con  $b_1 h_1 = L$ ; si  $b_1 > 1$  usamos hipótesis inductiva y el párrafo anterior para decir que el tipo de  $\Phi(B)$  es  $(h_1^{b_1}) \neq (L)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $b_1 = 1$  y  $h_1 = L$ , lo que quiere decir que el tipo de  $\Phi(B') = (L)$ , y esto concluye la demostración.  $\square$

**Lema 3.2.18.** Sean  $\gamma_{1l}$  y  $\gamma_{ll}$  como en (3.22) y (3.23), respectivamente.

- (a) Para cualquier  $r$  si  $n$  es impar, entonces  $\sum_{j=1}^n (e_j + d_j)$  es par.  
(b) Si  $r$  es par y  $n$  es par, entonces  $\sum_{j=1}^n (e_j + d_j) \equiv 0 \pmod{4}$ .

*Demostración.* (a) Si  $n$  es impar se tiene que el signo de  $\sigma$  en  $\mathbb{S}_{2rn}$  es

$$\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} A_1 \cdots \operatorname{sgn} A_n = (-1)^n = -1,$$

porque  $A_1, \dots, A_n$  son ciclos de longitud par. Como  $\gamma_{11} \in \mathcal{O}_\sigma$  se tiene que  $\operatorname{sgn} \gamma_{11} = -1$ , por otro lado

$$\operatorname{sgn} \gamma_{11} = \operatorname{sgn} A_1^{d_1} \cdots \operatorname{sgn} A_n^{d_n} \operatorname{sgn} B = (-1)^{d_1 + \cdots + d_n},$$

porque  $B \in \langle B_1, \dots, B_{n-1} \rangle$  y cada  $B_1, \dots, B_{n-1}$  es a producto de una cantidad par de transposiciones en  $\mathbb{S}_{2rn}$ . Entonces  $d_1 + \cdots + d_n$  es impar. Análogamente,  $e_1 + \cdots + e_n$  es impar. Entonces el resultado sigue.

(b) Asumamos que  $n$  es par. En este caso el signo de  $\sigma$  en  $\mathbb{S}_{2rn}$  es 1; puesto que  $\gamma_{11}$  y  $\gamma_{1l}$  están en  $\mathcal{O}_\sigma$ ,  $d_1 + \cdots + d_n$  y  $e_1 + \cdots + e_n$  son pares. Supongamos que la descomposición de  $\Phi(B)$  como producto de permutaciones disjuntas en  $\mathbb{S}_n$  es

$$\Phi(B) = \tau_1 \cdots \tau_K. \quad (3.28)$$

Por Lema 3.2.17, se obtiene que la descomposición de  $\Phi(B')$  como producto de permutaciones disjuntas en  $\mathbb{S}_n$  es

$$\Phi(B') = \tau'_1 \cdots \tau'_K.$$

Así,  $|\tau_k| = |\tau'_k|$ , para todo  $k$ , y  $|B| = \operatorname{lcm}(|\tau_1|, \dots, |\tau_K|) = |B'|$ , donde  $\operatorname{lcm}$  denota el mínimo común múltiplo.

Para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$ , se define

$$J_k := \{j : 1 \leq j \leq n \text{ y } A_j \Phi^{-1}(\tau_k) \neq \Phi^{-1}(\tau_k) A_j\}. \quad (3.29)$$

Claramente,  $\operatorname{card} J_k = |\tau_k|$ , para todo  $k$ . Notar que  $J_1, \dots, J_K$  son conjuntos disjuntos y si  $J$  es como en (3.24) entonces  $J = J_1 \cup \cdots \cup J_K$ . Además, es claro que

$$J_k = \{j : 1 \leq j \leq n \text{ y } A_j \Phi^{-1}(\tau'_k) \neq \Phi^{-1}(\tau'_k) A_j\}.$$

por Lema 3.2.17. Escribimos  $\gamma_{11}$  como en (3.25) de una manera más precisa

$$\gamma_{11} = g_l \sigma g_l^{-1} = \prod_{j \notin J} A_j^{d_j} \prod_{j \in J_1} A_j^{d_j} \cdots \prod_{j \in J_K} A_j^{d_j} \quad B,$$

y  $g_l$  puede ser elegido como en (3.26)

$$g_l = \nu_1 \cdots \nu_K \prod_{j \notin J} \xi_{l,j},$$

donde

$$\nu_k \prod_{j \in J_k} A_j \nu_k^{-1} = \prod_{j \in J_k} A_j^{d_j} \Phi^{-1}(\tau_k), \quad (3.30)$$

y si  $j \notin J_k$  todo elemento de  $\mathbf{A}_j$  queda fijo por  $\nu_k$ ; esto permite decir que si  $j \notin J_k$  entonces  $A_j$  y  $\nu_k$  conmutan. Luego, si  $\gamma_{1l}$  es como en (3.23) entonces

$$\gamma_{1l} = g_l^{-1} \sigma g_l = \prod_{j \notin J} A_j^{e_j} \prod_{j \in J_1} A_j^{e_j} \cdots \prod_{j \in J_K} A_j^{e_j} \quad B',$$

con

$$\prod_{j \in J_k} A_j^{e_j} \Phi^{-1}(\tau'_k) = \nu_k^{-1} \prod_{j \in J_k} A_j \nu_k. \quad (3.31)$$

Puesto que  $|\gamma_{11}| = 2r$ ,  $B^{2r} = \text{id}$ ; esto implica que  $|B|$  divide a  $2r$ , digamos  $2r = |B|q$ , con  $q \geq 1$ . Se puede probar en forma directa que

$$\left( \prod_{j \in J} A_j^{d_j} B \right)^{h|B|} = \left( \prod_{j \in J_1} A_j \right)^{h \frac{|B|}{|\tau_1|} \sum_{j \in J_1} d_j} \cdots \left( \prod_{j \in J_K} A_j \right)^{h \frac{|B|}{|\tau_K|} \sum_{j \in J_K} d_j}, \quad (3.32)$$

para todo  $h \geq 0$ . En particular, cuando  $h = q$ , ambos lados resultan iguales a  $\text{id}$  y esto implica que

$$\left( \prod_{j \in J_k} A_j \right)^{q \frac{|B|}{|\tau_k|} \sum_{j \in J_k} d_j} = \text{id},$$

para todo  $k$ . Como el orden de  $\prod_{j \in J_k} A_j$  es  $2r$  tenemos que  $|\tau_k|$  divide a  $\sum_{j \in J_k} d_j$ . Análogamente, podemos probar que  $|\tau'_k|$  divide a  $\sum_{j \in J_k} e_j$ , para todo  $k$ . Luego, para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$ , existen  $p_k, p'_k \geq 1$  tales que

$$\sum_{j \in J_k} d_j = |\tau_k| p_k \quad \text{y} \quad \sum_{j \in J_k} e_j = |\tau_k| p'_k. \quad (3.33)$$

Por (3.30), (3.31) y (3.32), para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \left( \prod_{j \in J_k} A_j \right)^{h|B|} &= \nu_k^{-1} \nu_k \left( \prod_{j \in J_k} A_j \right)^{h|B|} \nu_k^{-1} \nu_k = \nu_k^{-1} \left( \nu_k \prod_{j \in J_k} A_j \nu_k^{-1} \right)^{h|B|} \nu_k \\ &= \nu_k^{-1} \left( \prod_{j \in J_k} A_j^{d_j} \Phi^{-1}(\tau_k) \right)^{h|B|} \nu_k = \nu_k^{-1} \left( \prod_{j \in J_k} A_j \right)^{h|B| p_k} \nu_k \\ &= \left( \nu_k^{-1} \prod_{j \in J_k} A_j \nu_k \right)^{h|B| p_k} = \left( \prod_{j \in J_k} A_j^{e_j} \Phi^{-1}(\tau'_k) \right)^{h|B| p_k} \\ &= \left( \prod_{j \in J_k} A_j \right)^{h|B| p_k p'_k}, \end{aligned}$$

para todo  $h \geq 0$ . En particular, para  $h = 1$  esto implica que  $2r$  divide a  $|B| p_k p'_k - |B|$ . Como  $2r = |B|q$ , se tiene que  $q$  divide a  $p_k p'_k - 1$ , para todo  $k$ ; digamos que para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$ , existe  $x_k \geq 1$  tal que

$$p_k p'_k - 1 = q x_k. \quad (3.34)$$

Por un argumento similar al del párrafo anterior, podemos mostrar que

$$\left( \prod_{j \in J_k} A_j \right)^{h|\tau_k|} = \left( \prod_{j \in J_k} A_j \right)^{h|\tau_k|p_k p'_k}, \quad (3.35)$$

para todo  $h \geq 0$ . Para  $h = 1$ , esto dice que  $2r$  divide a  $|\tau_k|p_k p'_k - |\tau_k|$ . Usando (3.34) y que  $|B| = |\tau_k|y_k$ , para algún  $y_k \geq 1$ , tenemos que  $y_k$  divide a  $x_k$ , para cada  $k$ , digamos  $x_k = y_k z_k$ , para algún  $z_k \geq 1$ . Consecuentemente,

$$|\tau_k|p_k p'_k - |\tau_k| = |\tau_k|q y_k z_k = |B|q z_k = 2r z_k.$$

Ya que  $r$  es par resulta que  $|\tau_k|p_k p'_k \equiv |\tau_k| \pmod{4}$ ; esto quiere decir que

$$p'_k \sum_{j \in J_k} d_j \equiv |\tau_k| \pmod{4} \quad \text{y} \quad p_k \sum_{j \in J_k} e_j \equiv |\tau_k| \pmod{4}. \quad (3.36)$$

Claramente,

$$\left( \sum_{j \in J_k} d_j \right) \left( \sum_{j \in J_k} e_j \right) \equiv |\tau_k|^2 \pmod{4}. \quad (3.37)$$

Usando (3.33), (3.36), (3.37) y que  $|\tau_k|^2 \equiv 0$  ó  $1 \pmod{4}$  se concluye que

$$\sum_{j \in J_k} d_j \equiv \sum_{j \in J_k} e_j \pmod{4}, \quad (3.38)$$

para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$ . Más aún, si  $|\tau_k|^2 \equiv 0 \pmod{4}$ , entonces

$$\sum_{j \in J_k} d_j \equiv 0 \equiv \sum_{j \in J_k} e_j \pmod{4} \quad \text{ó} \quad \sum_{j \in J_k} d_j \equiv 2 \equiv \sum_{j \in J_k} e_j \pmod{4}, \quad (3.39)$$

y si  $|\tau_k|^2 \equiv 1 \pmod{4}$ , entonces

$$\sum_{j \in J_k} d_j \equiv 1 \equiv \sum_{j \in J_k} e_j \pmod{4} \quad \text{ó} \quad \sum_{j \in J_k} d_j \equiv 3 \equiv \sum_{j \in J_k} e_j \pmod{4}. \quad (3.40)$$

Para  $h = 0, 1, 2$  y  $3$ , se define

$$\mathcal{K}_h := \{k : 1 \leq k \leq K \text{ y } |\tau_k| \equiv h \pmod{4}\}.$$

Por (3.39), es claro que

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_2} \sum_{j \in J_k} (e_j + d_j) \equiv 0 \pmod{4}, \quad (3.41)$$

mientras que por (3.40), se tiene que

$$\sum_{j \in J_k} (e_j + d_j) \equiv 2 \pmod{4}, \quad \text{para todo } k \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3. \quad (3.42)$$

Además, si  $j \notin J$  entonces  $d_j$  y  $e_j$  son coprimos con  $2r$  y es fácil ver que

$$A_j = \xi_{l,j}^{-1} \xi_{l,j} A_j \xi_{l,j}^{-1} \xi_{l,j} = \xi_{l,j}^{-1} A_j^{d_j} \xi_{l,j} = (\xi_{l,j}^{-1} A_j \xi_{l,j})^{d_j} = A_j^{e_j d_j};$$

esto implica que  $2r$  divide a  $e_j d_j - 1$ , y puesto que  $r$  es par se tiene que  $e_j d_j \equiv 1 \pmod{4}$ . Utilizando esto último y que  $d_j$  y  $e_j$  son impares para  $j \notin J$ , se puede probar que

$$e_j + d_j \equiv 2 \pmod{4}, \quad \text{para todo } j \notin J. \quad (3.43)$$

Por otro lado, dado que  $\text{card } J_k = |\tau_k|$  entonces  $\sum_{k \in \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_2} \text{card } J_k$  es par. Además, ya que

$$n = \text{card } J^c + \sum_{k \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3} \text{card } J_k + \sum_{k \in \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_2} \text{card } J_k$$

es par por hipótesis, entonces  $\text{card } J^c + \sum_{k \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3} \text{card } J_k$  es par. Luego, es fácil verificar que

$$a := \text{card } J^c + \text{card}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3) \quad \text{es par.} \quad (3.44)$$

Ahora bien, por (3.41), (3.42) y (3.43), tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (e_j + d_j) &= \sum_{j \in J^c} (e_j + d_j) + \sum_{k \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3} \sum_{j \in J_k} (e_j + d_j) + \sum_{k \in \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_2} \sum_{j \in J_k} (e_j + d_j) \\ &\equiv 2 \text{card } J^c + 2 \text{card}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3) \pmod{4}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\sum_{j=1}^n (e_j + d_j) \equiv 2a \equiv 0 \pmod{4}, \quad (3.45)$$

por (3.44). Esto concluye la prueba.  $\square$

*Demostración de Teorema 3.2.16.*

Como en la Sección 2.2, fijamos una numeración  $\sigma_1 = \sigma, \dots, \sigma_N$  de  $\mathcal{O}_\sigma$  y  $g_k \in G$  tales que  $g_k \triangleright \sigma = \sigma_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Recordamos que para  $1 \leq k, l \leq N$  se definió  $\gamma_{k,l} := g_l^{-1} \sigma_k g_l$  – ver (2.11).

Sea  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_{2rn}^\sigma$  como en (a) ó (b) del enunciado del Teorema. Puesto que  $\deg \rho = 1$ , para probar que  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$  es negativo tenemos que ver

- (i)  $\rho(\gamma_{kk}) = -1$  para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ .
- (ii)' para todo  $\sigma_l \in \mathcal{O}_\sigma \cap G^\sigma$ , se cumple que  $\rho(\gamma_{1,l} \gamma_{l,1}) = 1$ .

por Observación 2.2.2 y Lema 2.2.3. La condición (i) se cumple trivialmente, ya que  $\gamma_{kk} = \sigma$ , para todo  $1 \leq k \leq N$ , y  $\rho(\sigma) = -1$ , por hipótesis.

Probaremos (ii)'. Sea  $\sigma_l \in \mathcal{O}_\sigma \cap \mathbb{S}_{2rn}^\sigma$ . Luego,  $\gamma_{1l} = g_l^{-1} \sigma_l g_l = \sigma_l$  y  $\gamma_{l1} = g_l^{-1} \sigma g_l$  pertenecen a  $\mathbb{S}_{2rn}^\sigma$ , y supongamos que están dadas por (3.22) y (3.23), respectivamente.

Consideraremos dos casos.

- Asumamos que  $\rho = \chi_{r,\dots,r} \otimes \mu$ , con  $\mu = \epsilon$  ó  $\text{sgn}$ . Ya que  $\rho(\sigma) = -1$  y  $\rho(\sigma) = \omega^m$ , con  $\omega = \exp(\frac{i\pi}{r})$ , se tiene que  $n$  debe ser impar. Entonces

$$\begin{aligned} q_{1l}q_{l1} &= (\chi_{r,\dots,r} \otimes \mu)(\gamma_{1l}\gamma_{l1}) = (\chi_{r,\dots,r} \otimes \mu)(\gamma_{1l}) (\chi_{r,\dots,r} \otimes \mu)(\gamma_{l1}) \\ &= \omega^r \sum_{j=1}^n e_j + d_j \mu(B')\mu(B) = (-1)^{\sum_{j=1}^n e_j + d_j} = 1, \end{aligned}$$

por Lema 3.2.17 y Lema 3.2.18 (a).

- Asumamos que  $r$  es par y  $\rho = \chi_{c,\dots,c} \otimes \mu$ , con  $c = \frac{r}{2}$  ó  $\frac{3r}{2}$ , y  $\mu = \epsilon$  ó  $\text{sgn}$ . La condición  $\rho(\sigma) = -1$  implica que  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ; en particular  $n$  es par. Por Lema 3.2.17 y Lema 3.2.18 (b), podemos decir que

$$\begin{aligned} q_{1l}q_{l1} &= (\chi_{c,\dots,c} \otimes \mu)(\gamma_{1l}\gamma_{l1}) = (\chi_{c,\dots,c} \otimes \mu)(\gamma_{1l}) (\chi_{c,\dots,c} \otimes \mu)(\gamma_{l1}) \\ &= \omega^c \sum_{j=1}^n e_j + d_j \mu(B')\mu(B) = (\pm i)^{\sum_{j=1}^n e_j + d_j} = 1. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

El próximo resultado da condiciones necesarias acerca de los parámetros  $t_{l,j}$ ,  $1 \leq l \leq n_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , ver (3.5), para que  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$  tenga dimensión finita.

**Lema 3.2.19.** *Sea  $m \geq 3$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ . Si existen  $j, l$ , con  $1 \leq j \leq m$  y  $1 \leq l \leq n_j$ , tales que  $\omega_j^{4t_{l,j}} \neq 1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Notar que  $j \neq 1, 2$ . Sea  $N = \sum_{j \geq 3} n_j$ . Consideramos los dos casos posibles.

(a) Asumamos que  $N = 1$ . En este caso, el tipo de  $\sigma$  es  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, j)$ . Luego,  $\rho_j = \chi_{t_j}$ , para algún  $t_j$ ,  $0 < t_j \leq j - 1$ , y  $q_{\sigma\sigma} = \pm \omega_j^{t_j} \neq \pm 1$ , por hipótesis. Ahora el resultado sigue del Lema 2.3.4.

(b) Asumamos que  $N > 1$ . Por Lema 2.3.4, podemos suponer que  $q_{\sigma\sigma} = -1$ . Luego, existe  $v \in V - 0$  tal que  $\rho(A_{l,j})v = \omega_j^{t_{l,j}}v$ . Definimos  $\sigma_1 := \sigma$ ,  $\sigma_2 := \sigma A_{l,j}^{-2}$ ,  $\sigma_3 := \sigma_2^{-1}$  y  $\sigma_4 := \sigma^{-1}$ ; claramente, estos son cuatro elementos distintos. Sea  $\tau = (i_1 i_2 \cdots i_j)$  un  $j$ -ciclo. Definimos

$$g_\tau := \begin{cases} (i_2 i_j)(i_3 i_{j-1}) \cdots (i_l i_{l+2}) & , \text{ si } j = 2l \text{ es par,} \\ (i_2 i_j)(i_3 i_{j-1}) \cdots (i_{l+1} i_{l+2}) & , \text{ si } j = 2l + 1 \text{ es impar.} \end{cases} \quad (3.46)$$

Luego,  $g_\tau$  es una involución tal que  $\tau^{-1} = g_\tau \tau g_\tau$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,  $g_2 := g_{A_{l,j}}$ , ver (3.46),  $g_4 := g_2 g_3$  y

$$g_3 := \prod_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq h \leq n_k}} g_{A_{h,k}} \cdot \prod_{\substack{1 \leq h \leq n_j \\ h \neq l}} g_{A_{h,j}}.$$

Entonces  $\sigma_r = g_r \sigma g_r^{-1}$ ,  $r = 1, 2, 3, 4$ , y se tienen las siguientes relaciones

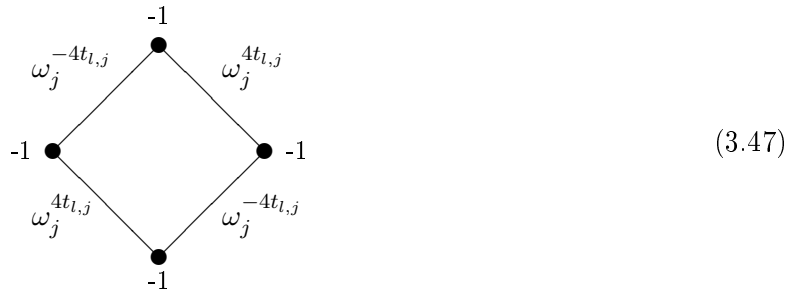
$$\begin{array}{llll} \sigma_1 g_1 = g_1 \sigma_1, & \sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_2, & \sigma_1 g_3 = g_3 \sigma_3, & \sigma_1 g_4 = g_4 \sigma_4, \\ \sigma_2 g_1 = g_1 \sigma_2, & \sigma_2 g_2 = g_2 \sigma_1, & \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_4, & \sigma_2 g_4 = g_4 \sigma_3, \\ \sigma_3 g_1 = g_1 \sigma_3, & \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_4, & \sigma_3 g_3 = g_3 \sigma_1, & \sigma_3 g_4 = g_4 \sigma_2, \\ \sigma_4 g_1 = g_1 \sigma_4, & \sigma_4 g_2 = g_2 \sigma_3, & \sigma_4 g_3 = g_3 \sigma_2, & \sigma_4 g_4 = g_4 \sigma_1. \end{array}$$



Es fácil ver que  $W := \mathbb{C}\text{-span}\{g_1v, g_2v, g_3v, g_4v\}$  es un subespacio vectorial trenzado de tipo diagonal de  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$ , con matriz de trenza

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & \omega_j^{2t_{l,j}} & \omega_j^{-2t_{l,j}} & -1 \\ \omega_j^{2t_{l,j}} & -1 & -1 & \omega_j^{-2t_{l,j}} \\ \omega_j^{-2t_{l,j}} & -1 & -1 & \omega_j^{2t_{l,j}} \\ -1 & \omega_j^{-2t_{l,j}} & \omega_j^{2t_{l,j}} & -1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que  $\omega_j^{4t_{l,j}} \neq 1$ , el diagrama de Dynkin generalizado es de la forma dada por (3.47). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.7.  $\square$



*Observación 3.2.20.* El lema anterior implica que si  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_s, \rho) < \infty$ , con  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ , entonces los escalares  $q_e$  y  $q_o$  dados en la Observación 3.1.1 deben ser  $q_o = 1$  y  $q_e = -1$ ; más aún, para todo  $j$  impar debe ocurrir que  $t_{l,j} = 0$ , para todo  $l$ , con  $1 \leq l \leq n_j$ .

### 3.3. Usando técnicas basadas en subracks no abelianos

En esta subsección, aplicamos los criterios de los subracks no abelianos  $\mathcal{D}_p$ ,  $p$  primo impar, y  $\mathfrak{D}$ , desarrollados en la Sección 2.4.

#### 3.3.1. Criterios $\mathcal{D}_p$

**Proposición 3.3.1.** *Sea  $m \geq 6$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ . Si existe  $j$ , con  $1 \leq j \leq m$ , tal que*

- $2p$  divide a  $j$ , para algún primo impar  $p$ , y
- $n_j \geq 1$ ;

entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

Antes de probar esta proposición, mostraremos el siguiente lema, en el que  $p > 1$  es un entero cualquiera.

**Lema 3.3.2.** *Sean  $m, p \in \mathbb{Z}_{>1}$ . Sea  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$  y  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$ . Si existe  $j$ , con  $4 \leq j \leq m$ , tal que*

- $2p$  divide a  $j$ , y
- $n_j \geq 1$ ;

entonces  $\mathcal{O}$  contiene un subrack de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$ .

*Demostración.* Sea  $j = 2p\kappa$ , con  $\kappa \geq 1$ . Sea  $\alpha = (i_1 i_2 \cdots i_j)$  un  $j$ -ciclo que aparece en la descomposición de  $\sigma$  como producto de ciclos disjuntos y definimos

$$\mathbf{I} := (i_1 i_3 i_5 \cdots i_{j-1}) \quad \text{and} \quad \mathbf{P} := (i_2 i_4 i_6 \cdots i_j).$$

Afirmamos que

- (a)  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{P}$  son  $p\kappa$ -ciclos disjuntos,
- (b)  $\alpha^2 = \mathbf{I}\mathbf{P}$ ,
- (c)  $\alpha\mathbf{I}\alpha^{-1} = \mathbf{P}$ , (y entonces  $\sigma\mathbf{I}\sigma^{-1} = \mathbf{P}$ ),
- (d)  $\mathbf{P}^t\alpha\mathbf{P}^t = \alpha^{2t+1}$ ,  $\mathbf{P}^t\alpha^{-1}\mathbf{P}^t = \alpha^{2t-1}$ , para cualquier entero  $t$ .

Los primeros dos ítems son claros. (c) sigue de la fórmula bien conocida  $\alpha(l_1 l_2 \dots l_k)\alpha^{-1} = (\alpha(l_1) \alpha(l_2) \dots \alpha(l_k))$ . (d). Por (c), se tiene que  $\mathbf{P}^t = \alpha\mathbf{I}^t\alpha^{-1}$ ; esto implica que  $\mathbf{P}^t\alpha\mathbf{P}^t = \alpha\mathbf{I}^t\mathbf{P}^t$ ; ahora por (b),  $\mathbf{P}^t\alpha\mathbf{P}^t = \alpha\alpha^{2t}$ , como queríamos probar.

Definimos

$$\sigma_i := \mathbf{P}^{i\kappa}\sigma\mathbf{P}^{-i\kappa}, \quad 0 \leq i \leq p-1. \quad (3.48)$$

Notar que  $\sigma_i = \mathbf{P}^{i\kappa}\alpha\mathbf{P}^{-i\kappa}\tilde{\sigma}$ , donde  $\tilde{\sigma} := \alpha^{-1}\sigma$ . Los elementos  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  son todos distintos; en efecto, si  $\sigma_i = \sigma_l$ , con  $i, l \in \mathbb{Z}/p$ , entonces  $\mathbf{P}^{i\kappa}\sigma\mathbf{P}^{-i\kappa} = \mathbf{P}^{l\kappa}\sigma\mathbf{P}^{-l\kappa}$ , i. e.  $\mathbf{P}^{(i-l)\kappa}\sigma\mathbf{P}^{-(i-l)\kappa} = \sigma$ , lo cual implica que  $i_2 = \sigma(i_1) = \mathbf{P}^{(i-l)\kappa}\sigma\mathbf{P}^{-(i-l)\kappa}(i_1) = \mathbf{P}^{(i-l)\kappa}(i_2) = i_{2(i-l)\kappa+2}$ ; luego,  $2(i-l)\kappa = 0$  en  $\mathbb{Z}/j$ . Por lo tanto  $i = l$ .

Afirmamos que  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  es de tipo  $\mathcal{D}_p$ . Si  $i, l \in \mathbb{Z}/p$ , entonces

$$\begin{aligned} \sigma_i \triangleright \sigma_l &= \mathbf{P}^{i\kappa}\sigma\mathbf{P}^{-i\kappa} \mathbf{P}^{l\kappa}\sigma\mathbf{P}^{-l\kappa} \mathbf{P}^{i\kappa}\sigma^{-1}\mathbf{P}^{-i\kappa} \\ &= \mathbf{P}^{i\kappa}\alpha\mathbf{P}^{-i\kappa} \mathbf{P}^{l\kappa}\alpha\mathbf{P}^{-l\kappa} \mathbf{P}^{i\kappa}\alpha^{-1}\mathbf{P}^{-i\kappa}\tilde{\sigma} \\ &= \mathbf{P}^{(2i-l)\kappa}\mathbf{P}^{(l-i)\kappa}\alpha\mathbf{P}^{(l-i)\kappa}\alpha\mathbf{P}^{(i-l)\kappa}\alpha^{-1}\mathbf{P}^{(i-l)\kappa}\mathbf{P}^{-(2i-l)\kappa}\tilde{\sigma} \\ &= \mathbf{P}^{(2i-l)\kappa}\alpha^{2(l-i)\kappa+1}\alpha\alpha^{2(i-l)\kappa-1}\mathbf{P}^{-(2i-l)\kappa}\tilde{\sigma} \\ &= \mathbf{P}^{(2i-l)\kappa}\alpha\mathbf{P}^{-(2i-l)\kappa}\tilde{\sigma} = \mathbf{P}^{(2i-l)\kappa}\sigma\mathbf{P}^{-(2i-l)\kappa} = \sigma_{i \triangleright l}, \end{aligned}$$

por (d). Esto prueba la afirmación. Finalmente,  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p} \cup (\sigma_i^{-1})_{i \in \mathbb{Z}/p}$  es una familia de type  $\mathcal{D}_p^{(2)}$  - usar (2.17) y que  $j \neq 4$  para ver que  $\sigma_i \neq \sigma_j^{-1}$ , para todo  $i, j$ .  $\square$

*Prueba de la Proposición 3.3.1.* Por Lema 2.3.4, podemos asumir que  $q_{\sigma\sigma} = -1$ . Por Lema 3.3.2, se tiene una familia  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/p}$  de tipo  $\mathcal{D}_p$ , con  $\sigma_0 = \sigma$ . Ahora aplicamos el Corolario 2.4.10, con  $\mu_0 = \sigma_0$ ,  $k = |\sigma_0| - 1$ . Luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .  $\square$

La siguiente proposición es una notable aplicación del criterio  $\mathcal{D}_3$ .

**Proposición 3.3.3.** *Sea  $m \geq 6$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ . Si existe  $j$ , con  $1 \leq j \leq m$ , tal que  $j = 2k$ , con  $k \geq 2$  y  $n_j \geq 3$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Notar que  $\sigma$  tiene orden par. Si  $q_{\sigma\sigma} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Supongamos que  $q_{\sigma\sigma} = -1$ . Sean

$$\alpha_1 = (i_1 i_2 \cdots i_j), \quad \alpha_2 = (i_{j+1} i_{j+2} \cdots i_{2j}), \quad \alpha_3 = (i_{2j+1} i_{2j+2} \cdots i_{3j}),$$

tres  $j$ -ciclos que aparecen en la descomposición de  $\sigma$  como producto de ciclos disjuntos y definimos

$$\mathbf{I} := (i_1 i_3 \cdots i_{3j-1}), \quad \mathbf{P} := (i_2 i_4 \cdots i_{3j}).$$

También definimos  $B_1 := (i_1 i_{j+1})(i_2 i_{j+2}) \cdots (i_j i_{2j})$  y  $B_2 := (i_{j+1} i_{2j+1})(i_{j+2} i_{2j+2}) \cdots (i_{2j} i_{3j})$ . Se tiene que

- (a)  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{P}$  son  $3k$ -ciclos disjuntos,
- (b)  $\mathbf{I}^k \mathbf{P}^k = B_1 B_2$ ,
- (c)  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \mathbf{I} \alpha_3^{-1} \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} = \mathbf{P}$ , (y, por ende,  $\sigma \mathbf{I} \sigma^{-1} = \mathbf{P}$ ),
- (d)  $\mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^k = \sigma B_1 B_2$ , y
- (e)  $\mathbf{P}^{-k} \sigma \mathbf{P}^{-k} = \sigma B_2 B_1$ .

La primera es clara. Para ver (b) notar que

$$B_1 B_2 = (i_1 i_{j+1} i_{2j+1})(i_2 i_{j+2} i_{2j+2}) \cdots (i_j i_{2j} i_{3j}).$$

Veamos (c). Llamemos  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  y sea  $r \in \{1, 2, \dots, j\}$ .

- Si  $r = 1$ , entonces  $\mathbf{P}(i_1) = i_1$  y  $\alpha \mathbf{I} \alpha^{-1}(i_1) = \alpha \mathbf{I}(i_j) = \alpha(i_j) = i_1$ .
- Supongamos que  $1 < r \leq j$ .
  - Si  $r$  es impar, entonces  $\mathbf{P}(i_r) = i_r$  y  $\alpha \mathbf{I} \alpha^{-1}(i_r) = \alpha \alpha^{-1}(i_r) = i_r$ .
  - Si  $r$  es par, entonces  $\mathbf{P}(i_r) = i_{r+2}$  y  $\alpha \mathbf{I} \alpha^{-1}(i_r) = \alpha \mathbf{I}(i_{r-1}) = \alpha(i_{r+1}) = i_{r+2}$ .

Para  $r \in \{2j+1, 2j+2, \dots, 4j\}$  ó  $r \in \{4j+1, 4j+2, \dots, 4j\}$  se procede de forma similar.

(d). Por (b) y (c), tenemos que  $\sigma^{-1} \mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^k = \mathbf{I}^k \mathbf{P}^k = B_1 B_2$ , como queríamos probar.

(e). Por (b) y (c), tenemos que  $\sigma^{-1} \mathbf{P}^{-k} \sigma \mathbf{P}^{-k} = \mathbf{I}^{-k} \mathbf{P}^{-k} = B_2 B_1$  como se quería mostrar.

Definimos  $\sigma_1 := \sigma$ ,  $\sigma_2 := \mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^{-k}$  y  $\sigma_3 := \mathbf{P}^{-k} \sigma \mathbf{P}^k$ . De la misma manera que en la prueba de Corolario 2.4.11 se puede ver que  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son elementos distintos. Veamos que  $\sigma_1 \triangleright \sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\sigma_1 \triangleright \sigma_3 = \sigma_2$  y  $\sigma_2 \triangleright \sigma_3 = \sigma_1$ . Luego,  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq 3}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$ , por Proposición 2.4.12.

Por (d), se tiene que  $\mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^k \in \mathbb{S}_m^\sigma$ , i. e.  $\mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^{-k} \sigma^{-1} \mathbf{P}^{-k} = \sigma$ , o sea  $\sigma \mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^{-k} \sigma^{-1} = \mathbf{P}^{-k} \sigma \mathbf{P}^k$ . Luego,  $\sigma_1 \triangleright \sigma_2 = \sigma_3$ . Análogamente, usando (e) se muestra que  $\sigma_1 \triangleright \sigma_3 = \sigma_2$ . Para ver que  $\sigma_2 \triangleright \sigma_3 = \sigma_1$ , notar que  $\sigma_2 \triangleright \sigma_3 = \mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^{-k} \mathbf{P}^{-k} \sigma \mathbf{P}^k \mathbf{P}^k \sigma^{-1} \mathbf{P}^{-k} = \sigma$ , pues  $\mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^{-2k} = \mathbf{P}^k \sigma \mathbf{P}^k \mathbf{P}^{-3k} = \sigma B_1 B_2 \in \mathbb{S}_m^\sigma$ , por (a) y (d).

Por lo tanto, por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ ,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ . □

**Proposición 3.3.4.** *Sea  $m \geq 6$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ . Si  $n_2 \geq 3$  y existe  $j$ , con  $j \geq 3$ , tal que  $n_j \geq 1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Si  $q_{\sigma\sigma} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Supongamos que  $q_{\sigma\sigma} = -1$ . Definimos

$$x := (12)(34)(56), \quad y := (14)(36)(25), \quad z := (16)(23)(45)$$

y  $\alpha := x\sigma$ . Es fácil ver que

$$\sigma_1 := \sigma, \quad \sigma_2 := y\alpha, \quad \sigma_3 := z\alpha,$$

es de tipo  $\mathcal{D}_3$ . Luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ .  $\square$

Antes de enunciar la siguiente aplicación recordamos algunos hechos conocidos sobre teoría de representaciones de grupos finitos.

**Proposición 3.3.5.** *Sea  $m \geq 3$ . Sea  $\rho$  una representación irreducible de  $\mathbb{S}_n$ , con  $\deg \rho > 1$ , i. e.  $\rho \neq \epsilon$ , sgn. Si  $\rho$  no es fiel, entonces  $n = 4$  y  $\rho$  es la representación irreducible de grado 2 de  $\mathbb{S}_4$ . Es decir, toda representación irreducible de  $\mathbb{S}_n$ , con  $\deg \rho > 1$ , es fiel salvo la representación irreducible de grado 2 de  $\mathbb{S}_4$ .  $\square$*

*Observaciones 3.3.6.* (i) Si  $\rho$  es una representación fiel de  $\mathbb{S}_n$ , entonces  $\rho(\tau) \neq \pm \text{Id}$ , para todo  $\tau \in \mathbb{S}_n$ .

(ii) Si  $n \geq 2$  y  $\rho = (\rho, W) \in \widehat{\mathbb{S}}_n$ , con  $\rho \neq \text{sgn}$ , entonces para todo  $\tau \in \mathbb{S}_n$ , con  $|\tau| = 2$ , existe  $w \in W - 0$ , tal que  $\rho(\tau)w = w$ .

**Proposición 3.3.7.** *Sea  $m \geq 12$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ . Si  $n_2 \geq 6$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $A_{1,2}, \dots, A_{n_2,2}$ , a las  $n_2$  transposiciones que aparecen en la descomposición de  $\sigma$  como producto de ciclos disjuntos, y definamos  $A_2 = A_{1,2} \cdots A_{n_2,2}$ . Supongamos que  $A_{1,2} = (i_1 i_2)$ ,  $A_{2,2} = (i_3 i_4)$ ,  $A_{3,2} = (i_5 i_6)$ ,  $A_{4,2} = (i_7 i_8)$ ,  $A_{5,2} = (i_9 i_{10})$  y  $A_{6,2} = (i_{11} i_{12})$ . Definimos  $x := (i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_5 i_6)(i_7 i_8)(i_9 i_{10})(i_{11} i_{12})$  y  $\alpha := x\sigma$ .

Si existe  $j$ , con  $j \geq 3$ , tal que  $n_j \geq 1$ , entonces el resultado sigue de la Proposición 3.3.4. Supongamos que  $n_j = 0$ , para todo  $j \geq 3$ , i. e. el tipo de  $\sigma$  es  $(1^{n_1}, 2^{n_2})$ . Si  $q_{\sigma\sigma} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4.

Supongamos que  $q_{\sigma\sigma} = -1$ . El centralizador de  $\sigma$  en  $\mathbb{S}_m$  es  $\mathbb{S}_m^\sigma = T_1 \times T_2$ , con  $T_1 \simeq \mathbb{S}_{n_1}$  y  $T_2 = \Gamma \rtimes \Lambda$ , con

$$\Gamma := \langle A_{1,2}, \dots, A_{n_2,2} \rangle, \quad \Lambda := \langle B_{1,2}, \dots, B_{n_2-1,2} \rangle.$$

Notar que  $\Gamma \simeq (\mathbb{Z}/2)^{n_2}$  y  $\Lambda \simeq \mathbb{S}_{n_2}$ . Ahora bien,  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ , con  $\rho_1 = (\rho_1, V_1) \in \widehat{T}_1$  y  $\rho_2 = (\rho_2, V_2) \in \widehat{T}_2$ .

Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n_2$ , definimos  $\chi_i \in \widehat{\Gamma}$ , por  $\chi_i(A_{l,2}) = (-1)^{\delta_{i,l}}$ ,  $1 \leq l \leq n_2$ . Luego, las representaciones irreducibles de  $\Gamma$  son

$$\chi_{i_1, \dots, i_J} := \chi_{i_1} \cdots \chi_{i_J}, \quad 0 \leq J \leq n_2, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_J \leq n_2.$$

Por convención, el caso  $J = 0$  corresponde a la representación trivial de  $\Gamma$ .

Para cada  $J$ , con  $0 \leq J \leq n_2$ , denotaremos  $\chi_{(J)} := \chi_{1,\dots,J}$ . La acción de  $\Lambda$  sobre  $\Gamma$  induce de manera natural una acción de  $\Lambda$  sobre  $\widehat{\Gamma}$ , a saber  $(\lambda \cdot \chi)(A_{l,2}) := \chi(\lambda^{-1}A_{l,2}\lambda)$ ,  $1 \leq l \leq n_2$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . La órbita y el subgrupo de isotropía de  $\chi_{(J)} \in \widehat{\Gamma}$  son

$$\mathcal{O}_{\chi_{(J)}} = \{\chi_{k_1,\dots,k_J} : 1 \leq k_1 < \dots < k_J \leq n_2\}, \quad (3.49)$$

$$\Lambda^{\chi_{(J)}} = (\Lambda^{\chi_{(J)}})_1 \times (\Lambda^{\chi_{(J)}})_2 = \langle B_{1,2}, \dots, B_{J-1,2} \rangle \times \langle B_{J+1,2}, \dots, B_{n_2-1,2} \rangle \simeq \mathbb{S}_J \times \mathbb{S}_{n_2-J}. \quad (3.50)$$

Así, los caracteres  $\chi_{(J)}$ ,  $0 \leq J \leq n$ , forman un conjunto completo de representantes de las órbitas en  $\widehat{\Gamma}$  bajo la acción de  $\Lambda$ .

Como  $\rho_2 \in \widehat{\Gamma \rtimes \Lambda}$  entonces  $\rho_2 = \text{Ind}_{\Gamma \rtimes \Lambda^{\chi_{(J)}}}^{\Gamma \rtimes \Lambda} \chi_{(J)} \otimes \mu$ , con  $\chi_{(J)}$  como arriba y  $\mu = (\mu, W) \in \widehat{\Lambda^{\chi_{(J)}}}$ . Por (3.50),  $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ , con  $\mu_l = (\mu_l, W_l) \in (\widehat{\Lambda^{\chi_{(J)}}})_l$ ,  $l = 1, 2$ . Sean  $\{\phi_1 = \Lambda^{\chi_{(J)}}, \dots, \phi_k\}$  las coclases izquierda de  $\Lambda^{\chi_{(J)}}$  en  $\Lambda$ , donde  $k = [\Lambda : \Lambda^{\chi_{(J)}}] = \frac{n_2!}{J!(n_2-J)!}$ .

Notemos que  $B_{1,2} = (i_1 \ i_3)(i_2 \ i_4)$ ,  $B_{3,2} = (i_5 \ i_7)(i_6 \ i_8)$  y  $B_{5,2} = (i_9 \ i_{11})(i_{10} \ i_{12})$ . Definimos  $B := B_{1,2}B_{3,2}B_{5,2}$ . Notar que  $B$  tiene orden 2.

Como  $q_{\sigma\sigma} = -1$ , entonces  $J$  es impar. Consideramos dos casos.

**CASO (1):** supongamos que  $J \leq 5$ . Luego,  $B \notin \Lambda^{\chi_{(J)}}$ . Esto implica que la coclase a izquierda  $\phi$  de  $\Lambda^{\chi_{(J)}}$  en  $\Lambda$  que contiene a  $B$  no es la coclase trivial  $\phi_1$ . Tomemos como representantes de las coclases  $\phi_1$  y  $\phi$  a  $g_{\phi_1} = \text{id}$  y  $g_{\phi} = B$ , respectivamente. Definamos  $v_2 := g_{\phi_1}w + g_{\phi}w$ , con  $w \in W - 0$ . Notar que  $Bg_{\phi_1} = g_{\phi_1}\text{id}$  y  $Bg_{\phi} = g_{\phi_1}\text{id}$ . Usando (3.3), se tiene que

$$\rho_2(B)v_2 = \rho_2(B)(g_{\phi_1}w) + \rho_2(B)(g_{\phi}w) = g_{\phi_1}\mu(\text{id})w + g_{\phi_1}\mu(\text{id})w = g_{\phi_1}w + g_{\phi_1}w = v_2. \quad (3.51)$$

Sea  $v := v_1 \otimes v_2$ , con  $v_1 \in V_1 - 0$ . Luego,

$$\rho(B)v = (\rho_1 \otimes \rho_2)(\text{id}, B)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(\text{id})v_1 \otimes \rho_2(B)v_2 = v_1 \otimes v_2 = v, \quad (3.52)$$

por (3.51). Definamos  $\sigma_1 := \sigma$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_2 &:= (i_1 \ i_6)(i_3 \ i_8)(i_5 \ i_{10})(i_7 \ i_{12})(i_9 \ i_2)(i_{11} \ i_4) \alpha, \\ \sigma_3 &:= (i_1 \ i_{10})(i_3 \ i_{12})(i_5 \ i_2)(i_7 \ i_4)(i_9 \ i_6)(i_{11} \ i_8) \alpha, \\ \tau_1 &:= (i_1 \ i_4)(i_3 \ i_2)(i_5 \ i_8)(i_7 \ i_6)(i_9 \ i_{12})(i_{11} \ i_{10}) \alpha, \\ \tau_2 &:= (i_1 \ i_8)(i_3 \ i_6)(i_5 \ i_{12})(i_7 \ i_{10})(i_9 \ i_4)(i_{11} \ i_2) \alpha, \\ \tau_3 &:= (i_1 \ i_{12})(i_3 \ i_{10})(i_5 \ i_4)(i_7 \ i_2)(i_9 \ i_8)(i_{11} \ i_6) \alpha. \end{aligned}$$

Se puede verificar por cálculos directos que  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathcal{D}_3^{(2)}$ . Sea  $g := (i_2 \ i_4)(i_6 \ i_8)(i_{10} \ i_{12})$ ; luego,  $g \triangleright \sigma = \tau_1$ . Más aún,  $\tau_1 = \sigma B = g\sigma g$  y  $\sigma_2\tau_2 = B = g\sigma_2\tau_2 g$ . Tenemos entonces que

$$\rho(\tau_1)v = -v = \rho(g\sigma g)v \quad \text{y} \quad \rho(\sigma_2\tau_2)v = v = \rho(g\sigma_2\tau_2 g)v,$$

por (3.52). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Teorema 2.4.9, con  $p = 3$ .

**CASO (2):** supongamos que  $J \geq 7$ . Luego,  $B \in \Lambda^{\chi_{(J)}}$ ; más aún,  $B \in (\Lambda^{\chi_{(J)}})_1$ . Además,  $Bg_{\phi_1} = g_{\phi_1}B$ .

Sea  $v_2 = g_{\phi_1} w$ , con  $w \in W - 0$ . Como  $W = W_1 \otimes W_2$  entonces  $w = w_1 \otimes w_2$ , con  $w_1 \in W_1 - 0$  y  $w_2 \in W_2 - 0$ . Luego, usamos (3.3) y tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_2(B)v_2 &= \rho_2(B)(g_{\phi_1} w) = g_{\phi_1} \mu(B)w = g_{\phi_1}(\mu_1 \otimes \mu_2)(B, \text{id})(w_1 \otimes w_2) \\ &= g_{\phi_1} \left( \mu_1(B)(w_1) \otimes \mu_2(\text{id})(w_2) \right) = g_{\phi_1} \left( (\mu_1(B)(w_1) \otimes w_2) \right). \end{aligned}$$

Notar que  $\mu_1 \in (\widehat{\Lambda^{X(J)}})_1$ . Como  $(\Lambda^{X(J)})_1 \simeq \mathbb{S}_J$ , si  $\mu_1 \neq \text{sgn}$ , con  $\text{sgn}$  la representación signo de  $\mathbb{S}_J$ , entonces existe  $w_1 \in W_1 - 0$  tal que  $\mu_1(B)(w_1) = w_1$ , por Observación 3.3.6 (ii). En este caso, tenemos

$$\rho_2(B)v_2 = g_{\phi_1}(\mu_1(B)(w_1) \otimes w_2) = g_{\phi_1}(w_1 \otimes w_2) = g_{\phi_1} w = v_2. \quad (3.53)$$

Tomando  $v := v_1 \otimes v_2$ , con  $v_1 \in V_1 - 0$ , se tiene que

$$\rho(B)v = (\rho_1 \otimes \rho_2)(\text{id}, B)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(\text{id})v_1 \otimes \rho_2(B)v_2 = v_1 \otimes v_2 = v,$$

por (3.53). Considerando  $\sigma_i, \tau_i, 1 \leq i \leq 3$ , como en el caso anterior, estamos en las hipótesis del Teorema 2.4.9, con  $p = 3$ . Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

Por otro lado, supongamos que  $\mu_1 = \text{sgn}$ . Sea  $w \in W$ , con  $w = w_1 \otimes w_2$ ,  $w_1 \in W_1 - 0$  y  $w_2 \in W_2 - 0$ . Sea  $v_2 = g_{\phi_1} w$ ; como  $\mu_1(B)(w_1) = -w_1$  entonces  $\rho_2(B)v_2 = -v_2$ . Tomando  $v := v_1 \otimes v_2$ , con  $v_1 \in V_1 - 0$ , se tiene que

$$\rho(B)v = (\rho_1 \otimes \rho_2)(\text{id}, B)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(\text{id})v_1 \otimes \rho_2(B)v_2 = -v_1 \otimes v_2 = -v. \quad (3.54)$$

Definimos  $\overline{\sigma}_1 := \sigma$ ,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_2 &:= (i_1 \ i_6)(i_4 \ i_7)(i_5 \ i_{10})(i_8 \ i_{11})(i_2 \ i_9)(i_3 \ i_{12})\alpha, \\ \overline{\sigma}_3 &:= (i_1 \ i_{10})(i_4 \ i_{11})(i_2 \ i_5)(i_3 \ i_8)(i_6 \ i_9)(i_7 \ i_{12})\alpha, \\ \overline{\tau}_1 &:= (i_1 \ i_3)(i_2 \ i_4)(i_5 \ i_7)(i_6 \ i_8)(i_9 \ i_{11})(i_{10} \ i_{12})\alpha, \\ \overline{\tau}_2 &:= (i_1 \ i_7)(i_2 \ i_{12})(i_3 \ i_9)(i_4 \ i_6)(i_5 \ i_{11})(i_8 \ i_{10})\alpha, \\ \overline{\tau}_3 &:= (i_1 \ i_{11})(i_2 \ i_8)(i_3 \ i_5)(i_4 \ i_{10})(i_6 \ i_{12})(i_7 \ i_9)\alpha. \end{aligned}$$

Se puede ver que  $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$  es de tipo  $\mathcal{D}_3^{(2)}$ . Ahora bien, sea  $\overline{g} := (i_2 \ i_3)(i_6 \ i_7)(i_{10} \ i_{11})$ ; luego,  $\overline{g} \triangleright \sigma = \overline{\tau}_1$ . Más aún,  $\overline{\tau}_1 = B = \overline{g}\sigma\overline{g}$  y  $\overline{\sigma}_2\overline{\tau}_2 = \sigma B = \overline{g}\overline{\sigma}_2\overline{\tau}_2\overline{g}$ . Tenemos entonces que

$$\rho(\overline{\tau}_1)v = -v = \rho(\overline{g}\sigma\overline{g})v \quad \text{y} \quad \rho(\overline{\sigma}_2\overline{\tau}_2)v = v = \rho(\overline{g}\overline{\sigma}_2\overline{\tau}_2\overline{g})v,$$

por (3.54). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Teorema 2.4.9, con  $p = 3$ .  $\square$

Cuando  $\mathcal{O}$  es una clase de conjugación real de  $G$ , con representante de orden mayor que dos el Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ , es particularmente muy útil, como lo muestran los siguientes resultados. Si bien el primero está contenido en el segundo, en aquél se indica, además, que no se puede decidir la dimensión del álgebra de Nichols mediante técnicas de subracks abelianos.

**Proposición 3.3.8.** *Sea  $m \geq 6$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1, 2, m-3)$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Por el Lema 2.3.4 podemos asumir que  $q_{\sigma\sigma} = -1$ . Llamemos

$$x := (1\ 2), \quad y := (1\ 3), \quad z := (2\ 3), \quad \beta := (4\ 5\ \cdots\ m),$$

y definamos  $\sigma_0 := (1\ 2)(4\ 5\ \cdots\ m)$ ,  $\sigma_1 := y\beta$ ,  $\sigma_2 := z\beta$ . Luego,  $\mathbb{S}_m^{\sigma_0} = \langle x \rangle \times \langle \beta \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/m - 3$ . Sea  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^{\sigma_0}$ ; luego  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ , con  $\rho_1 \in \widehat{\mathbb{Z}/2}$  y  $\rho_2 \in \widehat{\mathbb{Z}/m - 3}$ . Asumamos que  $q_{\sigma_0\sigma_0} = -1$ . Ahora bien, como  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$ ,  $\mathcal{O}$  es real y  $|\sigma_0| > 2$ , entonces estamos en las hipótesis del Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ . Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .  $\square$

*Observación 3.3.9.* Notar que no es posible decidir si la dimensión del álgebra de Nichols de  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es infinita o no mediante de criterios de subracks abelianos. En efecto, con la hipótesis  $q_{\sigma_0\sigma_0} = -1$  las posibilidades para  $\rho$  son

- (a) si  $m$  es par:  $\rho_2 = \text{sgn}$  y  $\rho_{m-3} = \epsilon$ ,
- (b) si  $m$  es impar:
  - (i)  $\rho_2 = \text{sgn}$  y  $\rho_{m-3} = \epsilon$ , ó
  - (ii)  $\rho_2 = \epsilon$  y  $\rho_{m-3}(\beta) = -1$ .

Mostraremos que si  $\rho$  es como en (a) ó (b), entonces la trenza en  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es negativa. Se puede ver que

$$\mathcal{O} \cap \mathbb{S}_m^{\sigma_0} = \{x\beta^k, : k \text{ coprimo con } m - 3\}.$$

Sea  $k$  coprimo con  $m - 3$ . Elegimos  $\alpha_k \in \mathbb{S}_{\{4, \dots, m\}}$  tal que  $\alpha_k \triangleright \beta = \beta^k$ . Es fácil ver que  $\alpha_k^{-1} \triangleright \beta = \beta^{k'}$ , donde  $k'$  satisface  $kk' \equiv 1 \pmod{m - 3}$ . Tomamos  $g_1 := \alpha_k$ . Ahora, se tiene que si  $\gamma = x\beta^k$ , entonces  $g_1 \triangleright \sigma_0 = \gamma$ . Sea  $\bar{\gamma} = g_1^{-1} \sigma g_1$ ; luego,  $\gamma \bar{\gamma} = \beta^{k+k'}$ . Así, si  $\rho$  es como en (a) ó (b)(i), entonces  $\rho(\gamma \bar{\gamma}) = \rho_2(\beta^{k+k'}) = 1$ , mientras que si  $\rho$  es como en (b)(ii), entonces  $\rho(\gamma \bar{\gamma}) = \rho_2(\beta^{k+k'}) = 1$ , pues  $k + k'$  es par. Por lo tanto, la trenza es negativa por Lema 2.2.3.

**Proposición 3.3.10.** *Sea  $m \geq 6$ . Sea  $m \geq 6$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ , donde  $n_1, n_2 \geq 1$  y  $n_j \geq 1$  para algún  $j$ , con  $3 \leq j \leq m$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^{\sigma}$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Análoga a la prueba del resultado anterior.  $\square$

### 3.3.2. Criterio $\mathfrak{D}$

Los siguientes resultados son aplicaciones del criterio dado por subracks de tipo  $\mathfrak{D}$ .

**Proposición 3.3.11.** *Sea  $m \geq 8$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, 8^{n_8})$ , con  $n_8 \geq 1$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^{\sigma}$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* Notar que  $\sigma$  tiene orden par. Si  $q_{\sigma\sigma} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Supongamos que  $q_{\sigma\sigma} = -1$ . Si  $n_8 \geq 3$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Proposición 3.3.3. Consideraremos dos casos.

*CASO (I):*  $n_8 = 1$ . Sea  $A_8 = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8)$  el 8-ciclo que aparece en la descomposición de  $\sigma$  como producto de ciclos disjuntos. Definimos  $\alpha := \sigma A_8^{-1}$ ,  $\sigma_1 := \sigma$ ,  $\sigma_6 := \sigma_1^3$ ,  $\tau_1 := \sigma_1^5$ ,  $\tau_6 := \sigma_1^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_2 &:= (i_1 i_3 i_8 i_6 i_5 i_7 i_4 i_2) \alpha, & \sigma_3 &:= (i_1 i_8 i_2 i_7 i_5 i_4 i_6 i_3) \alpha, \\ \sigma_4 &:= (i_1 i_6 i_4 i_3 i_5 i_2 i_8 i_7) \alpha, & \sigma_5 &:= (i_1 i_7 i_6 i_8 i_5 i_3 i_2 i_4) \alpha, \\ \tau_2 &:= (i_1 i_7 i_8 i_2 i_5 i_3 i_4 i_6) \alpha, & \tau_3 &:= (i_1 i_4 i_2 i_3 i_5 i_8 i_6 i_7) \alpha, \\ \tau_4 &:= (i_1 i_2 i_4 i_7 i_5 i_6 i_8 i_3) \alpha, & \tau_5 &:= (i_1 i_3 i_6 i_4 i_5 i_7 i_2 i_8) \alpha. \end{aligned}$$

*CASO (II):*  $n_8 = 2$ . Sean  $A_{1,8} = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8)$  y  $A_{2,8} = (i_9 i_{10} i_{11} i_{12} i_{13} i_{14} i_{15} i_{16})$  los dos 8-ciclos que aparecen en la descomposición de  $\sigma$  como producto de ciclos disjuntos. Definimos  $A_8 := A_{1,8}A_{2,8}$ ,  $\alpha := \sigma A_8^{-1}$ ,  $\sigma_1 := \sigma$ ,  $\sigma_6 := \sigma_1^3$ ,  $\tau_1 := \sigma_1^5$ ,  $\tau_6 := \sigma_1^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_2 &:= (i_1 i_3 i_8 i_6 i_5 i_7 i_4 i_2)(i_9 i_{11} i_{16} i_{14} i_{13} i_{15} i_{12} i_{10}) \alpha, \\ \sigma_3 &:= (i_1 i_8 i_2 i_7 i_5 i_4 i_6 i_3)(i_9 i_{16} i_{10} i_{15} i_{13} i_{12} i_{14} i_{11}) \alpha, \\ \sigma_4 &:= (i_1 i_6 i_4 i_3 i_5 i_2 i_8 i_7)(i_9 i_{14} i_{12} i_{11} i_{13} i_{10} i_{16} i_{15}) \alpha, \\ \sigma_5 &:= (i_1 i_7 i_6 i_8 i_5 i_3 i_2 i_4)(i_9 i_{15} i_{14} i_{16} i_{13} i_{11} i_{10} i_{12}) \alpha, \\ \tau_2 &:= (i_1 i_7 i_8 i_2 i_5 i_3 i_4 i_6)(i_9 i_{15} i_{16} i_{10} i_{13} i_{11} i_{12} i_{14}) \alpha, \\ \tau_3 &:= (i_1 i_4 i_2 i_3 i_5 i_8 i_6 i_7)(i_9 i_{12} i_{10} i_{11} i_{13} i_{16} i_{14} i_{15}) \alpha, \\ \tau_4 &:= (i_1 i_2 i_4 i_7 i_5 i_6 i_8 i_3)(i_9 i_{10} i_{12} i_{15} i_{13} i_{14} i_{16} i_{11}) \alpha, \\ \tau_5 &:= (i_1 i_3 i_6 i_4 i_5 i_7 i_2 i_8)(i_9 i_{11} i_{14} i_{12} i_{13} i_{15} i_{10} i_{16}) \alpha. \end{aligned}$$

En ambos casos, tenemos que  $(\sigma, \tau) = (\sigma_l)_{1 \leq l \leq 6} \cup (\tau_l)_{1 \leq l \leq 6}$  es una familia de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$  con  $\sigma_6 = s_1^3$  y  $\tau_1 = s_1^5$ . Ahora, el resultado sigue del Corolario 2.4.32.  $\square$

Si bien la prueba del siguiente resultado usa criterios de subracks abelianos, el mismo será citado aquí a los fines de la exposición.

**Proposición 3.3.12.** *Sea  $m \geq 8$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, (2^{l_1})^{n_{2^{l_1}}}, \dots, (2^{l_k})^{n_{2^{l_k}}})$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ . Si  $\deg(\rho) > 1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ .*

*Demostración.* Análogo a la prueba de [AF1, Theor. 4].  $\square$

*Observación 3.3.13.* Recordamos que si  $\deg(\rho) = 1$ , entonces  $\deg(\rho_j) = 1$  para todo  $j$ . En este caso, la proposición anterior implica que, si para algún  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$ , existen  $r, r'$ , con  $1 \leq r, r' \leq n_{2^{l_k}}$  tales que  $t_{r, 2^{l_k}} \neq t_{r', 2^{l_k}}$  - ver (3.5) -, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

**Proposición 3.3.14.** *Sea  $m \geq 8$ . Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, 4^2)$ ,  $\mathcal{O}$  la clase de conjugación de  $\sigma$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ , con  $\deg(\rho) = 1$ . Si  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , entonces  $\rho_4 = \chi_{(i,i)} \otimes \text{sgn}$  ó  $\chi_{(-i,-i)} \otimes \text{sgn}$ , donde  $i = \sqrt{-1}$ .*

*Demostración.* Notar que  $\sigma$  tiene orden par. Si  $q_{\sigma\sigma} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Supongamos que  $q_{\sigma\sigma} = -1$ . Sean  $A_{1,4} = (j_1 j_2 j_3 j_4)$  y  $A_{2,4} = (j_5 j_6 j_7 j_8)$  los dos 4-ciclos que aparecen en la descomposición de  $\sigma$  como producto de ciclos disjuntos. Denotemos  $A_4 = A_{1,4}A_{2,4}$ . Si  $\rho(A_{1,4}) \neq \rho(A_{2,4})$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Observación 3.3.13. En caso contrario,  $\rho(A_{1,4}) =$



$\rho(A_{2,4}) = \omega_4^{t_4}$ , con  $0 \leq t_4 \leq 3$ . Luego,  $\rho_4 = \chi_{(\omega_4^{t_4}, \omega_4^{t_4})} \otimes \mu_4$ , con  $\mu_4 = \epsilon$  ó  $\text{sgn}$ , i. e. la representación trivial ó signo de  $\mathbb{Z}/2$ . Entonces,  $\rho(A_4) = \pm 1$ . Consideraremos dos casos.

*CASO (I):*  $q_{A_4} = 1$ . Luego,  $\rho(A_{1,4}) = \rho(A_{2,4}) = 1$  ó  $-1$ . Definimos  $x_1 := A_4$ ,  $x_6 := A_{1,4}A_{2,4}^{-1}$ ,  $z_1 := A_{1,4}^{-1}A_{2,4}$ ,  $z_6 := x_1^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} x_2 &:= A_{1,4}(j_5 j_6 j_8 j_7), & x_3 &:= A_{1,4}(j_5 j_7 j_6 j_8), \\ x_4 &:= A_{1,4}(j_5 j_7 j_8 j_6), & x_5 &:= A_{1,4}(j_5 j_8 j_6 j_7), \\ z_2 &:= (j_1 j_4 j_3 j_2)(j_5 j_6 j_8 j_7), & z_3 &:= (j_1 j_4 j_3 j_2)(j_5 j_7 j_6 j_8), \\ z_4 &:= (j_1 j_4 j_3 j_2)(j_5 j_7 j_8 j_6), & z_5 &:= (j_1 j_4 j_3 j_2)(j_5 j_8 j_6 j_7). \end{aligned}$$

Sea  $\alpha = \sigma x_1^{-1}$  y definamos  $\sigma_j := x_j \alpha$ ,  $\tau_j = z_j \alpha$ ,  $1 \leq j \leq 6$ . Es fácil ver que  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Ahora bien,  $\tau_1 = A_{1,4}^{-1}A_{2,4}\alpha = \sigma A_{1,4}^{-2}$ ,  $\sigma_6 = A_{1,4}A_{2,4}^{-1}\alpha = \sigma A_{2,4}^{-2}$ . Elegimos  $g := (1\ 2)(3\ 4)$ ; luego,  $g \triangleright \sigma_1 = \tau_1$ ,  $g^{-1}\sigma_1 g = \tau_1 = \sigma A_{1,4}^{-2}$  y  $g^{-1}\sigma_6 g = g^{-1}A_{1,4}A_{2,4}^{-1}g\alpha = A_{1,4}^{-1}A_{2,4}^{-1}\alpha = \sigma x_1^{-2}$ . Esto implica que  $\rho(\tau_1) = \rho(g^{-1}\sigma_1 g) = -\rho(A_{1,4}^{-2}) = -1$ ,  $\rho(\sigma_6) = -\rho(A_{2,4}^{-2}) = -1$  y  $\rho(g^{-1}\sigma_6 g) = -\rho(x_1^{-2}) = -1$ . Luego, se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.4.31. Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

*CASO (II):*  $q_{A_4} = -1$ . Luego,  $\rho(A_{1,4}) = \rho(A_{2,4}) = i$  ó  $-i$ , donde  $i = \sqrt{-1}$ . Sea  $\mu_4 = \epsilon$ . Definimos  $x_1 := A_4$ ,

$$\begin{aligned} x_2 &:= (j_1 j_2 j_4 j_3)(j_5 j_6 j_8 j_7), & x_3 &:= (j_1 j_3 j_2 j_4)(j_5 j_7 j_6 j_8), \\ x_4 &:= x_2^{-1}, & x_5 &:= x_3^{-1}, & x_6 &:= x_1^{-1}, & z_1 &:= (j_1 j_6 j_3 j_8)(j_2 j_7 j_4 j_5), \\ z_2 &:= (j_1 j_6 j_4 j_7)(j_2 j_8 j_3 j_5), & z_3 &:= (j_1 j_7 j_2 j_8)(j_3 j_6 j_4 j_5), \end{aligned}$$

$z_4 := z_2^{-1}$ ,  $z_5 := z_3^{-1}$  y  $z_6 := z_1^{-1}$ . Notar que  $z_1 = A_{1,4}A_{2,4}B_{1,4}$ , con  $B := (j_1 j_5)(j_2 j_6)(j_3 j_7)(j_4 j_8)$ .

Sea  $\alpha = \sigma x_1^{-1}$  y definamos  $\sigma_j := x_j \alpha$ ,  $\tau_j = z_j \alpha$ ,  $1 \leq j \leq 6$ . Es fácil ver que  $(\sigma, \tau)$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Ahora bien,  $\tau_1 = A_{1,4}A_{2,4}B_{1,4}\alpha = \sigma B_{1,4}$ ,  $\sigma_6 = \sigma A_4^{-2}$ . Elegimos  $g := (2\ 6)(4\ 8)$ ; luego,  $g \triangleright \sigma_1 = \tau_1$ ,  $g^{-1}\sigma_1 g = \tau_1$  y  $g^{-1}\sigma_6 g = A_{1,4}^{-1}A_{2,4}^{-1}\alpha = \sigma A_4^{-2}B_{1,4}$ . Luego, si  $\rho_4 \neq \chi_{(i,i)} \otimes \text{sgn}$ ,  $\chi_{(-i,-i)} \otimes \text{sgn}$ , entonces  $\rho(\tau_1) = \rho(g^{-1}\sigma_1 g) = \rho(\sigma_6) = \rho(g^{-1}\sigma_6 g) = -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , por Teorema 2.4.31.  $\square$



## Capítulo 4

# Álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos alternados y diedrales

En este capítulo, aplicamos la estrategia de eliminación por medio de subracks abelianos y no abelianos a los grupos alternados. En particular, se clasifican las álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita con corradical isomorfo a  $\mathbb{C}\mathbb{A}_5$  y  $\mathbb{C}\mathbb{A}_7$ . Además, se muestra que cualquier álgebra de Hopf punteada con trenza infinitesimal asociada con la clase de conjugación de  $\sigma \in \mathbb{A}_m$  es de dimensión infinita si el orden de  $\sigma$  es impar excepto para  $\sigma = (1\ 2\ 3)$  ó  $(1\ 3\ 2)$  en  $\mathbb{A}_4$ .

También se estudian álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos diedrales, dando condiciones necesarias sobre los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre un grupo diedral para que sus correspondientes álgebras de Nichols sean de dimensión finita.

Parte de los resultados aquí presentados forman parte del trabajo [AF2].

### 4.1. Grupos absolutamente reales

Comenzamos considerando una clase particular de grupos reales.

**Definición 4.1.1.** Sea  $G$  un grupo finito. Se dice que  $s \in G$  es *absolutamente real* si existe una *involución*  $g$  en  $G$  tal que  $gsg = s^{-1}$ . Si esto ocurre, cualquier elemento en la clase de conjugación de  $s$  es absolutamente real y diremos que la clase de conjugación de  $s$  es *absolutamente real*. Se dirá que  $G$  es absolutamente real si todo elemento de  $G$  lo es.

Los grupos de Coxeter finitos son absolutamente reales. En efecto,

- (i) los grupos diedrales son absolutamente reales, por cálculos directos.
- (ii) los grupos de Weyl de álgebras de Lie semisimples de dimensión finita son absolutamente reales, por [Ca, Theor. C (iii), p. 45].
- (iii)  $H_3$  es absolutamente real, por Proposición 4.1.5 siguiente.
- (iv)  $H_4$  es absolutamente real, verificado usando GAP3, [Sch+].

Aquí,  $H_3$  y  $H_4$  denota a los grupos *no cristalográficos* de tipo  $H_3$  y  $H_4$ .

Obviamente, si  $s \in G$  es absolutamente real, entonces  $s$  es real. Luego, el párrafo anterior nos dice que la clase de grupos reales incluye a la de los grupos de Coxeter finitos. En efecto, todos los caracteres de un grupo de Coxeter finito son a valores reales – ver [BGr] para  $H_4$ . Por lo tanto, se tiene:

**Teorema 4.1.2.** *Sea  $G$  un grupo de Coxeter finito y  $s \in G$ . Si  $s$  tiene orden impar, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_s, \rho) = \infty$ , para todo  $\rho \in \widehat{G^s}$ .*  $\square$

*Observación 4.1.3.* Sean  $G, H$  grupos finitos. Notamos que:

- $(s, t) \in G \times H$  es absolutamente real si y sólo si  $s \in G$  y  $t \in H$  son absolutamente reales.
- $G \times H$  es absolutamente real si y sólo si  $G$  y  $H$  son absolutamente reales.
- Supongamos que  $H$  es abeliano. Entonces  $H$  es absolutamente real si y sólo si  $H$  tiene exponente 2, i. e.  $H \simeq \mathbb{Z}/2^n$  para algún entero  $n$ .
- Si  $G$  es absolutamente real y  $H$  es abeliano de exponente 2 entonces  $G \times H$  es absolutamente real.

En primer lugar, discutiremos cuándo un elemento de  $\mathbb{A}_m$  es absolutamente real. Asumimos que  $\sigma \in \mathbb{S}_m$  es de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ . Entonces  $\sigma \in \mathbb{A}_m$  si y sólo si  $\sum_{j \text{ par}} n_j$  es par.

**Lema 4.1.4.** (a) *Si  $n_1 \geq 2$ , entonces  $\sigma$  es absolutamente real en  $\mathbb{A}_m$ .*

(b) *Si  $\sum_{h \in \mathbb{N}} (n_{4h} + n_{4h+3})$  es par entonces  $\sigma$  es absolutamente real en  $\mathbb{A}_m$ .*

*Demostración.* Sea  $\tau_j := (1\ 2 \dots j)$  para algún  $j$  y elijamos

$$g_j = \begin{cases} (1\ j-1)(2\ j-2) \cdots (k-1\ k+1), & \text{si } j = 2k \text{ es par,} \\ (1\ j-1)(2\ j-2) \cdots (k\ k+1), & \text{si } j = 2k+1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Es fácil ver que  $g_j \tau_j g_j = \tau_j^{-1}$ ,  $g_j^2 = \text{id}$  y

$$\text{sgn}(g_j) = \begin{cases} (-1)^{k-1}, & \text{si } j = 2k \text{ es par,} \\ (-1)^k, & \text{si } j = 2k+1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Para probar (b), observamos que existe una involución  $g \in \mathbb{S}_m$  tal que  $g\sigma g = \sigma^{-1}$ , que es un producto de “translaciones” de los  $g_j$ 's. Ya que el signo de  $g$  es  $(-1)^{\sum_{h \in \mathbb{N}} (n_{4h} + n_{4h+3})}$ , se tiene que  $g \in \mathbb{A}_m$  si y sólo si  $\sum_{h \in \mathbb{N}} (n_{4h} + n_{4h+3})$  es par; (b) sigue. Probemos (a); por hipótesis existen al menos dos puntos fijos por  $\sigma$ , digamos  $m-1, m$ . Por lo anterior existe una involución  $g \in \mathbb{S}_{m-2}$  tal que  $g\sigma g = \sigma^{-1}$ . Si  $g \in \mathbb{A}_{m-2} \subset \mathbb{A}_m$  ya estamos. En caso contrario, tomar  $\tilde{g} = g(m-1\ m) \in \mathbb{A}_m$ ;  $\tilde{g}$  es una involución y  $\tilde{g}\sigma\tilde{g} = \sigma^{-1}$ .  $\square$

**Proposición 4.1.5.** *Los grupos  $\mathbb{A}_5$  y  $H_3$  son absolutamente reales.*

*Demostración.* El tipo de  $\sigma \in \mathbb{A}_5$  es  $(1^5)$ ,  $(3^1)$ ,  $(2^2)$  ó  $(5^1)$ ; en los dos primeros casos  $\sigma$  es absolutamente real por Lema 4.1.4 parte (a), y en los últimos dos por parte (b). Ya que  $H_3 \simeq \mathbb{A}_5 \times \mathbb{Z}/2$  (ver [Hu, Sección 2.13]), entonces el grupo de Coxeter es absolutamente real por Observación 4.1.3.  $\square$

## 4.2. Álgebras de Nichols sobre los grupos alternados

El siguiente es un criterio útil para decidir cuándo una clase de conjugación de una permutación par  $\sigma$  en  $\mathbb{S}_m$  se parte en  $\mathbb{A}_m$ .

**Proposición 4.2.1.** [*JLi, Proposición 12.17*] Sea  $\sigma \in \mathbb{A}_m$ , con  $m > 1$ .

- (1) Si  $\sigma$  conmuta con alguna permutación impar en  $\mathbb{S}_m$ , entonces  $\mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{A}_m} = \mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{S}_m}$  y  $[\mathbb{S}_m^\sigma : \mathbb{A}_m^\sigma] = 2$ .
- (2) Si  $\sigma$  no conmuta con ninguna permutación impar en  $\mathbb{S}_m$ , entonces  $\mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{S}_m}$  se parte en dos clases de conjugación en  $\mathbb{A}_m$  de igual tamaño, con representantes  $\sigma$  y  $(12)\sigma(12)$ , y  $\mathbb{S}_m^\sigma = \mathbb{A}_m^\sigma$ .  $\square$

*Observaciones 4.2.2.* (i) Notar que si  $\sigma$  satisface (1) de Proposición 4.2.1, entonces  $\sigma$  es real. La recíproca no es cierta, e.g. considerar  $\tau_5 = (12345)$  en  $\mathbb{A}_5$ .

(ii) Se puede ver que si  $\sigma$  en  $\mathbb{A}_m$  es de tipo  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ , entonces  $\sigma$  satisface (2) de Proposición 4.2.1 si y sólo si  $n_1 = 0$  ó  $1$ ,  $n_{2h} = 0$  y  $n_{2h+1} \leq 1$ , para todo  $h \geq 1$ . Así, si  $\sigma$  tiene orden par, entonces  $\sigma$  es real.

Enunciamos el principal Teorema de la sección.

**Teorema 4.2.3.** Sean  $\sigma \in \mathbb{A}_m$  y  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_m^\sigma}$ . Supongamos que  $\sigma$  no es  $(123)$  ni  $(132)$  en  $\mathbb{A}_4$ . Si  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) < \infty$ , entonces  $q_{\sigma\sigma} = -1$  y  $\sigma$  tiene orden par.

*Demostración.* Si  $|\sigma|$  es par el resultado sigue por Lema 2.3.4 y Observación 4.2.2 (ii). Asumamos que  $|\sigma| \geq 5$  e impar. Si  $\sigma^{-1}$  está en  $\mathcal{O}_\sigma$ , entonces el resultado sigue por Lema 2.3.4. Supongamos que  $\sigma^{-1} \notin \mathcal{O}_\sigma$ . Consideraremos dos casos.

(i) Si  $\sigma^2 \in \mathcal{O}_\sigma$ , entonces  $\sigma^4$  está en  $\mathcal{O}_\sigma$ , y  $\sigma^4 \neq \sigma^2$  porque  $|\sigma| \geq 5$ . Luego, el resultado sigue por Lema 2.3.5.

(ii) Asumir que  $\sigma^2 \notin \mathcal{O}_\sigma$ . Sabemos que existen  $g$  y  $g'$  en  $\mathbb{S}_m$ , necesariamente permutaciones impares, tales que  $\sigma^{-1} = g\sigma g^{-1}$  y  $\sigma^2 = g'\sigma g'^{-1}$ . Entonces  $g'' = gg' \in \mathbb{A}_m$  y  $\sigma^{-2} = g''\sigma g''^{-1}$ ; así,  $\sigma^{-2}$  está en  $\mathcal{O}_\sigma$ . Esto implica que  $\sigma^4$  está en  $\mathcal{O}_\sigma$ , y  $\sigma^4 \neq \sigma^{-2}$  porque  $5 \leq |\sigma|$  es impar. Ahora, el resultado sigue por Lema 2.3.5.

Finalmente, supongamos que  $|\sigma| = 3$ , con tipo  $(1^a, 3^b)$ . Si  $a \geq 2$  o  $b \geq 2$ , entonces  $\sigma$  es real, por Lema 4.1.4 (a) y Observación 4.2.2, respectivamente. Por lo tanto, el resultado sigue por Lema 2.3.4. Esto concluye la prueba.  $\square$

### 4.2.1. Caso $\mathbb{A}_3$

Notar que  $\mathbb{A}_3 \simeq \mathbb{Z}/3$ ; luego  $\mathbb{A}_3$  no es real. Este caso fue considerado en [AS1, Teorema 1.3].

### 4.2.2. Caso $\mathbb{A}_4$

Por cálculos directos podemos verificar que  $\mathbb{A}_4$  no es real, ya que  $(123)$  no es real en  $\mathbb{A}_4$ . Sea  $\sigma$  en  $\mathbb{A}_4$ ; entonces el tipo de  $\sigma$  puede ser  $(1^4)$ ,  $(2^2)$  ó  $(1,3)$ . Si el tipo de  $\sigma$  es  $(1^4)$ , entonces

$\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para cualquier  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{A}}_4$ , por Lema 2.3.1. Si el tipo de  $\sigma$  es  $(1, 3)$ , entonces  $\sigma$  no es real; más aún, se tiene que

$$\mathcal{O}_{(1\ 2\ 3)} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (2\ 4\ 3)\},$$

$$\mathcal{O}_{(1\ 3\ 2)} = \{(1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4)\},$$

y  $\mathbb{A}_4^\sigma = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/3$ . Si  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}}_4^\sigma$  es trivial, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ ; en caso contrario no se sabe si la dimensión es finita o no. Esos cuatro casos corresponden al rack del *tetraedro* con cociclo constante  $\omega$  y  $\omega^2$ , respectivamente.

El siguiente resultado es una variación de [AZ, Teorema 2.7].

**Proposición 4.2.4.** *Sea  $\sigma$  en  $\mathbb{A}_4$  de tipo  $(2^2)$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para todo  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{A}}_4^\sigma$ .*

*Demostración.* Podemos asumir que  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ . Si llamamos  $\sigma_1 := \sigma$ ,  $\sigma_2 := (1\ 3)(2\ 4)$  y  $\sigma_3 := (1\ 4)(2\ 3)$ , entonces  $\mathcal{O}_\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  y  $\mathbb{A}_4^\sigma = \langle \sigma_1 \rangle \times \langle \sigma_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ . Si  $g_1 = \text{id}$ ,  $g_2 = (1\ 3\ 2)$  y  $g_3 = (1\ 2\ 3)$ , entonces  $\sigma_j = g_j \sigma g_j^{-1}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , y

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_3, & \sigma_2 g_1 = g_1 \sigma_2, & \sigma_3 g_1 = g_1 \sigma_3, \\ \sigma_1 g_3 = g_3 \sigma_2, & \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_3, & \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_2. \end{array}$$

Sean  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{A}}_4^\sigma$  y  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho) := g_1 v \oplus g_2 v \oplus g_3 v$ , donde  $\langle v \rangle$  es el espacio vectorial de la representación  $\rho$ . Luego,  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$  es un espacio vectorial trenzado con trenza dada por – ver (2.7)–  $c(g_j v \otimes g_i v) = g_1 \sigma \cdot v \otimes g_j v$  y  $c(g_j v \otimes g_1 v) = g_1 \sigma_j \cdot v \otimes g_j v$ ,  $j = 1, 2, 3$  y

$$\begin{array}{ll} c(g_1 v \otimes g_2 v) = g_2 \sigma_3 \cdot v \otimes g_1 v, & c(g_1 v \otimes g_3 v) = g_3 \sigma_2 \cdot v \otimes g_1 v, \\ c(g_2 v \otimes g_3 v) = g_3 \sigma_3 \cdot v \otimes g_2 v, & c(g_3 v \otimes g_2 v) = g_2 \sigma_2 \cdot v \otimes g_3 v. \end{array}$$

Claramente,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \varepsilon \otimes \varepsilon) = \dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \varepsilon \otimes \text{sgn}) = \infty$ , por Lema 2.3.1. Si consideramos  $\rho = \text{sgn} \otimes \varepsilon$  (resp.  $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$ ), entonces  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$  es de tipo Cartan con matriz de coeficientes  $(q_{ij})_{ij}$  dada por

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{resp. } \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}).$$

En ambos casos la matriz de Cartan es  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por Teorema 2.3.2. □

### 4.2.3. Caso $\mathbb{A}_5$

El siguiente lema es el paso clave para este caso.

**Lema 4.2.5.** *Sea  $\sigma \in \mathbb{A}_5$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para todo  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{A}}_5^\sigma$ .*

*Demostración.* Sea  $\sigma \in \mathbb{A}_5$ . Si el tipo de  $\sigma$  es  $(1^5)$ ,  $(1^2, 3)$  ó  $(5)$ , tenemos que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4 y Proposición 4.1.5. Asumamos que el tipo de  $\sigma$  es  $(2^2)$ . Para  $j = 1, 2, 3$ , sean  $\sigma_j$  y  $g_j$  como en la demostración de Proposición 4.2.4. Por Proposición 4.2.1 y cálculos directos, resulta que  $\mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{A}_5} = \mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{S}_5}$  y  $\mathbb{A}_5^\sigma = \langle \sigma_1 \rangle \times \langle \sigma_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ . Notar que  $\sigma_j \in \mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{A}_5}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Sean  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_5^\sigma}$  y  $W := g_1v \oplus g_2v \oplus g_3v$ , donde  $\langle v \rangle$  es el espacio vectorial de la representación  $\rho$ ; entonces  $W$  es a subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$ . Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por el mismo argumento dado en la prueba de Proposición 4.2.4.  $\square$

Como una consecuencia inmediata del Lema 4.2.5 tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.6.** *Cualquier álgebra de Hopf punteada compleja  $H$  de dimensión finita con  $G(H) \simeq \mathbb{A}_5$  es necesariamente isomorfa al álgebra de grupo de  $\mathbb{A}_5$ .*

*Demostración.* Sea  $H$  un álgebra de Hopf punteada compleja con  $G(H) \simeq \mathbb{A}_5$ . Sea  $M \in \mathcal{YD}_{\mathbb{C}\mathbb{A}_5}^{\mathbb{C}\mathbb{A}_5}$  la trenza infinitesimal de  $H$  – ver [AS3]. Asumamos que  $H \neq \mathbb{C}\mathbb{A}_5$ ; así,  $M \neq 0$ . Sea  $N \subset M$  un submódulo irreducible. Entonces  $\dim \mathfrak{B}(N) = \infty$ , por Lema 4.2.5. Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(M) = \infty$  y  $\dim H = \infty$ .  $\square$

#### 4.2.4. Caso $\mathbb{A}_6$

Sea  $\sigma$  en  $\mathbb{A}_6$ . Si el tipo de  $\sigma$  es  $(1^6)$ ,  $(1^2, 2^2)$ ,  $(1^3, 3)$ ,  $(3^2)$  ó  $(1, 5)$ , entonces  $\sigma$  es absolutamente real por Lema 4.1.4, y si el tipo de  $\sigma$  es  $(2, 4)$ , entonces  $\sigma$  es real pues tiene orden par – ver Observación 4.2.2 (ii). Luego,  $\mathbb{A}_6$  es un grupo real. Ahora, podemos resumir nuestros resultados en el siguiente enunciado.

**Teorema 4.2.7.** *Sea  $M(\mathcal{O}, \rho)$  un módulo de Yetter-Drinfeld irreducible sobre  $\mathbb{C}\mathbb{A}_6$ , correspondiente al par  $(\mathcal{O}, \rho)$ . Si  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , entonces  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sigma$ , con  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$ , y  $\rho = \text{sgn} \in \widehat{\mathbb{Z}/4}$ .*

*Observación 4.2.8.* En este teorema no se afirma que la condición es suficiente.

*Demostración.* Sea  $\sigma$  en  $\mathbb{A}_6$ . Si el tipo de  $\sigma$  es

- $(1^6)$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para todo  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{A}_6^\sigma}$ , por Lema 2.3.1.
- $(1^3, 3)$ ,  $(3^2)$  ó  $(1, 5)$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para todo  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{A}_6^\sigma}$ , por Lema 2.3.4.

Supongamos que el tipo de  $\sigma$  es  $(1^2, 2^2)$ . Podemos asumir que  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ . Es fácil ver que

$$\mathbb{A}_6^\sigma = \langle a := (3\ 4)(5\ 6), b := (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 6) \rangle \simeq \mathbb{D}_4.$$

Notar que  $\sigma = b^2$ . Se sabe que  $\widehat{\mathbb{D}_4} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$ , donde  $\rho_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  y  $4$ , son los siguientes caracteres

$$\begin{array}{cccc} \rho_1(a) = 1, & \rho_2(a) = -1, & \rho_3(a) = 1, & \rho_4(a) = -1, \\ \rho_1(b) = 1, & \rho_2(b) = 1, & \rho_3(b) = -1, & \rho_4(b) = -1, \end{array}$$

y  $\rho_5$  es la representación de dimensión 2 dada por

$$\rho_5(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_5(b) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Es claro que  $\rho_j(\sigma) = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$  y  $4$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.1. Consideremos ahora que  $\rho = \rho_5$ . Se define  $\sigma_1 := (1\ 2)(3\ 4)$ ,  $\sigma_2 := (1\ 3)(2\ 4)$ ,  $\sigma_3 := (1\ 4)(2\ 3)$ ,  $g_1 := \text{id}$ ,  $g_2 := (1\ 3\ 2)$  y  $g_3 := (1\ 2\ 3)$ . Resulta claro que

$$\rho(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\rho(\sigma_3).$$

Si  $v_1 := \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ , tenemos que  $\rho(\sigma_1)(v_1) = -v_1$  y  $\rho(\sigma_2)(v_1) = v_1 = -\rho(\sigma_3)(v_1)$ . Definimos  $W := \mathbb{C} - \text{span}$  de  $\{g_1 v_1, g_2 v_1, g_3 v_1\}$ . Entonces  $W$  es un subespacio trenzado de  $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$  de tipo Cartan con

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Ya que  $\mathcal{A}$  no es de tipo finito se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por Teorema 2.3.2.

Finalmente, asumamos que el tipo de  $\sigma$  es  $(2, 4)$ . Entonces  $\mathcal{O}_\sigma$  tiene 90 elementos y  $\mathbb{A}_6^\sigma = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/4$ . Llamemos  $\widehat{\mathbb{Z}/4} = \{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ , donde  $\chi_l(\sigma) = i^l$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$ . Es claro que si  $\rho = \chi_l$ , con  $l = 0, 1$  ó  $3$ , entonces  $\rho(\sigma) \neq -1$ . Esto implica que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4.  $\square$

*Observación 4.2.9.* Podemos ver que todo subrack abeliano maximal del rack  $\mathcal{O}_{(12)(3456)}$  tiene dos elementos. Luego,  $M(\mathcal{O}_{(12)(3456)}, \rho)$  es un espacio trenzado negativo.

#### 4.2.5. Caso $\mathbb{A}_7$

El siguiente lema es el paso clave para este caso.

**Lema 4.2.10.** *Sea  $\sigma \in \mathbb{A}_7$ . Entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , para todo  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{A}_7^\sigma}$ .*

*Demostración.* Es fácil ver que  $\mathbb{A}_7$  tiene 9 clases de conjugación cuyos representantes son

$$\begin{array}{lll} s_1 := \text{id}, & s_2 := (1\ 2)(3\ 4), & s_3 := (1\ 2\ 3), \\ s_4 := (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7), & s_5 := (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6), & s_6 := (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6), \\ s_7 := (1\ 2\ 3\ 4\ 5), & s_8 := (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7), & s_9 := (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 6). \end{array}$$

Obviamente,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_1}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_7}$ . En los casos  $j = 3, 5, 7, 8, 9$ , se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_7^{s_j}}$ , por Lema 4.2.3.

Caso  $j = 2$ . El elemento  $s_2 = (1\ 2)(3\ 4)$  es real y se calcula con GAP que su centralizador  $\mathbb{A}_7^{s_2}$  es un grupo no abeliano de orden 24 cuya tabla de caracteres está dada por la Tabla 4.1. Para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq 9$ , denotaremos por  $\rho_k$  a la representación irreducible correspondiente al carácter  $\chi_k$ . Ahora bien, de la tabla de caracteres de  $\mathbb{A}_7^{s_2}$  podemos deducir que si  $k \neq 5, 8, 9$ , entonces  $q_{s_2 s_2} \neq -1$ ; luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k) = \infty$ , para  $k \neq 5, 8, 9$ .

Supongamos que  $k = 5, 8$  ó  $9$ ; luego  $q_{s_2 s_2} = -1$ . Definimos  $\sigma_1 := s_2$ ,

$$\sigma_2 := (1\ 2)(6\ 7) \quad \text{y} \quad \sigma_3 := (3\ 4)(6\ 7).$$



$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ y_k $	1	3	2	2	6	2	6	6	4
$ G^{y_k} $	24	12	4	24	12	12	12	12	4
$ \mathcal{O}_{y_k} $	1	2	6	1	2	2	2	2	6
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
$\chi_3$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$\chi_4$	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1
$\chi_5$	2	2	0	-2	-2	0	0	0	0
$\chi_6$	2	-1	0	2	-1	-2	1	1	0
$\chi_7$	2	-1	0	2	-1	2	-1	-1	0
$\chi_8$	2	-1	0	-2	1	0	$-i\sqrt{3}$	$i\sqrt{3}$	0
$\chi_9$	2	-1	0	-2	1	0	$i\sqrt{3}$	$-i\sqrt{3}$	0

Tabla 4.1: Tabla de caracteres de  $\mathbb{A}_7^{s_2}$ .

Estos elementos están en  $\mathcal{O}_{s_2} \cap \mathbb{A}_7^{s_2}$  y  $\sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{O}_{y_3}^{\mathbb{A}_7^{s_2}}$ . Si elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,  $g_2 := (36)(47)$  y  $g_3 := (16)(27)$ , entonces se cumple que  $g_j s_2 g_j^{-1} = \sigma_j$ ,  $\sigma_j g_1 = g_1 \sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , y

$$\sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_2, \quad \sigma_1 g_3 = g_3 \sigma_3, \quad \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_3, \quad \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_2.$$

Como  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  conmutan existe una base  $\{v_1, v_2\}$  de  $V_k$ , el espacio vectorial de la representación  $\rho_k$ , compuesta por autovectores simultáneos de  $\rho_k(\sigma_1), \rho_k(\sigma_2)$  y  $\rho_k(\sigma_3)$ . Digamos que  $\rho_k(\sigma_2)v_l = \lambda_l v_l$  y  $\rho_k(\sigma_3)v_l = \kappa_l v_l$ ,  $l = 1, 2$ . Notar que  $\lambda_l, \kappa_l = \pm 1$ ,  $l = 1, 2$ , puesto que  $|\sigma_2| = 2 = |\sigma_3|$ . Más aún, como  $\sigma_2 \sigma_3 = s_2$  se tiene que  $\lambda_l \kappa_l = -1$ ,  $l = 1, 2$ . De la Tabla 4.1, podemos deducir que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , pues  $\chi_k(\mathcal{O}_{y_3}^{\mathbb{A}_7^{s_2}}) = 0$ . Reordenando la base podemos suponer que  $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$ . Definimos  $W := \mathbb{C}$ -span  $\{g_1 v_1, g_2 v_2, g_3 v_2\}$ . Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k)$  de tipo Cartan con matriz de coeficientes  $\mathcal{Q}$  y matriz de Cartan  $\mathcal{A}$  como en (4.1). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k) = \infty$ .

Caso  $j = 4$ . El elemento  $s_4 = (123)(45)(67)$  es real y su centralizador es  $\mathbb{A}_7^{s_4} = \langle x \rangle \times \langle s_4 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6$ , con  $x := (46)(57)$ . Luego,  $\mathbb{A}_7^{s_4} = \{\epsilon \otimes \chi_l, \text{sgn} \otimes \chi_l \mid 1 \leq l \leq 6\}$ , con  $\chi_l(s_4) = \omega_6^l$ , y  $\epsilon$  y  $\text{sgn}$  las representaciones trivial y signo del grupo  $\mathbb{Z}/2$ , respectivamente. Si  $\rho = \epsilon \otimes \chi_l$  ó  $\text{sgn} \otimes \chi_l$ , con  $l \neq 3$ , entonces  $q_{s_4 s_4} \neq -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_4}, \rho) = \infty$ .

Supongamos que  $\rho = \epsilon \otimes \chi_3$  ó  $\text{sgn} \otimes \chi_3$ ; luego,  $q_{s_4 s_4} = -1$ . Definimos  $\sigma_1 := s_4$ ,

$$\sigma_2 := (1, 2, 3)(4, 6)(5, 7) = x s_4^4 \quad \text{y} \quad \sigma_3 := (1, 2, 3)(4, 7)(5, 6) = x s_4.$$

Estos elementos están en  $\mathcal{O}_{s_4} \cap \mathbb{A}_7^{s_4}$ . Si elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,  $g_2 := (5, 6, 7)$  y  $g_3 := g_2^{-1}$ , entonces se cumple que  $g_j s_4 g_j^{-1} = \sigma_j$ ,  $\sigma_j g_1 = g_1 \sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , y

$$\sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_3, \quad \sigma_1 g_3 = g_3 \sigma_2, \quad \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_2, \quad \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_3.$$

Luego, es fácil ver que  $W := \mathbb{C}$ -span  $\{g_1 v, g_2 v, g_3 v\}$ , con  $v \in V - 0$ ,  $V$  el espacio vectorial de la representación  $\rho$ , es un subespacio trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_4}, \rho)$  de tipo Cartan con matriz de coeficientes  $\mathcal{Q}$  y matriz de Cartan  $\mathcal{A}$  como en (4.1). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_4}, \rho) = \infty$ .

Caso  $j = 6$ : El elemento  $s_6 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$  es real y su centralizador es  $\mathbb{A}_7^{s_6} = \langle s_6 \rangle \simeq \mathbb{Z}/4$ . Sea  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_7^{s_6}}$ . Si  $q_{s_6 s_6} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho) = \infty$ , por Lemma 2.3.4. Por otro lado, si  $q_{s_6 s_6} = -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho) = \infty$ , por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ , ya que si  $\sigma_1 = s_6$ ,  $\sigma_2 := (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7)$ ,  $\sigma_3 := (1\ 2\ 3\ 4)(6\ 7)$ , entonces  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$  y  $\sigma^{-1} \in \mathcal{O}$ .  $\square$

De manera análoga al caso  $\mathbb{A}_5$  podemos enunciar.

**Teorema 4.2.11.** *Cualquier álgebra de Hopf punteada compleja  $H$  de dimensión finita con  $G(H) \simeq \mathbb{A}_7$  es necesariamente isomorfa al álgebra de grupo de  $\mathbb{A}_7$ .*  $\square$

#### 4.2.6. Caso $\mathbb{A}_8$

El grupo  $\mathbb{A}_8$  tiene 14 clases de conjugación cuyos representantes son  $s_1 := \text{id}$ ,  $s_2 := (1, 2)(3, 4)$ ,

$$\begin{array}{lll} s_3 := (12)(34)(56)(78), & s_4 := (123), & s_5 := (123)(45)(67), \\ s_6 := (123)(456), & s_7 := (1234)(56), & s_8 := (1234)(5678), \\ s_9 := (12345), & s_{10} := (12345)(678), & s_{11} := (12345)(687), \\ s_{12} := (123456)(78), & s_{13} := (1234567), & s_{14} := (1234568). \end{array}$$

Resumimos los resultados obtenidos para este caso en el siguiente enunciado.

**Teorema 4.2.12.** *Sea  $M(\mathcal{O}, \rho)$  un módulo de Yetter-Drinfeld irreducible sobre  $\mathbb{C}\mathbb{A}_8$ , correspondiente al par  $(\mathcal{O}, \rho)$ . Si  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ , entonces  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sigma$ , con  $\sigma = (1234)(5678)$ , y  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_8^\sigma}$  es la representación de grado 1 dada por la Tabla 4.3. En este caso, la trenza es nagativa.*

*Demostración.* Obviamente,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_1}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_8}$ . Si  $j = 4, 6, 9, 10, 11, 13$  ó  $14$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_7^{s_j}}$ , por Lema 4.2.3.

Caso  $j = 12$ . El elemento  $s_{12} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8)$  es real y su centralizador es  $\mathbb{A}_7^{s_{12}} = \langle s_{12} \rangle \simeq \mathbb{Z}/6$ . Luego,  $\widehat{\mathbb{A}_7^{s_{12}}} = \{\chi_l \mid 1 \leq l \leq 6\}$ , con  $\chi_l(s_{12}) = \omega_6^l$ . Si  $l \neq 3$ , entonces  $q_{s_{12}s_{12}} \neq -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{12}}, \chi_l) = \infty$ , por Lema 2.3.4.

Supongamos que  $l = 3$ ; luego  $q_{s_{12}s_{12}} = -1$ . Definamos  $\sigma_1 := s_{12}$ ,  $\sigma_2 := (1, 4, 3, 6, 5, 2)(7, 8)$  y  $\sigma_3 := (1, 6, 3, 2, 5, 4)(7, 8)$ . Es fácil ver que  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$ . Luego, por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ ,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{12}}, \rho) = \infty$ .

Caso  $j = 8$ . El elemento  $s_8 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$  es real y su centralizador  $\mathbb{A}_8^{s_8}$  es un grupo no abeliano de orden 16 cuya tabla de caracteres está dada por Tabla 4.2.

Para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq 10$ , denotaremos por  $\rho_k$  a la representación irreducible correspondiente al carácter  $\chi_k$ . Se calcula con GAP que  $s_8 \in \mathcal{O}_{y_3^{\mathbb{A}_8^{s_8}}}$ . Ahora bien, de la tabla de caracteres de  $\mathbb{A}_8^{s_8}$  podemos deducir que si  $k \neq 2, 3, 4, 5$ , entonces  $q_{s_8 s_8} \neq -1$ ; luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_8}, \rho_k) = \infty$ .

Asumamos que  $k = 2, 3, 4$  ó  $5$ . Se calcula con GAP que  $\gamma g^{-1} s_8 g \in \mathcal{O}_{y_l^{\mathbb{A}_8^{s_8}}}$ , con  $l = 1$  ó  $5$ , para todo  $\gamma \in \mathcal{O}_{s_8} \cap \mathbb{A}_8^{s_8}$ , donde  $\gamma = g s_8 g^{-1}$ . Por lo tanto,  $\rho_k(\gamma g^{-1} s_8 g) = 1$ . Luego, la trenza es negativa.

Mostraremos ahora que si  $k = 3, 4$  ó  $5$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_8}, \rho_k) = \infty$ , mediante la técnica de  $\mathfrak{D}$ , desarrollada en la Subsección 2.4.3.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ y_k $	1	2	4	4	2	4	2	4	4	2
$ G^{y_k} $	16	8	16	8	16	16	8	8	8	8
$ \mathcal{O}_{y_k} $	1	2	1	2	1	1	2	2	2	2
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
$\chi_3$	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
$\chi_4$	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
$\chi_5$	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
$\chi_6$	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
$\chi_7$	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1
$\chi_8$	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$\chi_9$	2	0	2i	0	-2	-2i	0	0	0	0
$\chi_{10}$	2	0	-2i	0	-2	2i	0	0	0	0

Tabla 4.2: Tabla de caracteres de  $\mathbb{A}_8^{ss}$ .

Supongamos que  $k = 4$  ó  $5$ . Tomemos  $x_i, z_i, \sigma_i, \tau_i, 1 \leq i \leq 6$ , como en el caso (I) de la prueba de la Proposición 3.3.14. Luego,  $(x, z)$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ , y si elegimos  $g := (1\ 2)(3\ 4)$ , entonces,  $g \triangleright \sigma_1 = \tau_1$  y  $g^{-1}\sigma_6g = x_1^{-1}$ . Ahora bien, calculamos con GAP que  $x_6, z_1 \in \mathcal{O}_{y_4}^{\mathbb{A}_8^{ss}}$ , la cuarta clase de conjugación del grupo  $\mathbb{A}_8^{ss}$  según el GAP. Así, de la Tabla 4.2, se tiene que  $\rho_k(\tau_1) = \rho_k(g^{-1}\sigma_1g) = \rho_k(\sigma_6) = \rho_k(g^{-1}\sigma_6g) = -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho_k) = \infty$ , por Teorema 2.4.31.

Asumamos que  $k = 3$ . Tomemos  $x_i, z_i, \sigma_i, \tau_i, 1 \leq i \leq 6$  como en el caso (II) de la prueba de la Proposición 3.3.14. Luego,  $(x, z)$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ , y si elegimos  $g := (2\ 6)(4\ 8)$ , entonces,  $g \triangleright \sigma_1 = \tau_1$  y  $g\sigma_6g = t_1^{-1}$ . Ahora bien, calculamos con GAP que  $z_1, z_1^{-1} \in \mathcal{O}_{y_9}^{\mathbb{A}_8^{ss}}$ . De la Tabla 4.2, se tiene que  $\rho_k(\tau_1) = \rho_k(g^{-1}\sigma_1g) = \rho_k(\sigma_6) = \rho_k(g^{-1}\sigma_6g) = -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho_k) = \infty$ , por Teorema 2.4.31.

Se calculó con GAP que la representación  $\rho_2$  que sobrevive está definida por la Tabla 4.3. En la primera columna de dicha tabla aparecen representantes de las clases de conjugación de  $\mathbb{A}_8^{ss}$  y en la segunda el valor que toma la representación  $\rho_2$  en la clase de conjugación correspondiente.

$y$	$\rho_2(y)$
id	1
$(5,7)(6,8)$	-1
$(1,2,3,4)(5,6,7,8)$	-1
$(1,2,3,4)(5,8,7,6)$	1
$(1,3)(2,4)(5,7)(6,8)$	1
$(1,4,3,2)(5,8,7,6)$	-1
$(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$	-1
$(1,5,3,7)(2,6,4,8)$	1
$(1,6,3,8)(2,7,4,5)$	1
$(1,6)(2,7)(3,8)(4,5)$	-1

Tabla 4.3: La representación  $\rho_2$  de  $\mathbb{A}_8^{ss}$ .

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$ y_k $	1	2	2	4	3	2	2	6	2	2	4	4	4
$ G^{y_k} $	192	32	16	8	6	192	16	6	32	32	16	8	8
$ \mathcal{O}_{y_k} $	1	6	12	24	32	1	12	32	6	6	12	24	24
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1
$\chi_3$	2	2	0	0	-1	2	0	-1	2	2	2	0	0
$\chi_4$	3	-1	1	-1	0	3	1	0	-1	3	-1	-1	1
$\chi_5$	3	-1	-1	1	0	3	-1	0	-1	3	-1	1	-1
$\chi_6$	3	3	1	1	0	3	1	0	-1	-1	-1	-1	-1
$\chi_7$	3	-1	1	-1	0	3	1	0	3	-1	-1	1	-1
$\chi_8$	3	-1	-1	1	0	3	-1	0	3	-1	-1	-1	1
$\chi_9$	3	3	-1	-1	0	3	-1	0	-1	-1	-1	1	1
$\chi_{10}$	4	0	-2	0	1	-4	2	-1	0	0	0	0	0
$\chi_{11}$	4	0	2	0	1	-4	-2	-1	0	0	0	0	0
$\chi_{12}$	6	-2	0	0	0	6	0	0	-2	-2	2	0	0
$\chi_{13}$	8	0	0	0	-1	-8	0	1	0	0	0	0	0

Tabla 4.4: Tabla de caracteres de  $\mathbb{A}_8^{s_3}$ .

Caso  $j = 7$ . El elemento  $s_7 = (1234)(56)$  es real y su centralizador es  $\mathbb{A}_8^{s_7} = \langle x \rangle \times \langle s_7 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ , con  $x = (56)(78)$ . Sea  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_8^{s_7}}$ . Si  $q_{s_7 s_7} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_7}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Mientras que si  $q_{s_7 s_7} = -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_7}, \rho) = \infty$ , por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ ; en efecto, si  $\sigma_0 := s_7$ ,  $\sigma_1 := (1234)(57)$  y  $\sigma_2 := (1234)(67)$ , entonces  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$ .

Caso  $j = 5$ . El elemento  $s_5 = (123)(45)(67)$  es real y su centralizador es  $\mathbb{A}_8^{s_5} = \langle x \rangle \times \langle s_5 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6$ , con  $x = (4,6)(5,7)$ . Sea  $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_8^{s_5}}$ . Si  $q_{s_5 s_5} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_5}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Asumamos que  $q_{s_5 s_5} = -1$ . Sean  $\sigma_0 := s_5$ ,  $\sigma_1 := (123)(45)(68)$  y  $\sigma_2 := (123)(45)(78)$ , entonces  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq 2}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$ . Luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_5}, \rho) = \infty$ , por Corolario 2.4.10.

Caso  $j = 3$ . El elemento  $s_3 = (12)(34)(56)(78)$  es real y su centralizador  $\mathbb{A}_8^{s_3}$  es un grupo no abeliano de orden 192 cuya tabla de caracteres está dada por la Tabla 4.4.

Para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq 13$ , denotaremos por  $\rho_k$  a la representación irreducible correspondiente al carácter  $\chi_k$ . Ahora bien, de la tabla de caracteres de  $\mathbb{A}_8^{s_3}$  podemos deducir que si  $k \neq 10, 11, 13$ , entonces  $q_{s_3 s_3} \neq -1$ ; luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_3}, \rho_k) = \infty$ .

Supongamos que  $k = 10$ . Luego,  $\deg \rho_k = 4$  y  $q_{s_3 s_3} = -1$ . Sean  $\sigma_1 := s_3$ ,

$$\sigma_2 := (1, 2)(3, 4)(5, 7)(6, 8) \quad \text{y} \quad \sigma_3 := (1, 2)(3, 4)(5, 8)(6, 7);$$

es claro que  $\sigma_l \in \mathcal{O}_{s_3} \cap \mathbb{A}_8^{s_3}$ ,  $1 \leq l \leq 3$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,  $g_2 := (6, 7, 8)$  y  $g_3 := g_2^{-1}$ . Luego,  $g_l \sigma_1 g_l^{-1} = \sigma_l$ ,  $\sigma_l g_1 = g_1 \sigma_l$ ,  $1 \leq l \leq 3$ , y se satisfacen las siguientes relaciones

$$\sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_3, \quad \sigma_1 g_3 = g_3 \sigma_2, \quad \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_2, \quad \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_3.$$

Puesto que  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  conmutan, existe una base  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  de  $V_{10}$ , el espacio vectorial de la representación  $\rho_{10}$ , compuesta por autovectores simultáneos de  $\rho_{10}(\sigma_1)$ ,  $\rho_{10}(\sigma_2)$  y  $\rho_{10}(\sigma_3)$ . Digamos

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$ y_k $	1	3	2	2	4	2	6	2	2	6	6	2	4	4
$ G^{y_k} $	96	12	32	8	8	96	12	32	48	12	12	16	8	8
$ \mathcal{O}_{y_k} $	1	8	3	12	12	1	8	3	2	8	8	6	12	12
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
$\chi_3$	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\chi_4$	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
$\chi_5$	2	-1	2	0	0	2	-1	2	-2	1	1	-2	0	0
$\chi_6$	2	-1	2	0	0	2	-1	2	2	-1	-1	2	0	0
$\chi_7$	2	2	2	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0
$\chi_8$	2	-1	2	0	0	-2	1	-2	0	$i\sqrt{3}$	$-i\sqrt{3}$	0	0	0
$\chi_9$	2	-1	2	0	0	-2	1	-2	0	$-i\sqrt{3}$	$i\sqrt{3}$	0	0	0
$\chi_{10}$	3	0	-1	-1	1	3	0	-1	-3	0	0	1	1	-1
$\chi_{11}$	3	0	-1	1	-1	3	0	-1	-3	0	0	1	-1	1
$\chi_{12}$	3	0	-1	-1	1	3	0	-1	3	0	0	-1	-1	1
$\chi_{13}$	3	0	-1	1	-1	3	0	-1	3	0	0	-1	1	-1
$\chi_{14}$	6	0	-2	0	0	-6	0	2	0	0	0	0	0	0

Tabla 4.5: Tabla de caracteres de  $\mathbb{A}_8^{s_2}$ .

que  $\rho_{10}(\sigma_2)v_l = \lambda_l v_l$  y  $\rho_{10}(\sigma_3)v_l = \kappa_l v_l$ ,  $1 \leq l \leq 4$ , donde  $\lambda_l, \kappa_l = \pm 1$ ,  $1 \leq l \leq 4$ , ya que  $|\sigma_2| = 2 = |\sigma_3|$ . Se calcula con GAP que  $\sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{O}_{y_7}^{\mathbb{A}_8^{s_3}}$ . De la Tabla 4.4, podemos deducir que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4$ ; así, reordenando la base  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , podemos suponer que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  y  $\lambda_4 = -1$ . Por otro lado,  $\sigma_2\sigma_3 = (56)(78) \in \mathcal{O}_{y_2}^{\mathbb{A}_8^{s_3}}$ . De la Tabla 4.4, se tiene que  $\lambda_1\kappa_1 + \lambda_2\kappa_2 + \lambda_3\kappa_3 + \lambda_4\kappa_4 = 0$ . Luego,  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4 = 0$ , y esto implica que  $\kappa_4 = 1$ , y  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 1$ . Ahora, reordenando  $v_1, v_2, v_3$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\kappa_1 = -1$ . Definimos  $W := \mathbb{C} - \text{span de } \{g_1v_1, g_2v_1, g_3v_1\}$ ; luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_3}, \rho_{10})$  de tipo Cartan, con matriz de coeficientes y matriz de Cartan dadas por (4.1). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_3}, \rho_{10}) = \infty$ . Si  $k = 11$  ó  $13$  se procede de manera análoga.

Caso  $j = 2$ . El elemento  $s_2 = (12)(34)$  es real y su centralizador  $\mathbb{A}_8^{s_2}$  es un grupo no abeliano de orden 96 cuya tabla de caracteres está dada por la Tabla 4.5.

Para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq 14$ , denotaremos por  $\rho_k$  a la representación irreducible correspondiente al carácter  $\chi_k$ . Ahora bien, de la tabla de caracteres de  $\mathbb{A}_8^{s_2}$  podemos deducir que si  $k \neq 7, 8, 9, 14$ , entonces  $q_{s_2s_2} \neq -1$ ; luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k) = \infty$ .

Supongamos que  $k = 7, 8, 9$  ó  $14$ . Sean  $\sigma_1 := s_2$ ,  $\sigma_2 := (13)(24)$  y  $\sigma_3 := (14)(23)$ ; es claro que  $\sigma_j \in \mathcal{O}_{s_2} \cap \mathbb{A}_8^{s_2}$ ,  $1 \leq j \leq 3$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,  $g_2 := (234)$  y  $g_3 := g_2^{-1}$ . Luego,  $g_j\sigma_1g_j^{-1} = \sigma_j$ ,  $\sigma_jg_1 = g_1\sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , y se satisfacen las siguientes relaciones

$$\sigma_1g_2 = g_2\sigma_3, \quad \sigma_1g_3 = g_3\sigma_2, \quad \sigma_3g_2 = g_2\sigma_2, \quad \sigma_2g_3 = g_3\sigma_3.$$

Como  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  conmutan, existe un autovector simultáneo  $v$  para los operadores  $\rho_k(\sigma_1), \rho_k(\sigma_2)$  y  $\rho_k(\sigma_3)$ , digamos que  $\rho_k(\sigma_2)v = \lambda v$  y  $\rho_k(\sigma_3)v = \kappa v$ . Notar que  $\lambda, \kappa = \pm 1$ , puesto que  $|\sigma_2| = 2 = |\sigma_3|$ . Más aún, como  $\sigma_2\sigma_3 = s_2$ , se tiene que  $\lambda\kappa = -1$ . Definimos  $W := \mathbb{C} - \text{span } \{g_1v, g_2v, g_3v\}$ . Luego,

$W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k)$  de tipo diagonal con matriz de coeficientes  $\mathcal{Q}$  dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & \kappa & \lambda \\ \lambda & -1 & \kappa \\ \kappa & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

cuya matriz de Cartan es como en (4.1). Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k) = \infty$ .  $\square$

*Observación 4.2.13.* El espacio vectorial trenzado  $M(\mathcal{O}_{s_8}, \rho_2)$  tiene dimensión  $|\mathcal{O}_{s_8}| = 1260$ .

#### 4.2.7. Caso $\mathbb{A}_m$ , $m \geq 8$

Sea  $\sigma \in \mathbb{A}_m$ , con  $|\sigma|$  par. Investigamos ahora las álgebras de Nichols asociadas con  $\sigma$  por reducción al estudio análogo para la órbita de  $\sigma$  en  $\mathbb{S}_m$ . Por Observación 4.2.2 (ii),  $\mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{A}_m} = \mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{S}_m}$  y  $[\mathbb{S}_m^\sigma : \mathbb{A}_m^\sigma] = 2$ . Así, podemos determinar las representaciones irreducibles de  $\mathbb{A}_m^\sigma$  a partir de las de  $\mathbb{S}_m^\sigma$ . Sabemos que si el tipo de  $\sigma$  es  $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$ , entonces  $\mathbb{S}_m^\sigma = T_1 \cdots T_m$ , con  $T_i \simeq (\mathbb{Z}/i)^{n_i} \rtimes \mathbb{S}_{n_i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

**Algunas generalidades y notación.** Sean  $G$  un grupo finito,  $H$  un subgrupo de  $G$  de índice dos, y  $\eta$  una representación de  $G$ . Es fácil ver que

$$\eta'(g) := \begin{cases} \eta(g), & \text{si } g \in H, \\ -\eta(g), & \text{si } g \in G \setminus H, \end{cases}$$

define una nueva representación de  $G$ . Notar que  $\text{Res}_H^G \eta = \text{Res}_H^G \eta'$ . Por otro lado, cualquier representación  $\rho$  de  $H$  define una representación  $\bar{\rho}$  de  $H$  dada por  $\bar{\rho}(h) := \rho(ghg^{-1})$ , para todo  $h \in H$ , donde  $g$  es un elemento arbitrario fijo en  $G \setminus H$ . A  $\bar{\rho}$  la llamaremos la *representación conjugada de  $\rho$* . Ya que  $g$  es único, salvo multiplicación por un elemento de  $H$ , la representación conjugada es única salvo isomorfismo.

Sea  $s \in H$  tal que  $\mathcal{O}_s^H = \mathcal{O}_s^G$ ; luego,  $[G^s : H^s] = 2$ . Sea  $\eta$  en  $\widehat{G^s}$ . Entonces tenemos dos casos:

- (i)  $\eta \not\simeq \eta'$ . Si  $\rho := \text{Res}_{H^s}^{G^s} \eta$ , entonces  $\rho \in \widehat{H^s}$ ,  $\rho \simeq \bar{\rho}$  y  $\text{Ind}_{H^s}^{G^s} \rho \simeq \eta \oplus \eta'$ .
- (ii)  $\eta \simeq \eta'$ . Se tiene que  $\text{Res}_{H^s}^{G^s} \eta \simeq \rho \oplus \bar{\rho}$  y  $\text{Ind}_{H^s}^{G^s} \rho \simeq \eta \simeq \text{Ind}_{H^s}^{G^s} \bar{\rho}$ .

Más aún, si  $\rho$  es una representación irreducible de  $H^s$ , entonces  $\rho$  es una restricción de alguna  $\eta \in \widehat{G^s}$  ó es un sumando directo de  $\text{Res}_{H^s}^{G^s} \eta$  como en (ii), ver [FuHa, Ch. 5].

*Observación 4.2.14.* Si  $\eta \in \widehat{G^s}$  y  $\rho := \text{Res}_{H^s}^{G^s} \eta$ , es fácil comprobar que

$$M(\mathcal{O}_s^G, \eta) \simeq M(\mathcal{O}_s^H, \rho), \quad \text{para el caso (i),} \quad (4.2)$$

$$M(\mathcal{O}_s^G, \eta) \simeq M(\mathcal{O}_s^H, \rho) \oplus M(\mathcal{O}_s^H, \bar{\rho}), \quad \text{para el caso (ii),} \quad (4.3)$$

como espacios vectoriales trenzados.

Aplicamos esta observación para el caso  $G = \mathbb{S}_m$  y  $H = \mathbb{A}_m$ . Usaremos la notación dada en el capítulo anterior.

**Lema 4.2.15.** *Supongamos que el tipo de  $\sigma$  es  $((2r)^n)$ , con  $r \geq 1$  y  $n$  par. Sea  $\rho$  en  $\widehat{\mathbb{A}}_m^\sigma$ , con  $m = 2rn$ .*

- (a) *Si  $q_{\sigma\sigma} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .*
- (b) *Si  $\rho \simeq \bar{\rho}$  y  $q_{\sigma\sigma} = -1$ , entonces*
- (I) *si  $r = 1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .*
- (II) *Asumamos que  $r > 1$ . Si  $\deg \rho > 1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ . Supongamos que  $\deg \rho = 1$ . Si  $\rho = \chi_{r, \dots, r} \otimes \mu$ , con  $r$  par o impar, ó si  $\rho = \chi_{c, \dots, c} \otimes \mu$ , con  $r$  par y  $c = \frac{r}{2}$  ó  $\frac{3r}{2}$ , donde  $\mu = \varepsilon$  ó  $\text{sgn}$ , entonces la trenza es negativa; en caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ .*

*Demostración.* (a) sigue por Observación 4.2.2 (ii) y Lema 2.3.4. (b). Puesto que  $\rho \simeq \bar{\rho}$ ,  $\rho = \text{Res}_{\mathbb{A}_m^\sigma}^{\mathbb{S}_m^\sigma}(\eta)$ , con  $\eta \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$ ,  $\eta \not\simeq \eta'$  e  $\text{Ind}_{\mathbb{A}_m^\sigma}^{\mathbb{S}_m^\sigma} \rho \simeq \eta \oplus \eta'$ . Notar que  $\eta(\sigma) = -\text{Id}$  porque  $\rho(\sigma) = -\text{Id}$ . Ahora bien, como los racks son los mismos, i. e.  $\mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{A}_m} = \mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{S}_m}$ , el resultado sigue por lo demostrado en el capítulo anterior.  $\square$

*Observación 4.2.16.* Mantenemos la notación del lema. Si  $\rho$  no es isomorfa a su representación conjugada  $\bar{\rho}$ , entonces existe  $\eta \in \widehat{\mathbb{S}}_m^\sigma$  tal que  $\text{Res}_{\mathbb{A}_m^\sigma}^{\mathbb{S}_m^\sigma}(\eta) = \rho \oplus \bar{\rho}$  e  $\text{Ind}_{\mathbb{A}_m^\sigma}^{\mathbb{S}_m^\sigma} \rho \simeq \eta \simeq \eta' \simeq \text{Ind}_{\mathbb{A}_m^\sigma}^{\mathbb{S}_m^\sigma} \bar{\rho}$ . Claramente,  $\eta(\sigma)$  y  $\bar{\rho}(\sigma)$  actúa por escalar  $-1$ , y resulta que  $M(\mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{S}_m}, \eta) \simeq M(\mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{A}_m}, \rho) \oplus M(\mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{A}_m}, \bar{\rho})$  como espacios vectoriales trenzados. No se consigue nueva información con las técnicas actuales disponibles.

### 4.3. Álgebras de Nichols sobre los grupos diedrales

El grupo diedral  $\mathbb{D}_m$  de orden  $2m$  está generado por  $x$  e  $y$  con relaciones  $x^2 = e = y^m$  y  $xyx = y^{-1}$ . Sea  $\chi$  el carácter de  $\mathbb{Z}/m \simeq \langle y \rangle$ , dado por  $\chi(y) = \omega_m$ , con  $\omega_m$  la primera raíz  $m$ -ésima primitiva de la unidad. Denotaremos indistintamente por  $\mathcal{O}_\sigma$  ó por  $\mathcal{O}_\sigma^m$  a la clase de conjugación de un elemento  $\sigma$  en  $\mathbb{D}_m$ .

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $M(\mathcal{O}, \rho)$  el módulo de Yetter-Drinfeld irreducible sobre  $\mathbb{CD}_m$  correspondiente al par  $(\mathcal{O}, \rho)$ . Supongamos que su álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  es de dimensión finita.*

- (a) *Si  $m$  es impar, entonces  $(\mathcal{O}, \rho) = (\mathcal{O}_x, \text{sgn})$ , donde  $\text{sgn} \in \widehat{\mathbb{D}}_m^x$ ,  $\mathbb{D}_m^x = \langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/2$ .*
- (b) *Si  $m = 2n$  es par, entonces  $(\mathcal{O}, \rho)$  es una de las siguientes:*
- (i)  $(\mathcal{O}_{y^n}, \rho)$  donde  $\rho \in \widehat{\mathbb{D}}_m$  satisface  $\rho(y^n) = -1$ .
- (ii)  $(\mathcal{O}_{y^h}, \chi^j)$  donde  $1 \leq h \leq m-1$ ,  $h \neq n$  y  $\omega_m^{hj} = -1$ .
- (iii)  $(\mathcal{O}_x, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$  ó  $(\mathcal{O}_x, \text{sgn} \otimes \varepsilon)$ , donde  $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$ ,  $\text{sgn} \otimes \varepsilon \in \widehat{\mathbb{D}}_m^x$ ,  $\mathbb{D}_m^x = \langle x \rangle \oplus \langle y^n \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ .
- (iv)  $(\mathcal{O}_{xy}, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$  ó  $(\mathcal{O}_{xy}, \text{sgn} \otimes \varepsilon)$ , donde  $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$ ,  $\text{sgn} \otimes \varepsilon \in \widehat{\mathbb{D}}_m^{xy}$ ,  $\mathbb{D}_m^{xy} = \langle xy \rangle \oplus \langle y^n \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ .

*En los casos (i) y (ii) la dimensión es finita. En los casos (iii) y (iv), la trenza es negativa.*

Clase de conjugación	Centralizador	Representación	$\dim \mathfrak{B}(V)$
$e$	$\mathbb{D}_m$	cualquiera	$\infty$
$\mathcal{O}_{y^h} = \{y^{\pm h}\}, h \neq 0,  \mathcal{O}_{y^h}  = 2$	$\mathbb{Z}/m \simeq \langle y \rangle$	cualquiera	$\infty$
$\mathcal{O}_x = \{xy^h : 0 \leq h \leq m-1\},  \mathcal{O}_x  = m$	$\mathbb{Z}/2 \simeq \langle x \rangle$	$\varepsilon$	$\infty$
		sgn	trenza negativa

Tabla 4.6: Álgebras de Nichols de módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre  $\mathbb{D}_m$ ,  $m$  impar.

*Observación 4.3.2.* Existen isomorfismos de espacios vectoriales trenzados

$$\begin{aligned} M(\mathcal{O}_x, \text{sgn} \otimes \text{sgn}) &\simeq M(\mathcal{O}_{xy}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}), \\ M(\mathcal{O}_x, \text{sgn} \otimes \varepsilon) &\simeq M(\mathcal{O}_{xy}, \text{sgn} \otimes \varepsilon). \end{aligned}$$

*Observación 4.3.3.* Asumamos por simplicidad que  $m$  es impar y que  $m = de$ , donde  $d, e$  son enteros  $\geq 2$ . Entonces el rack (indecomponible)  $\mathcal{O}_x^m$  es una unión disjunta de  $e$  racks isomorfos a  $\mathcal{O}_x^d$ ; en otras palabras,  $\mathcal{O}_x^m$  es una extensión de  $\mathcal{O}_x^e$  por  $\mathcal{O}_x^d$  (y viceversa), ver [AGñ1, Sección 2]. Así, existe un epimorfismo de espacios vectoriales trenzados  $M(\mathcal{O}_x^m, \text{sgn}) \rightarrow M(\mathcal{O}_x^e, \text{sgn})$ , como así también una inclusión  $M(\mathcal{O}_x^d, \text{sgn}) \rightarrow M(\mathcal{O}_x^m, \text{sgn})$ . Las técnicas actuales no permiten calcular el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_x^m, \text{sgn})$  a partir del álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_x^e, \text{sgn})$ .

*Observación 4.3.4.* En el Teorema 4.3.1 *no* afirmamos que las condiciones son suficientes. Ver Tablas 4.6, 4.7. Por ejemplo, se sabe que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_x^m, \text{sgn}) < \infty$  cuando  $m = 3$  – ver [MS]; para otro  $m$  impar, el problema está abierto.

Procedemos ahora con la demostración del Teorema 4.3.1.

*Demostración.* Si  $\sigma = \text{id}$ , entonces  $q_{\sigma\sigma} = 1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.1.

Consideramos dos casos.

*CASO 1:  $m$  impar.*

(I) Si  $\sigma = y^h$ , con  $1 \leq h \leq m$ , es fácil ver que  $\mathcal{O}_{y^h} = \{y^h, y^{-h}\}$  y  $\mathbb{D}_m^{y^h} = \langle y \rangle \simeq \mathbb{Z}/m$ . Entonces  $\widehat{\mathbb{Z}/m} = \{\chi_l\}_{l=1}^m$ , donde  $\chi_l(y) = \omega_m^l$ .  $M(\mathcal{O}_{y^h}, \chi_l)$  es un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal. Si  $q_{\sigma\sigma} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{y^h}, \chi_l) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Asumamos  $q_{\sigma\sigma} = -1$ ; así, se tiene que  $-1 = \chi_l(\sigma) = \chi_l(y^h) = \omega_m^{lh}$ . Esto es una contradicción porque  $m$  es impar.

(II) Si  $\sigma = x$ , entonces  $\mathcal{O}_x = \{x, xy, \dots, xy^{m-1}\}$  y  $\mathbb{D}_m^x = \langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/2$ . Claramente,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_x, \varepsilon) = \infty$ . Por otro lado,  $M(\mathcal{O}_x, \text{sgn})$  es un espacio vectorial trenzado negativo, porque todo subrack abeliano de  $\mathcal{O}_x$  tiene un solo elemento; en efecto,  $xy^j xy^k = xy^k xy^j$ ,  $0 \leq j, k \leq m-1$ , si y sólo si  $j = k$ .

*CASO 2:  $m$  par.* Digamos que  $m = 2n$ .

(I) Si  $\sigma = y^n$ , entonces  $\mathcal{O}_{y^n} = \{y^n\}$  y  $\mathbb{D}_m^{y^n} = \mathbb{D}_m$ . Resulta claro que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{y^n}, \rho) = \infty$ , para todo  $\rho \in \widehat{\mathbb{D}_m}$  con  $\rho(\sigma) = \text{Id}$ . Por otro lado, si  $(\rho, V) \in \widehat{\mathbb{D}_m}$  es tal que  $\rho(\sigma) = -\text{Id}$ , entonces se tiene que  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{y^n}, \rho) = \wedge(V)$ , el álgebra exterior de  $V$ ; luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{y^n}, \rho) = 2^{\dim V}$ .



Clase de conjugación	Centralizador	Representación	$\dim \mathfrak{B}(V)$
$e$	$\mathbb{D}_m$	cualquiera	$\infty$
$\mathcal{O}_{y^n} = \{y^n\},  \mathcal{O}_{y^n}  = 1$	$\mathbb{D}_m$	$(V, \rho) \in \widehat{\mathbb{D}_m},$ $\rho(y^n) = 1$	$\infty$
		$(V, \rho) \in \widehat{\mathbb{D}_m},$ $\rho(y^n) = -1$	$2^{\dim V}$
$\mathcal{O}_{y^h} = \{y^{\pm h}\}, h \neq 0, n,$ $ \mathcal{O}_{y^h}  = 2$	$\mathbb{Z}/m \simeq \langle y \rangle$	$\chi^j,$ $\omega_m^{hj} = -1$	4
		$\chi^j,$ $\omega_m^{hj} \neq -1$	$\infty$
$\mathcal{O}_x = \{xy^{2h} : 0 \leq h \leq n-1\}$ $ \mathcal{O}_x  = n$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \simeq \langle x \rangle \oplus \langle y^n \rangle$	$\varepsilon \otimes \varepsilon,$ $\varepsilon \otimes \text{sgn}$	$\infty$
		$\text{sgn} \otimes \text{sgn},$ $\text{sgn} \otimes \varepsilon$	trenza negativa
$\mathcal{O}_{xy} = \{xy^{2h+1} : 0 \leq h \leq n-1\}$ $ \mathcal{O}_{xy}  = n$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \simeq \langle xy \rangle \oplus \langle y^n \rangle$	$\varepsilon \otimes \varepsilon,$ $\varepsilon \otimes \text{sgn}$	$\infty$
		$\text{sgn} \otimes \text{sgn},$ $\text{sgn} \otimes \varepsilon$	trenza negativa

Tabla 4.7: Álgebras de Nichols de módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre  $\mathbb{D}_m$ ,  $m = 2n$  par.

(II) Si  $\sigma = y^h$ ,  $h \neq 0, n$ ; entonces  $\mathcal{O}_{y^h} = \{y^h, y^{-h}\}$  y  $\mathbb{D}_m^{y^h} = \langle y \rangle \simeq \mathbb{Z}/m$ . Por el Lema 2.3.4, es claro que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{y^h}, \chi_l) = \infty$ , para todo  $l$  tal que  $\chi_l(y^h) \neq -1$ , i. e.  $\omega_m^{hl} \neq -1$ . Por otro lado, es fácil ver que  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{y^h}, \chi_l) = \wedge(M(\mathcal{O}_{y^h}, \chi_l))$ , por lo tanto  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{y^h}, \chi_l) = 4$ , para todo  $\chi_l$  con  $\chi_l(y^h) = -1$ .

(III) Si  $\sigma = x$ , entonces  $\mathcal{O}_x = \{xy^{2h} : 0 \leq h \leq n-1\}$  y  $\mathbb{D}_m^x = \langle x \rangle \oplus \langle y^n \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ . Por Lema 2.3.1,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_x, \varepsilon \otimes \varepsilon) = \dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_x, \varepsilon \otimes \text{sgn}) = \infty$ .

Para los casos  $\rho = \text{sgn} \otimes \varepsilon$  o  $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$ , hacemos notar el siguiente hecho.

(i) Si  $n$  es impar y  $0 \leq j, k \leq n-1$ , se tiene que

$$xy^{2j}xy^{2k} = xy^{2k}xy^{2j} \quad \text{si y sólo si } j = k.$$

(ii) Si  $n$  es par y  $0 \leq j \leq k \leq n-1$ , tenemos que

$$xy^{2j}xy^{2k} = xy^{2k}xy^{2j} \quad \text{si y sólo si } k = j \text{ ó } j + \frac{n}{2}.$$

Los casos (i) y (ii) dicen que todo subrack abeliano maximal de  $\mathcal{O}_x$  tiene uno y dos elementos, respectivamente. Luego, en ambos casos la trenza es negativa. En efecto, el resultado es obvio para el caso (i), mientras que en el caso (ii) tenemos que si  $\sigma_j := xy^{2j} = xy^j x (xy^j)^{-1}$  y  $\sigma_k := xy^{2k} = xy^k x (xy^k)^{-1}$  conmutan en  $\mathcal{O}_x$ , entonces  $q_{jj} = -1 = q_{kk}$  y  $q_{jk}q_{kj} = 1$ ; así, la trenza resulta negativa.

(IV) Si  $\sigma = xy$ , entonces  $\mathcal{O}_{xy} = \{xy^{2h+1} : 0 \leq h \leq n-1\}$  y  $\mathbb{D}_m^{xy} = \langle xy \rangle \oplus \langle y^n \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ . El resultado sigue como en (III) usando el isomorfismo  $\mathbb{D}_m \rightarrow \mathbb{D}_m$ ,  $x \mapsto xy$ ,  $y \mapsto y$  - ver Observación 4.3.2.  $\square$



## Capítulo 5

# Álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos de Mathieu simples

En este capítulo, aplicamos la estrategia de eliminación por medio de subracks abelianos y no abelianos a los grupos de Mathieu simples. Sea  $G$  un grupo de Mathieu simple,  $s \in G$ ,  $\mathcal{O}_s$  la clase de conjugación de  $s$  y  $\rho$  una representación irreducible del centralizador de  $s$ . Se probará que o bien el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_s, \rho)$  es de dimensión infinita, o bien la trenza del módulo de Yetter-Drinfeld  $M(\mathcal{O}_s, \rho)$  es negativa. Los casos de trenza negativa son listados en la Tabla 5.1. Como consecuencia de estos resultados se obtiene que si  $G = M_{22}$  ó  $M_{24}$ , entonces el álgebra de grupo de  $G$  es (salvo isomorfismo) la única álgebra de Hopf punteada compleja de dimensión finita  $H$  con grupo de elementos de tipo grupo isomorfo a  $G$ .

Los resultados aquí presentados forman parte del trabajo [F].

Se hizo uso del sistema de cómputo de álgebra discreta GAP [Sch+] para calcular tablas de caracteres, representantes de clases de conjugación, intersecciones entre centralizadores y clases de conjugación. Estos cómputos están disponibles en [www.mate.uncor.edu/~fantino/GAP/mathieu.htm](http://www.mate.uncor.edu/~fantino/GAP/mathieu.htm). En buena parte del capítulo la frase “se computa” significa que se ha hecho el cálculo con el sistema de cómputo de álgebra discreta mencionado.

Resumimos en el siguiente enunciado el contenido del presente capítulo.

**Teorema 7.** *Sea  $G$  un grupo de Mathieu simple,  $s \in G$ ,  $\mathcal{O}_s$  la clase de conjugación de  $s$  y  $\rho \in \widehat{G}^s$ . La trenza es negativa en los casos listados en la Tabla 5.1. En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_s, \rho) = \infty$ . En particular, cualquier álgebra de Hopf punteada compleja de dimensión finita  $H$  con  $G(H) \simeq M_{22}$  ó  $M_{24}$  es isomorfa al álgebra de grupo  $\mathbb{C}M_{22}$  ó  $\mathbb{C}M_{24}$ , respectivamente.*

### 5.1. Usando técnicas basadas en subracks abelianos

En esta sección, se determinan condiciones necesarias sobre los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre un grupo de Mathieu simple para que sus correspondientes álgebras de Nichols sean de dimensión finita mediante técnicas de subracks abelianos.

Se seguirá las convenciones dadas en los capítulos anteriores. Se denotará  $\omega_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , donde  $i = \sqrt{-1}$ . La representación del grupo cíclico  $\mathbb{Z}/2n = \langle [1] \rangle$  correspondiente a  $\rho([1]) = \omega_{2n}^n = -1$

$G$	$j$	$ s_j $	Centralizador	Representación	$\dim M(\mathcal{O}_{s_j}, \rho)$
$M_{11}$	4	4	$\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/8, x^6 = s_4$	$\nu_2(x) := i$	990
				$\nu_6(x) := -i$	
	6	8	$\langle s_6 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	990
	7	8	$\langle s_7 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	990
$M_{12}$	13	10	$\langle s_{13} \rangle \simeq \mathbb{Z}/10$	$\chi_{(-1)}$	9504
$M_{23}$	12	14	$\langle s_{12} \rangle \simeq \mathbb{Z}/14$	$\chi_{(-1)}$	728640
	13	14	$\langle s_{13} \rangle \simeq \mathbb{Z}/14$	$\chi_{(-1)}$	728640

Tabla 5.1: Grupos de Mathieu simples: casos abiertos.

será denotada por  $\chi_{(-1)}$ . Para  $y \in G^s$ , se denotará a la clase de conjugación de  $y$  en el grupo  $G^s$  por  $\mathcal{O}_y^{G^s}$ .

En las tablas de caracteres, que aparecen a partir de la Sección 5.1.1, se incluye la siguiente información. La primera fila enumera las clases de conjugación del grupo con el parámetro  $j$  o  $k$ , la segunda fila da el orden de un representante de cada clase de conjugación, la tercera fila da el orden del centralizador del representante en el grupo correspondiente. A los efectos de simplificar la escritura, en algunas tablas de caracteres se omitirá el cardinal de las clases de conjugación y el orden de los centralizadores. Además, para una mejor lectura de dichas tablas se denotará por  $z'$  (y no por  $\bar{z}$ ) al conjugado de un número complejo  $z$ .

A lo largo de este capítulo, se usará la notación dada en el GAP para denotar a un ciclo; esto es, se utilizará comas para separar los elementos en los ciclos. Por ejemplo, denotaremos aquí a un  $l$ -ciclo por  $\tau = (j_1, \dots, j_l)$  mientras que en los capítulos anteriores lo denotábamos  $\tau = (j_1 \cdots j_l)$ .

### 5.1.1. El grupo $M_{11}$

El grupo de Mathieu simple  $M_{11}$  puede ser dado como un subgrupo de  $\mathbb{S}_{11}$  de la siguiente manera

$$M_{11} := \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11), (3, 7, 11, 8)(4, 10, 5, 6) \rangle.$$

En la Tabla 5.2, se muestra la tabla de caracteres de  $M_{11}$ , donde  $A = (-1 - i\sqrt{11})/2$ ,  $B = i\sqrt{2}$ . Explícitamente, los representantes de las clases de conjugación de  $M_{11}$  son

$$\begin{aligned}
s_1 &:= \text{id}, & s_2 &:= (1, 9, 7, 10, 8, 11, 5, 4, 3, 6, 2), \\
s_3 &:= (1, 7, 8, 5, 3, 2, 9, 10, 11, 4, 6), & s_4 &:= (1, 8, 2, 7)(4, 6, 10, 5), \\
s_5 &:= (1, 2)(4, 10)(5, 6)(7, 8), & s_6 &:= (1, 3, 11, 6, 7, 10, 4, 5)(8, 9), \\
s_7 &:= (1, 10, 11, 5, 7, 3, 4, 6)(8, 9), & s_8 &:= (1, 6, 4)(2, 9, 7)(8, 11, 10), \\
s_9 &:= (1, 2, 3, 4, 8)(5, 10, 7, 11, 6), & s_{10} &:= (1, 5, 8, 4, 6, 9)(2, 10, 3)(7, 11).
\end{aligned}$$

Resumimos nuestro estudio para el grupo  $M_{11}$  en el siguiente enunciado.

**Teorema 5.1.1.** *Sea  $\rho \in \widehat{M_{11}^{s_j}}$ , con  $1 \leq j \leq 10$ . La trenza es negativa en los casos  $j = 4$ , con  $\rho = \nu_2$  ó  $\nu_6$ ,  $j = 6, 7$  y  $10$ , con  $\rho = \chi_{(-1)}$ . En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ .*

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ s_j $	1	11	11	4	2	8	8	3	5	6
$ G^{s_j} $	7920	11	11	8	48	8	8	18	5	6
$ \mathcal{O}_{s_j} $	1	720	720	990	165	990	990	440	1584	1320
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	10	-1	-1	2	2	0	0	1	0	-1
$\chi_3$	10	-1	-1	0	-2	$B$	$B'$	1	0	1
$\chi_4$	10	-1	-1	0	-2	$B'$	$B$	1	0	1
$\chi_5$	11	0	0	-1	3	-1	-1	2	1	0
$\chi_6$	16	$A$	$A'$	0	0	0	0	-2	1	0
$\chi_7$	16	$A'$	$A$	0	0	0	0	-2	1	0
$\chi_8$	44	0	0	0	4	0	0	-1	-1	1
$\chi_9$	45	1	1	1	-3	-1	-1	0	0	0
$\chi_{10}$	55	0	0	-1	-1	1	1	1	0	-1

Tabla 5.2: Tabla de caracteres de  $M_{11}$ .

*Demostración.* De la Tabla 5.2, se puede ver que para  $j = 4, 5, 8, 9$  y  $10$ ,  $s_j$  es real.

*CASO:*  $j = 8, 9$ . Por Lema 2.3.4,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M_{11}^{s_j}}$ .

*CASO:*  $j = 2, 3$ . Se computa que  $s_j^3$  y  $s_j^9$  están en  $\mathcal{O}_{s_j}$ , y  $s_j^3 \neq s_j^9$ . Ya que  $|s_j| = 11$  se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M_{11}^{s_j}}$ , por Lema 2.3.5.

*CASO:*  $j = 4$ . El elemento  $s_4$  es real y su centralizador es

$$M_{11}^{s_4} = \langle x := (1, 4, 7, 5, 2, 10, 8, 6)(3, 11) \rangle \simeq \mathbb{Z}/8,$$

con  $x^6 = s_4$ . Sea  $\widehat{M_{11}^{s_4}} = \{\nu_0, \dots, \nu_7\}$ , donde  $\nu_l(x) := \omega_8^l$ ,  $0 \leq l \leq 7$ . Claramente, si  $l = 0, 1, 4, 5$  ó  $7$ , entonces  $q_{s_4 s_4} \neq -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_4}, \nu_l) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Los dos casos restantes corresponden a  $l = 2, 6$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_4} \cap M_{11}^{s_4} = \{s_4, s_4^{-1}\}$ . Ahora, resulta fácil ver que la trenza es negativa.

*CASO:*  $j = 6, 7$ . El centralizador es  $M_{11}^{s_j} = \langle s_j \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$  y  $s_j^3$  está en  $\mathcal{O}_{s_j}$ . Como 3 no divide a  $|s_j| = 8$  se tiene que  $q_{s_j s_j} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. El caso restante corresponde a  $\rho(s_j) = \omega_8^4 = -1$ , el cual satisface  $q_{s_j s_j} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_j} \cap M_{11}^{s_j} = \{s_j, s_j^3\}$ . Por cálculos directos se puede probar que la trenza es negativa.

*CASO:*  $j = 10$ . El elemento  $s_{10}$  es real y su centralizador es  $M_{11}^{s_{10}} = \langle s_{10} \rangle \simeq \mathbb{Z}/6$ . Ahora bien, tenemos que si  $q_{s_{10} s_{10}} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{10}}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. El caso restante corresponde a  $\rho(s_{10}) = \omega_6^3 = -1$ , el cual satisface  $q_{s_{10} s_{10}} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_{10}} \cap M_{11}^{s_{10}} = \{s_{10}, s_{10}^{-1}\}$ ; luego la trenza resulta negativa.

*CASO:*  $j = 5$ . El centralizador  $M_{11}^{s_5}$  es un grupo no abeliano de orden 48, cuya tabla de caracteres

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8
$ y_k $	1	2	3	2	6	4	8	8
$ G^{y_k} $	48	4	6	48	6	8	8	8
$ \mathcal{O}_{y_k} $	1	12	8	1	8	6	6	6
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	-1	1	1	1	1	-1	-1
$\mu_3$	2	0	-1	2	-1	2	0	0
$\mu_4$	2	0	-1	-2	1	0	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$
$\mu_5$	2	0	-1	-2	1	0	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$
$\mu_6$	3	-1	0	3	0	-1	1	1
$\mu_7$	3	1	0	3	0	-1	-1	-1
$\mu_8$	4	0	1	-4	-1	0	0	0

Tabla 5.3: Tabla de caracteres de  $M_{11}^{s_5}$ .

está dada por la Tabla 5.3. Los representantes de las clases de conjugación de  $M_{11}^{s_5}$  son

$$\begin{aligned}
y_1 &:= \text{id}, & y_2 &:= (4, 10)(5, 8)(6, 7)(9, 11), \\
y_3 &:= (3, 9, 11)(4, 8, 6)(5, 10, 7), & y_4 &:= (1, 2)(4, 10)(5, 6)(7, 8) = s_5, \\
y_5 &:= (1, 2)(3, 9, 11)(4, 7, 6, 10, 8, 5), & y_6 &:= (1, 4, 2, 10)(5, 7, 6, 8), \\
y_7 &:= (1, 4, 6, 7, 2, 10, 5, 8)(3, 9), & y_8 &:= (1, 4, 7, 5, 2, 10, 8, 6)(3, 11).
\end{aligned}$$

Para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 8$ , llamaremos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{11}^{s_5}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . De la Tabla 5.3, podemos decir que si  $k \neq 4, 5, 8$ , entonces  $q_{s_5 s_5} \neq -1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_5}, \rho_k) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Por otro lado, si  $k = 4, 5$  u  $8$ , entonces  $q_{s_5 s_5} = -1$ . Para estos tres casos probaremos que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_5}, \rho_k) = \infty$ . La intersección  $\mathcal{O}_{s_5} \cap M_{11}^{s_5}$  tiene 13 elementos y contiene a  $\sigma_1 := s_5$ ,  $\sigma_2 := (4, 10)(5, 8)(6, 7)(9, 11)$  y  $\sigma_3 := (1, 2)(5, 7)(6, 8)(9, 11)$ . Notar que estos elementos conmutan entre sí y  $\sigma_2 \sigma_3 = s_5$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,

$$g_2 := (1, 9)(2, 11)(4, 10)(5, 7) \quad \text{y} \quad g_3 := (1, 2)(4, 9)(6, 7)(10, 11).$$

Estos elementos están in  $M_{11}$  y satisfacen

$$\sigma_1 g_1 = g_1 \sigma_1, \quad \sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_2, \quad \sigma_1 g_3 = g_3 \sigma_3, \quad (5.1)$$

$$\sigma_2 g_1 = g_1 \sigma_2, \quad \sigma_2 g_2 = g_2 \sigma_1, \quad \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_2, \quad (5.2)$$

$$\sigma_3 g_1 = g_1 \sigma_3, \quad \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_3, \quad \sigma_3 g_3 = g_3 \sigma_1. \quad (5.3)$$

Supongamos que  $k = 4$ . Como  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  conmutan existe una base  $\{v_1, v_2\}$  de  $V_4$ , el espacio vectorial de la representación  $\rho_4$ , compuesta por autovectores simultáneos de  $\rho_4(\sigma_1)$ ,  $\rho_4(\sigma_2)$  y  $\rho_4(\sigma_3)$ . Digamos que  $\rho_4(\sigma_2)v_l = \lambda_l v_l$  y  $\rho_4(\sigma_3)v_l = \kappa_l v_l$ ,  $l = 1, 2$ . Notar que  $\lambda_l, \kappa_l = \pm 1$ ,  $l = 1, 2$ , puesto que  $|\sigma_2| = 2 = |\sigma_3|$ . Más aún, como  $\sigma_2 \sigma_3 = s_5$  se tiene que  $\lambda_l \kappa_l = -1$ ,  $l = 1, 2$ . De la Tabla 5.3, podemos deducir que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  pues  $\sigma_2 = y_2$  y  $\mu_4(\mathcal{O}_{y_2}^{M_{11}^{s_5}}) = 0$ . Reordenando la base podemos suponer que  $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$ .

Definimos  $W := \mathbb{C} - \text{span} \{g_1v_1, g_2v_2, g_3v_2\}$ . Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_5}, \rho)$  de tipo Cartan. En efecto, es fácil calcular que la matriz de coeficientes  $\mathcal{Q}$  es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

La matriz de Cartan correspondiente está dada por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_5}, \rho_4) = \infty$ .

El caso  $k = 5$  es análogo al caso  $k = 4$  ya que  $\mu_5(\mathcal{O}_{y_2}^{M_{11}^{s_5}}) = 0$ .

Finalmente, el caso  $k = 8$  se puede reducir a los casos anteriores. En efecto, como  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  conmutan existe una base  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  de  $V_8$ , el espacio vectorial de la representación  $\rho_8$ , compuesta por autovectores simultáneos de  $\rho_8(\sigma_1)$ ,  $\rho_8(\sigma_2)$  y  $\rho_8(\sigma_3)$ . Digamos que  $\rho_8(\sigma_2)v_l = \lambda_l v_l$  y  $\rho_8(\sigma_3)v_l = \kappa_l v_l$ ,  $1 \leq l \leq 4$ , donde  $\lambda_l, \kappa_l = \pm 1$ ,  $1 \leq l \leq 4$ , puesto que  $|\sigma_2| = 2 = |\sigma_3|$ . De la Tabla 5.3, podemos deducir que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4$  pues  $\sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{O}_{y_2}^{M_{11}^{s_5}}$  y  $\mu_8(\mathcal{O}_{y_2}^{M_{11}^{s_5}}) = 0$ . Esto implica que existen  $r, t \in \{1, 2, 3, 4\}$  tales que  $\lambda_r = 1 = -\lambda_t$ . Ahora bien, si se define  $W := \mathbb{C} - \text{span} \{g_1v_r, g_2v_t, g_3v_t\}$ , entonces  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_5}, \rho)$  de tipo Cartan, con matriz de Cartan dada por (5.5). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_5}, \rho_8) = \infty$ .  $\square$

*Observación 5.1.2.* El grupo  $M_{11}^{ss}$  tiene 9 clases de conjugación. Luego, podemos señalar el siguiente hecho: existen 84 pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  posibles para  $M_{11}$ ; 79 de ellos dan lugar a álgebras de Nichols de dimensión infinita, y 5 tienen  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de trenza negativa.

### 5.1.2. El grupo $M_{12}$

El grupo de Mathieu simple  $M_{12}$  puede ser dado como un subgrupo de  $\mathbb{S}_{12}$  de la siguiente manera

$$M_{12} := \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11), (3, 7, 11, 8)(4, 10, 5, 6), (1, 12)(2, 11)(3, 6)(4, 8)(5, 9)(7, 10) \rangle.$$

En la Tabla 5.4, se muestra la tabla de caracteres de  $M_{12}$ , con  $A = (-1 - i\sqrt{11})/2$ . Explícitamente, los representantes de las clases de conjugación de  $M_{12}$  son  $s_1 := \text{id}$ ,

$$\begin{aligned} s_2 &:= (1, 8, 12)(2, 3, 11, 9, 10, 6)(4, 5), & s_3 &:= (1, 12, 8)(2, 11, 10)(3, 9, 6), \\ s_4 &:= (2, 9)(3, 10)(4, 5)(6, 11), & s_5 &:= (1, 12, 7, 4)(2, 9, 10, 5, 11, 3, 6, 8), \\ s_6 &:= (1, 7)(2, 10, 11, 6)(3, 8, 9, 5)(4, 12), & s_7 &:= (1, 9, 4, 2, 11, 8)(3, 10, 12, 5, 6, 7), \\ s_8 &:= (1, 4, 11)(2, 8, 9)(3, 12, 6)(5, 7, 10), & s_9 &:= (1, 2)(3, 5)(4, 8)(6, 10)(7, 12)(9, 11), \\ s_{10} &:= (1, 7, 2, 6, 5)(3, 9, 12, 10, 11), & s_{11} &:= (2, 10, 6, 4, 12, 5, 7, 3, 8, 11, 9), \\ s_{12} &:= (2, 6, 12, 7, 8, 9, 10, 4, 5, 3, 11), & s_{13} &:= (1, 2, 7, 10, 5, 6, 8, 12, 9, 4)(3, 11), \\ s_{14} &:= (1, 10, 11, 8, 4, 5, 12, 3)(6, 9), & s_{15} &:= (1, 11, 4, 12)(3, 10, 8, 5). \end{aligned}$$

Resumimos nuestro estudio para el grupo  $M_{12}$  en el siguiente enunciado.

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$ s_j $	1	6	3	2	8	4	6	3	2	5	11	11	10	8	4
$ G^{s_j} $	95040	6	54	192	8	32	12	36	240	10	11	11	10	8	32
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	11	0	2	3	1	3	-1	-1	-1	1	0	0	-1	-1	-1
$\chi_3$	11	0	2	3	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	-1	1	3
$\chi_4$	16	0	-2	0	0	0	1	1	4	1	A'	A	-1	0	0
$\chi_5$	16	0	-2	0	0	0	1	1	4	1	A	A'	-1	0	0
$\chi_6$	45	0	0	-3	-1	1	-1	3	5	0	1	1	0	-1	1
$\chi_7$	54	0	0	6	0	2	0	0	6	-1	-1	-1	1	0	2
$\chi_8$	55	1	1	7	-1	-1	1	1	-5	0	0	0	0	-1	-1
$\chi_9$	55	-1	1	-1	-1	3	1	1	-5	0	0	0	0	1	-1
$\chi_{10}$	55	-1	1	-1	1	-1	1	1	-5	0	0	0	0	-1	3
$\chi_{11}$	66	-1	3	2	0	-2	0	0	6	1	0	0	1	0	-2
$\chi_{12}$	99	0	0	3	1	-1	-1	3	-1	-1	0	0	-1	1	-1
$\chi_{13}$	120	1	3	-8	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
$\chi_{14}$	144	0	0	0	0	0	1	-3	4	-1	1	1	-1	0	0
$\chi_{15}$	176	0	-4	0	0	0	-1	-1	-4	1	0	0	1	0	0

Tabla 5.4: Tabla de caracteres de  $M_{12}$ .

**Teorema 5.1.3.** *Sea  $\rho \in \widehat{M_{12}^{s_j}}$ , con  $1 \leq j \leq 15$ . La trenza es negativa en los casos  $j = 2, 5, 13$  y  $14$ , con  $\rho = \chi_{(-1)}$ . En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración. CASO:  $j = 3, 8, 10$ .* De la Tabla 5.4, vemos que  $s_j$  es real. Por Lema 2.3.4,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M_{12}^{s_j}}$ .

*CASO:  $j = 11, 12$ .* Se computa que los elementos  $s_j^3$  y  $s_j^9$  están en  $\mathcal{O}_{s_j}$ , y  $s_j^3 \neq s_j^9$ . Como  $|s_j| = 11$  se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M_{12}^{s_j}}$ , por Lema 2.3.5.

*CASO:  $j = 2$ .* El elemento  $s_2$  es real y  $M_{12}^{s_2} = \langle s_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/6$ . Ahora bien, si  $q_{s_2 s_2} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. El caso restante corresponde a  $\rho(s_2) = \omega_6^3 = -1$ , el cual satisface  $q_{s_2 s_2} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_2} \cap M_{12}^{s_2} = \{s_2, s_2^{-1}\}$ . Luego, es fácil ver que la trenza es negativa.

*CASO:  $j = 5, 14$ .* El elemento  $s_j$  es real y  $M_{12}^{s_j} = \langle s_j \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$ . Si  $q_{s_j s_j} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. El caso que falta corresponde a  $\rho(s_j) = \omega_8^4 = -1$ , y satisface  $q_{s_j s_j} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_j} \cap M_{12}^{s_j} = \{s_j, s_j^3, s_j^5, s_j^7\}$ , y se puede mostrar fácilmente que la trenza es negativa.

*CASO:  $j = 13$ .* El elemento  $s_{13}$  es real y  $M_{12}^{s_{13}} = \langle s_{13} \rangle \simeq \mathbb{Z}/10$ . Si  $q_{s_{13} s_{13}} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{13}}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. El caso restante corresponde a  $\rho(s_{13}) = \omega_{10}^5 = -1$ , y satisface  $q_{s_{13} s_{13}} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_{13}} \cap M_{12}^{s_{13}} = \{s_{13}, s_{13}^3, s_{13}^7, s_{13}^9\}$ ; como antes, la trenza resulta negativa.



*CASO:*  $j = 7$ . El elemento  $s_7$  es real y su centralizador es

$$M_{12}^{s_7} = \langle x, s_7 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6,$$

con  $x := (1, 12)(2, 7)(3, 11)(4, 6)(5, 9)(8, 10)$ . Definamos  $\{\nu_0, \dots, \nu_5\}$ , donde  $\nu_l(s_7) := \omega_6^l$ ,  $0 \leq l \leq 5$ . Luego,

$$\widehat{M}_{12}^{s_7} = \{\epsilon \otimes \nu_l, \text{sgn} \otimes \nu_l \mid 0 \leq l \leq 5\},$$

donde  $\epsilon$  y  $\text{sgn}$  son la representación trivial y signo de  $\mathbb{Z}/2$ , respectivamente. Resulta claro que si  $\rho \in \widehat{M}_{12}^{s_7}$ , con  $l \neq 3$ , entonces  $q_{s_7 s_7} \neq -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_7}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Los dos casos restantes son  $\rho = \epsilon \otimes \nu_3$  y  $\rho = \text{sgn} \otimes \nu_3$ . Se probará que en ambos casos el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_7}, \rho)$  es de dimensión infinita. Se computa que  $\mathcal{O}_{s_7} \cap M_{11}^{s_7}$  tiene 6 elementos y que contiene a  $\sigma_1 := s_7$ ,

$$\sigma_2 := (1, 5, 4, 7, 11, 10)(2, 3, 8, 12, 9, 6), \quad \sigma_3 := (1, 3, 4, 12, 11, 6)(2, 5, 8, 7, 9, 10).$$

Notar que  $\sigma_2 \sigma_3 = s_7^{-1}$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,  $g_2 := (2, 7, 12)(3, 9, 5)(6, 8, 10)$  y  $g_3 := g_2^{-1}$ . Se puede ver que se satisfacen las siguientes relaciones

$$\sigma_1 g_1 = g_1 \sigma_1, \quad \sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_3, \quad \sigma_1 g_3 = g_3 \sigma_2, \quad (5.6)$$

$$\sigma_2 g_1 = g_1 \sigma_2, \quad \sigma_2 g_2 = g_2 \sigma_1, \quad \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_3, \quad (5.7)$$

$$\sigma_3 g_1 = g_1 \sigma_3, \quad \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_2, \quad \sigma_3 g_3 = g_3 \sigma_1. \quad (5.8)$$

Si  $W := \mathbb{C}$ -span  $\{g_1, g_2, g_3\}$ , entonces  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_7}, \rho)$  de tipo Cartan, con matriz de coeficientes dada por

$$\mathcal{Q}_1 := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_2 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

para  $\rho = \epsilon \otimes \nu_3$  y  $\rho = \text{sgn} \otimes \nu_3$ , respectivamente. En ambos casos la matriz de Cartan asociada está dada por (5.5). Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_7}, \rho) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 6$ . El elemento  $s_6$  es real y  $M_{12}^{s_6}$  es un grupo no abeliano de orden 32, cuya tabla de caracteres está dada por la Tabla 5.5. Los representantes de las clases de conjugación de  $M_{12}^{s_6}$  son

$$\begin{aligned} y_1 &:= \text{id}, & y_2 &:= (2, 3, 11, 9)(5, 10, 8, 6), \\ y_3 &:= (2, 6, 11, 10)(3, 8, 9, 5), & y_4 &:= (2, 11)(3, 9)(5, 8)(6, 10), \\ y_5 &:= (1, 4, 7, 12)(3, 8, 9, 5), & y_6 &:= (1, 4, 7, 12)(2, 3, 6, 5, 11, 9, 10, 8), \\ y_7 &:= (1, 4, 7, 12)(2, 6, 11, 10)(3, 9)(5, 8), & y_8 &:= (1, 7)(3, 9)(4, 12)(5, 8), \\ y_9 &:= (1, 7)(2, 3)(4, 12)(5, 6)(8, 10)(9, 11), & y_{10} &:= (1, 7)(2, 6, 11, 10)(3, 5, 9, 8)(4, 12), \\ y_{11} &:= (1, 7)(2, 10, 11, 6)(3, 8, 9, 5)(4, 12) = s_6, & y_{12} &:= (1, 12, 7, 4)(3, 5, 9, 8), \\ y_{13} &:= (1, 12, 7, 4)(2, 3, 10, 8, 11, 9, 6, 5), & y_{14} &:= (1, 12, 7, 4)(2, 10, 11, 6)(3, 9)(5, 8). \end{aligned}$$

Para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 14$ , llamamos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{12}^{s_6}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . De la Tabla 5.5, podemos decir que si  $k \neq 5, 6, 7, 8, 10$ , entonces  $q_{s_6 s_6} \neq -1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho_k) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Por otro lado, si  $k = 5, 6, 7, 8$  ó  $10$ , entonces  $q_{s_6 s_6} = -1$ .

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$ y_k $	1	4	4	2	4	8	4	2	2	4	4	4	8	4
$ G^{y_k} $	32	8	16	32	16	8	16	16	8	32	32	16	8	16
$ \mathcal{O}_{y_k} $	1	4	2	1	2	4	2	2	4	1	1	2	4	2
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
$\mu_3$	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
$\mu_4$	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1
$\mu_5$	1	1	1	1	-i	-i	-i	-1	-1	-1	-1	i	i	i
$\mu_6$	1	-1	1	1	-i	i	-i	-1	1	-1	-1	i	-i	i
$\mu_7$	1	1	1	1	i	i	i	-1	-1	-1	-1	-i	-i	-i
$\mu_8$	1	-1	1	1	i	-i	i	-1	1	-1	-1	-i	i	-i
$\mu_9$	2	0	-2	2	0	0	0	-2	0	2	2	0	0	0
$\mu_{10}$	2	0	-2	2	0	0	0	2	0	-2	-2	0	0	0
$\mu_{11}$	2	0	0	-2	1+i	0	-1-i	0	0	-2i	2i	1-i	0	-1+i
$\mu_{12}$	2	0	0	-2	-1-i	0	1+i	0	0	-2i	2i	-1+i	0	1-i
$\mu_{13}$	2	0	0	-2	-1+i	0	1-i	0	0	2i	-2i	-1-i	0	1+i
$\mu_{14}$	2	0	0	-2	1-i	0	-1+i	0	0	2i	-2i	1+i	0	-1-i

Tabla 5.5: Tabla de caracteres de  $M_{12}^{s_6}$ .

Para estos cinco casos probaremos que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho_k) = \infty$ . Primero calculamos la intersección  $\mathcal{O}_{s_6} \cap M_{12}^{s_6}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= (1, 4, 7, 12)(2, 6, 11, 10)(3, 9)(5, 8) = y_7, & \sigma_2 &:= (1, 4, 7, 12)(2, 11)(3, 5, 9, 8)(6, 10), \\ \sigma_3 &:= (1, 7)(2, 6, 11, 10)(3, 5, 9, 8)(4, 12) = y_{10}, & \sigma_4 &:= (1, 7)(2, 10, 11, 6)(3, 8, 9, 5)(4, 12) = s_6, \\ \sigma_5 &:= (1, 12, 7, 4)(2, 10, 11, 6)(3, 9)(5, 8) = y_{14}, & \sigma_6 &:= (1, 12, 7, 4)(2, 11)(3, 8, 9, 5)(6, 10). \end{aligned}$$

Estos elementos conmutan entre sí,  $\sigma_4 = s_6$  y  $\sigma_1^{-1} = \sigma_5$ . Además, se tiene que  $\sigma_2 \in \mathcal{O}_{y_7}^{M_{12}^{s_6}}$  y  $\sigma_6 \in \mathcal{O}_{y_{14}}^{M_{12}^{s_6}}$ . Elegimos en  $M_{12}$  los siguientes elementos

$$g_1 := (1, 8, 6, 12, 3, 2)(4, 9, 11, 7, 5, 10), \quad g_2 := (1, 6, 12, 11, 7, 10, 4, 2)(5, 8)$$

y  $g_3 := (1, 12)(4, 7)(5, 8)(6, 10)$ . Entonces  $\sigma_r g_r = g_r s_6$ ,  $1 \leq r \leq 3$ , y

$$\begin{aligned} \sigma_2 g_1 &= g_1 \sigma_5, & \sigma_1 g_2 &= g_2 \sigma_5, & \sigma_1 g_3 &= g_3 \sigma_5, \\ \sigma_3 g_1 &= g_1 \sigma_6, & \sigma_3 g_2 &= g_2 \sigma_4, & \sigma_2 g_3 &= g_3 \sigma_6. \end{aligned}$$

Supongamos que  $k = 5, 6, 7$  ó  $8$ . Se define  $W := \mathbb{C}$ -span  $\{g_1, g_2, g_3\}$ . Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_6}, \rho_k)$  de tipo Cartan. De la Tabla 5.5, podemos calcular que la matriz de coeficientes  $\mathcal{Q}$  es

$$\mathcal{Q}_3 := \begin{pmatrix} -1 & i & i \\ i & -1 & i \\ i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_4 := \begin{pmatrix} -1 & -i & -i \\ -i & -1 & -i \\ -i & -i & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

para  $k = 5$  ó  $6$ , y  $k = 7$  ó  $8$ , respectivamente. En todos estos casos la matriz de Cartan asociada es como en (5.5). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho_k) = \infty$ .

Supongamos que  $k = 10$ . Como  $\sigma_5$  y  $\sigma_6$  conmutan existe una base  $\{v_1, v_2\}$  de  $V_{10}$ , el espacio vectorial de la representación  $\rho_{10}$ , compuesta por autovectores simultáneos de  $\rho_{10}(\sigma_5)$  y  $\rho_{10}(\sigma_6)$ . Digamos que  $\rho_{10}(\sigma_5)v_l = \lambda_l v_l$  y  $\rho_{10}(\sigma_6)v_l = \kappa_l v_l$ ,  $l = 1, 2$ . Notar que  $\kappa_l, \lambda_l = \pm 1, \pm i$ , ya que  $|\sigma_5| = 4 = |\sigma_6|$ . De la Tabla 5.5, deducimos que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0 = \kappa_1 + \kappa_2$  pues  $\sigma_5, \sigma_6 \in \mathcal{O}_{y_{14}}^{M_{12}^{s_6}}$  y  $\mu_{10}(\mathcal{O}_{y_{14}}^{M_{12}^{s_6}}) = 0$ . Además, como  $\sigma_5\sigma_6 = s_6^{-1}$  se tiene que  $\lambda_l\kappa_l = -1$ ,  $l = 1, 2$ . Ahora consideramos las cuatro posibilidades:  $\lambda_1 = \pm 1, \pm i$ .

- (i) Si  $\lambda_1 = \pm 1$ , tomamos  $W := \mathbb{C} - \text{span} \{g_1v_1, g_2v_2, g_3v_1\}$ .
- (ii) Si  $\lambda_1 = \pm i$ , tomamos  $W := \mathbb{C} - \text{span} \{g_1v_1, g_2v_1, g_3v_1\}$ .

En ambos casos,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_6}, \rho_{10})$  de tipo Cartan. Se puede calcular que las matrices de coeficientes están dadas por  $\mathcal{Q}_1$  (resp.  $\mathcal{Q}_2$ ) para el caso  $\lambda_1 = 1$  (resp.  $\lambda_1 = -1$ ) – ver (5.9); mientras que las matrices de coeficientes están dadas por  $\mathcal{Q}_3$  (resp.  $\mathcal{Q}_4$ ) para el caso  $\lambda_1 = i$  (resp.  $\lambda_1 = -i$ ) – ver (5.10). En todos los casos, la matriz de Cartan asociada está dada por (5.5). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho_{10}) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 15$ . Se computa que  $M_{12}^{s_{15}} \simeq M_{12}^{s_6}$ . Esto implica que este caso es análogo al caso  $j = 6$ , pues  $\mathcal{O}_{s_{15}} \simeq \mathcal{O}_{s_6}$  como racks.

*CASO:*  $j = 4$ . Se computa que  $M_{12}^{s_4}$  es un grupo no abeliano de orden 192, cuya tabla de caracteres está dada por la Tabla 5.6. Los representantes de las clases de conjugación de  $M_{12}^{s_4}$  son  $y_1 := \text{id}$ ,

$$\begin{aligned}
y_2 &:= (3, 4)(5, 10)(6, 11)(7, 12), & y_3 &:= (3, 5, 6)(4, 11, 10)(7, 12, 8), \\
y_4 &:= (2, 3, 5, 11, 9, 10, 4, 6)(7, 8), & y_5 &:= (2, 3, 6, 9, 10, 11)(4, 5)(7, 12, 8), \\
y_6 &:= (2, 3, 9, 10)(4, 11, 5, 6), & y_7 &:= (2, 9)(3, 10)(4, 5)(6, 11) = s_4, \\
y_8 &:= (1, 7)(4, 5)(6, 11)(8, 12), & y_9 &:= (1, 7, 8, 12)(3, 5, 10, 4), \\
y_{10} &:= (1, 7, 12, 8)(2, 3, 4, 11, 9, 10, 5, 6), & y_{11} &:= (1, 7)(2, 3, 9, 10)(4, 6, 5, 11)(8, 12), \\
y_{12} &:= (1, 7)(2, 4)(3, 6)(5, 9)(8, 12)(10, 11), & y_{13} &:= (1, 7, 12, 8)(2, 4, 9, 5)(3, 10)(6, 11).
\end{aligned}$$

Para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 13$ , llamamos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{12}^{s_4}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . De la Tabla 5.6, se tiene que si  $k \neq 10, 11, 13$ , entonces  $q_{s_4s_4} \neq -1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_4}, \rho_k) = \infty$ , por Lema 2.3.4.

Supongamos que  $k = 10, 11$  ó  $13$ ; luego,  $q_{s_4s_4} = -1$ . Probaremos que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_4}, \rho_k) = \infty$ . La intersección  $\mathcal{O}_{s_4} \cap M_{12}^{s_4}$  tiene 31 elementos, y contiene a  $\sigma_1 := s_4$  y

$$\sigma_2 := (3, 4)(5, 10)(6, 11)(7, 12) = y_2, \quad \sigma_3 := (2, 9)(3, 5)(4, 10)(7, 12).$$

Se puede ver que  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  conmutan,  $\sigma_3 \in \mathcal{O}_{y_2}^{M_{12}^{s_4}}$  y  $\sigma_2\sigma_3 = s_4$ . Elegimos en  $M_{12}$  los siguientes elementos  $g_1 := \text{id}$ ,

$$g_2 := (2, 7)(3, 5)(6, 11)(9, 12), \quad g_3 := (2, 9)(5, 10)(6, 7)(11, 12).$$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$ y_k $	1	2	3	8	6	4	2	2	4	8	4	2	4
$ G^{y_k} $	192	8	6	8	6	32	192	32	16	8	32	16	16
$ \mathcal{O}_{y_k} $	1	24	32	24	32	6	1	6	12	24	6	12	12
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
$\mu_3$	2	0	-1	0	-1	2	2	2	0	0	2	2	0
$\mu_4$	3	-1	0	1	0	-1	3	-1	1	-1	3	-1	1
$\mu_5$	3	1	0	-1	0	-1	3	-1	-1	1	3	-1	-1
$\mu_6$	3	-1	0	-1	0	3	3	-1	1	1	-1	-1	1
$\mu_7$	3	1	0	-1	0	-1	3	3	1	-1	-1	-1	1
$\mu_8$	3	1	0	1	0	3	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\mu_9$	3	-1	0	1	0	-1	3	3	-1	1	-1	-1	-1
$\mu_{10}$	4	0	1	0	-1	0	-4	0	2	0	0	0	-2
$\mu_{11}$	4	0	1	0	-1	0	-4	0	-2	0	0	0	2
$\mu_{12}$	6	0	0	0	0	-2	6	-2	0	0	-2	2	0
$\mu_{13}$	8	0	-1	0	1	0	-8	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.6: Tabla de caracteres de  $M_{12}^{s_4}$ .

Es fácil verificar que se satisfacen las relaciones dadas en (5.1), (5.2) y (5.3). De la Tabla 5.6, se tiene que  $\mu_k(\mathcal{O}_{y_2}^{M_{12}^{s_4}}) = 0$ . Ahora podemos proceder como en el caso  $j = 5$  y  $k = 8$  de la prueba del Teorema 5.1.1. Así, podemos obtener un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_4}, \rho_k)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan asociada no es de tipo finito. Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_4}, \rho_k) = \infty$ , para  $k = 10, 11, 13$ .

*CASO:*  $j = 9$ . El centralizador  $M_{12}^{s_9}$  es un grupo no abeliano de orden 240, cuya tabla de caracteres está dada por la Tabla 5.7. Los representantes de las clases de conjugación de  $M_{12}^{s_9}$  son

$$\begin{aligned}
y_1 &:= \text{id}, & y_2 &:= (4, 7)(6, 9)(8, 12)(10, 11), \\
y_3 &:= (4, 10, 7, 11)(6, 12, 9, 8), & y_4 &:= (3, 6, 8, 12, 9)(4, 7, 11, 5, 10), \\
y_5 &:= (1, 2)(3, 4)(5, 8)(6, 10)(7, 9)(11, 12) & y_6 &:= (1, 2)(3, 4, 6, 11)(5, 8, 10, 9)(7, 12), \\
y_7 &:= (1, 2)(3, 4, 9, 10, 12, 5, 8, 11, 6, 7), & y_8 &:= (1, 2)(3, 5)(4, 8)(6, 10)(7, 12)(9, 11) = s_9, \\
y_9 &:= (1, 3)(2, 5)(4, 6)(7, 9)(8, 10)(11, 12), & y_{10} &:= (1, 3, 4, 2, 5, 8)(6, 11, 12, 10, 9, 7), \\
y_{11} &:= (1, 3, 4, 12, 11, 6)(2, 5, 8, 7, 9, 10), & y_{12} &:= (1, 4, 5)(2, 8, 3)(6, 12, 9)(7, 11, 10), \\
y_{13} &:= (1, 4, 7, 10, 11, 5)(2, 8, 12, 6, 9, 3), & y_{14} &:= (1, 4)(2, 8)(3, 6)(5, 10)(7, 11)(9, 12).
\end{aligned}$$

Para todo  $k, 1 \leq k \leq 14$ , llamamos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{12}^{s_9}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . De la Tabla 5.7, se puede deducir que si  $k \neq 2, 3, 6, 8, 10, 12, 14$ , entonces  $q_{s_9 s_9} \neq -1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_9}, \rho_k) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Por otro lado, si  $k = 2, 3, 6, 8, 10, 12$  ó  $14$ , entonces  $q_{s_9 s_9} = -1$ . Para estos casos probaremos que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_9}, \rho_k) = \infty$ . La intersección  $\mathcal{O}_{s_9} \cap M_{12}^{s_9}$  tiene 36 elementos, y contiene a  $\sigma_1 := s_9$  y

$$\sigma_2 := (1, 3)(2, 5)(4, 6)(7, 9)(8, 10)(11, 12) = y_9, \quad \sigma_3 := (1, 5)(2, 3)(4, 10)(6, 8)(7, 11)(9, 12).$$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$ y_k $	1	2	4	5	2	4	10	2	2	6	6	3	6	2
$ G^{y_k} $	240	16	8	10	16	8	10	240	24	12	12	12	12	24
$ \mathcal{O}_{y_k} $	1	15	30	24	15	30	24	1	10	20	20	20	20	10
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
$\mu_3$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
$\mu_4$	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
$\mu_5$	4	0	0	-1	0	0	-1	4	-2	1	1	1	1	-2
$\mu_6$	4	0	0	-1	0	0	1	-4	2	-1	-1	1	1	-2
$\mu_7$	4	0	0	-1	0	0	-1	4	2	1	-1	1	-1	2
$\mu_8$	4	0	0	-1	0	0	1	-4	-2	-1	1	1	-1	2
$\mu_9$	5	1	-1	0	1	-1	0	5	1	-1	1	-1	1	1
$\mu_{10}$	5	1	-1	0	-1	1	0	-5	-1	1	-1	-1	1	1
$\mu_{11}$	5	1	1	0	1	1	0	5	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\mu_{12}$	5	1	1	0	-1	-1	0	-5	1	1	1	-1	-1	-1
$\mu_{13}$	6	-2	0	1	-2	0	1	6	0	0	0	0	0	0
$\mu_{14}$	6	-2	0	1	2	0	-1	-6	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.7: Tabla de caracteres de  $M_{12}^{s_9}$ .

Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,  $g_2 := (2, 3, 4)(5, 6, 8)(7, 11, 9)$ ,  $g_3 := (2, 5, 3)(4, 8, 6)(7, 12, 9)$ ; estos elementos están en  $M_{12}$  y satisfacen  $\sigma_r g_r = g_r s_9$ ,  $1 \leq r \leq 3$ ,  $\sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_3$  y

$$\sigma_2 g_1 = g_1 \sigma_2, \quad \sigma_1 g_2 = g_2 \gamma_{1,2}, \quad \sigma_1 g_3 = g_3 \sigma_2, \quad \sigma_3 g_1 = g_1 \sigma_3, \quad \sigma_3 g_2 = g_2 \gamma_{3,2}, \quad \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_3,$$

donde

$$\gamma_{1,2} := (1, 4)(2, 8)(3, 6)(5, 10)(7, 11)(9, 12), \quad \gamma_{3,2} := (1, 8)(2, 4)(3, 10)(5, 6)(7, 9)(11, 12).$$

Además, se tiene que  $\sigma_2 \sigma_3 = s_9 = \sigma_3 \sigma_2$ , y  $\sigma_3, \gamma_{1,2} \in \mathcal{O}_{y_{14}}^{M_{12}^{s_9}}$  y  $\gamma_{3,2} \in \mathcal{O}_{y_9}^{M_{12}^{s_9}}$ .

Supongamos que  $k = 2$  ó  $3$ . Definimos  $W := \mathbb{C}$  - span  $\{g_1, g_2, g_3\}$ . Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_9}, \rho_k)$  de tipo Cartan. De la Tabla 5.7, podemos calcular que la matriz de Cartan asociada es como en (5.5). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_9}, \rho_k) = \infty$ .

Asumamos que  $k = 6$ . Puesto que  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \gamma_{1,2}$  y  $\gamma_{3,2}$  conmutan existe una base  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  de  $V_6$ , el espacio vectorial de la representación  $\rho_6$ , compuesta por autovectores simultáneos de los operadores  $\rho_6(\sigma_1) = -\text{Id}$ ,  $\rho_6(\sigma_2)$ ,  $\rho_6(\sigma_3)$ ,  $\rho_6(\gamma_{1,2})$  y  $\rho_6(\gamma_{3,2})$ . Digamos que  $\rho_6(\sigma_2)v_l = \lambda_l v_l$ ,  $\rho_6(\sigma_3)v_l = \kappa_l v_l$ ,  $1 \leq l \leq 4$ , donde  $\lambda_l, \kappa_l = \pm 1$ ,  $1 \leq l \leq 4$ , pues  $|\sigma_2| = |\sigma_3| = 2$ . De la Tabla 5.7, se tiene que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -2 = -\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4$ . Luego,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  no son todos iguales a 1 ni todos iguales a  $-1$ . Por otro lado, como  $\sigma_2 \sigma_3 = s_9$  y  $q_{s_9 s_9} = -1$ , resulta que  $\lambda_l \kappa_l = -1$ ,  $1 \leq l \leq 4$ . Ahora bien, si  $W := \mathbb{C}$  - span  $\{g_1 v_l, g_2 v_l, g_3 v_l \mid 1 \leq l \leq 4\}$ , entonces  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_9}, \rho_6)$  de tipo Cartan, cuya matriz de Cartan asociada  $\mathcal{A}$  tiene al menos dos filas con tres  $-1$  o más. Esto implica que el Diagrama de Dynkin correspondiente tiene al menos dos vértices con tres aristas o más; luego,  $\mathcal{A}$  no es de tipo finito. Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_9}, \rho_6) = \infty$ .

Para los casos  $k = 8, 9, 10, 12$  ó  $14$ , se procede de manera análoga.  $\square$

*Observación 5.1.4.* Los grupos  $M_{12}^{s_3}$ ,  $M_{12}^{s_8}$  y  $M_{12}^{s_{10}}$ , tienen 10, 12 y 10 clases de conjugación, respectivamente. Luego, existen 168 pares posibles  $(\mathcal{O}, \rho)$  para  $M_{12}$ . Concluimos que 164 de ellos dan lugar a álgebras de Nichols de dimensión infinita, y 4 tienen  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de trenza negativa.

### 5.1.3. El grupo $M_{22}$

El grupo de Mathieu simple  $M_{22}$  puede ser dado como un subgrupo de  $\mathbb{S}_{22}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} M_{22} := & \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)(12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22), \\ & (1, 4, 5, 9, 3)(2, 8, 10, 7, 6)(12, 15, 16, 20, 14)(13, 19, 21, 18, 17), \\ & (1, 21)(2, 10, 8, 6)(3, 13, 4, 17)(5, 19, 9, 18)(11, 22)(12, 14, 16, 20) \rangle. \end{aligned}$$

En la Tabla 5.8, se muestra la tabla de caracteres de  $M_{22}$ , con  $A = (-1 - i\sqrt{11})/2$  y  $C = (-1 - i\sqrt{7})/2$ . Los representantes de las clases de conjugación de  $M_{22}$  son  $s_1 := \text{id}$ ,

$$\begin{aligned} s_2 & := (1, 10, 13, 17)(2, 3, 14, 15)(4, 20, 18, 7)(5, 21)(6, 22)(9, 11, 12, 16), \\ s_3 & := (1, 13)(2, 14)(3, 15)(4, 18)(7, 20)(9, 12)(10, 17)(11, 16), \\ s_4 & := (1, 8, 17, 5, 11, 15, 3, 7)(2, 14, 9, 16)(4, 20)(6, 21, 13, 22, 19, 18, 12, 10), \\ s_5 & := (1, 12, 16, 15, 19, 11, 18)(2, 7, 9, 14, 13, 10, 6)(3, 22, 4, 17, 5, 21, 8), \\ s_6 & := (1, 15, 18, 16, 11, 12, 19)(2, 14, 6, 9, 10, 7, 13)(3, 17, 8, 4, 21, 22, 5), \\ s_7 & := (1, 4, 2, 6, 3)(5, 15, 12, 22, 18)(7, 8, 11, 19, 20)(9, 17, 10, 14, 21), \\ s_8 & := (1, 18, 4, 12, 15, 8, 3, 17, 19, 7, 6)(2, 9, 16, 11, 13, 22, 20, 5, 10, 14, 21), \\ s_9 & := (1, 4, 15, 3, 19, 6, 18, 12, 8, 17, 7)(2, 16, 13, 20, 10, 21, 9, 11, 22, 5, 14), \\ s_{10} & := (1, 6, 5, 17)(3, 8)(4, 11)(7, 13, 16, 14)(9, 12, 22, 15)(10, 20, 18, 19), \\ s_{11} & := (1, 7, 22)(2, 13, 6, 14, 5, 3)(4, 10)(8, 16, 9, 20, 19, 17)(11, 15, 21)(12, 18), \\ s_{12} & := (1, 22, 7)(2, 6, 5)(3, 13, 14)(8, 9, 19)(11, 21, 15)(16, 20, 17). \end{aligned}$$

Resumimos nuestro estudio para el grupo  $M_{22}$  en el siguiente enunciado.

**Teorema 5.1.5.** *Sea  $\rho \in \widehat{M_{22}^{s_j}}$ , con  $1 \leq j \leq 12$ . La trenza es negativa en el caso  $j = 4$  y  $\rho = \chi_{(-1)}$ . En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración. CASO:  $j = 7, 12$ .* De la Tabla 5.8, se ve que  $s_j$  es real. Así,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M_{22}^{s_j}}$ , por Lema 2.3.4.

*CASO:  $j = 5, 6$ .* Se computa que  $s_j^2$  y  $s_j^4$  están en  $\mathcal{O}_{s_j}$ . Como  $|s_j| = 7$  se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M_{22}^{s_j}}$ , por Lema 2.3.5.

*CASO:  $j = 8, 9$ .* Se computa que  $s_j^3$  y  $s_j^9$  están en  $\mathcal{O}_{s_j}$ . Puesto que  $|s_j| = 11$  se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M_{22}^{s_j}}$ , por Lema 2.3.5.

*CASO:  $j = 4$ .* De la Tabla 5.8, se ve que  $s_4$  es real y que el centralizador es  $M_{22}^{s_4} = \langle s_4 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$ . Así, si  $q_{s_j s_j} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. El caso restante corresponde a la representación  $\chi_{(-1)}$ , dada por  $\chi_{(-1)}(s_4) = \omega_8^4 = -1$ , la cual satisface  $q_{s_4 s_4} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_4} \cap M_{22}^{s_4} = \{s_4, s_4^3, s_4^5, s_4^7\}$ ; luego, es fácil ver que la trenza es negativa.

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$ s_j $	1	4	2	8	7	7	5	11	11	4	6	3
$ G^{s_j} $	443520	32	384	8	7	7	5	11	11	16	12	36
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	21	1	5	-1	0	0	1	-1	-1	1	-1	3
$\chi_3$	45	1	-3	-1	C	C'	0	1	1	1	0	0
$\chi_4$	45	1	-3	-1	C'	C	0	1	1	1	0	0
$\chi_5$	55	3	7	1	-1	-1	0	0	0	-1	1	1
$\chi_6$	99	3	3	-1	1	1	-1	0	0	-1	0	0
$\chi_7$	154	-2	10	0	0	0	-1	0	0	2	1	1
$\chi_8$	210	-2	2	0	0	0	0	1	1	-2	-1	3
$\chi_9$	231	-1	7	-1	0	0	1	0	0	-1	1	-3
$\chi_{10}$	280	0	-8	0	0	0	0	A'	A	0	1	1
$\chi_{11}$	280	0	-8	0	0	0	0	A	A'	0	1	1
$\chi_{12}$	385	1	1	1	0	0	0	0	0	1	-2	-2

Tabla 5.8: Tabla de caracteres de  $M_{22}$ .

CASO:  $j = 11$ . El centralizador es  $M_{22}^{s_{11}} = \langle x, s_{11} \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6$ , donde

$$x := (2, 9)(3, 16)(4, 12)(5, 8)(6, 19)(10, 18)(13, 20)(14, 17).$$

Definimos  $\{\nu_0, \dots, \nu_5\}$ , donde  $\nu_l(s_{11}) := \omega_6^l$ ,  $0 \leq l \leq 5$ . Luego,

$$\widehat{M_{22}^{s_{11}}} = \{\epsilon \otimes \nu_l, \text{sgn} \otimes \nu_l \mid 0 \leq l \leq 5\},$$

donde  $\epsilon$  y  $\text{sgn}$  son la representación trivial y signo de  $\mathbb{Z}/2$ , respectivamente. Ya que  $s_{11}$  es real se tiene que si  $\rho \in \widehat{M_{22}^{s_{11}}}$ , con  $l \neq 3$ , entonces  $q_{s_{11}s_{11}} \neq -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{11}}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Los dos casos que faltan son  $\rho = \epsilon \otimes \nu_3$  y  $\rho = \text{sgn} \otimes \nu_3$ . Probaremos que para dichos casos el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{11}}, \rho)$  también es de dimensión infinita. Se computa que  $\mathcal{O}_{s_{11}} \cap M_{22}^{s_{11}}$  contiene a  $\sigma_1 := s_{11}$ ,

$$\sigma_2 := (1, 7, 22)(2, 8, 6, 9, 5, 19)(3, 17, 13, 16, 14, 20)(4, 12)(10, 18)(11, 15, 21),$$

$$\sigma_3 := (1, 7, 22)(2, 20, 6, 17, 5, 16)(3, 9, 13, 19, 14, 8)(4, 18)(10, 12)(11, 15, 21).$$

Se puede ver que  $\sigma_2 = xs_{11}^4$  y  $\sigma_3 = xs_{11}$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,

$$g_2 := (1, 7, 22)(3, 19, 16)(4, 12, 10)(8, 20, 13)(9, 17, 14)(11, 21, 15)$$

y  $g_3 := g_2^{-1}$ . Estos elementos están en  $M_{22}$  y satisfacen las relaciones dadas por (5.6), (5.7) y (5.8). Ahora bien, si  $W := \mathbb{C} - \text{span} \{g_1, g_2, g_3\}$ , entonces  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_{11}}, \rho)$  de tipo Cartan con matriz de coeficientes dada por  $\mathcal{Q}_1$  (resp.  $\mathcal{Q}_2$ ) para el caso  $\rho = \epsilon \otimes \nu_3$  (resp.  $\rho = \text{sgn} \otimes \nu_3$ ) – ver (5.9). En ambos casos la matriz de Cartan asociada es como en (5.5). Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{11}}, \rho) = \infty$ .

CASO:  $j = 10$ . El centralizador es  $M_{22}^{s_{10}} = \langle x, s_{10} \rangle \simeq \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$ , donde

$$x := (1, 9, 13, 10)(3, 11)(4, 8)(5, 22, 14, 18)(6, 12, 16, 20)(7, 19, 17, 15)$$

está en  $\mathcal{O}_{s_{10}}$ . Sean  $\{\nu_0, \dots, \nu_3\}$ , con  $\nu_l(-) := \omega_4^l$ ,  $0 \leq l \leq 3$ , entonces

$$\widehat{M_{22}^{s_{10}}} = \{\nu_l \otimes \nu_t, \mid 0 \leq l, t \leq 3\}.$$

Si  $\rho = \nu_l \otimes \nu_t$ , con  $t \neq 2$  y  $0 \leq l \leq 3$ , entonces  $q_{s_{10}s_{10}} = (\nu_l \otimes \nu_t)(s_{10}) = \omega_4^t \neq -1$ ; ya que  $s_{10}$  es real se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{10}}, \rho) = \infty$ . Supongamos que  $\rho = \nu_l \otimes \nu_2$ ,  $0 \leq l \leq 3$ . Definimos  $\sigma_1 := s_{10}$ ,  $\sigma_2 := s_{10}^{-1}$ ,  $\sigma_3 := x$ ,  $\sigma_4 := x^{-1}$ , y elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,

$$\begin{aligned} g_2 &:= (3, 8)(4, 11)(6, 17)(7, 16)(9, 18)(10, 22)(12, 20)(15, 19), \\ g_3 &:= (3, 8, 4)(5, 13, 14)(6, 9, 19)(7, 22, 15)(10, 12, 17)(16, 18, 20) \end{aligned}$$

y  $g_4 := g_3g_2$ . Estos elementos están en  $M_{22}$  y satisfacen que  $\sigma_r g_r = g_r s_{10}$ ,  $\sigma_r g_1 = g_1 \sigma_r$ ,  $1 \leq r \leq 4$ , y

$$\begin{aligned} \sigma_1 g_2 &= g_2 s_{10}^{-1}, & \sigma_1 g_3 &= g_3 x^{-1} s_{10}^{-1}, & \sigma_1 g_4 &= g_4 x s_{10}^{-1}, \\ \sigma_3 g_2 &= g_2 x^{-1} s_{10}^2, & \sigma_2 g_3 &= g_3 x s_{10}, & \sigma_2 g_4 &= g_4 x^{-1} s_{10}, \\ \sigma_4 g_2 &= g_2 x s_{10}^2, & \sigma_4 g_3 &= g_3 s_{10}^{-1}, & \sigma_3 g_4 &= g_4 s_{10}^{-1}. \end{aligned}$$

Si se define  $W := \mathbb{C}$  - span  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ , entonces  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_{10}}, \rho)$  de tipo Cartan, cuya matriz de Cartan asociada está dada por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{10}}, \rho) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 2$ . El elemento  $s_2$  es real, tiene orden 4 y su centralizador  $M_{22}^{s_2}$  es un grupo no abeliano de orden 32.

Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{M_{22}^{s_2}}$ . Probaremos que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho)$  es de dimensión infinita. Si  $q_{s_2 s_2} \neq -1$ , entonces el resultado sigue por Lema 2.3.4. Supongamos que  $q_{s_2 s_2} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_2} \cap M_{24}^{s_2}$  tiene 16 elementos y contiene a  $\sigma_1 := s_2$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_2 &:= (1, 7, 15, 11)(2, 12, 10, 4)(3, 16, 13, 20)(5, 6)(9, 17, 18, 14)(21, 22) = y_9, \\ \sigma_3 &:= (1, 9, 3, 4)(2, 7, 17, 16)(5, 22)(6, 21)(10, 11, 14, 20)(12, 15, 18, 13). \end{aligned}$$

Además,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  conmutan entre sí y  $\sigma_2 \sigma_3 = s_2^{-1}$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,

$$g_2 := (2, 16, 12)(3, 13, 15)(4, 17, 11)(5, 6, 21)(7, 9, 10)(14, 20, 18)$$

y  $g_3 := g_2^{-1}$ . Estos elementos pertenecen a  $M_{22}$  y satisfacen las relaciones dadas por (5.6), (5.7) y (5.8). Se define  $W := \mathbb{C}$  - span  $\{g_1 v, g_2 v, g_3 v\}$ , con  $v \in V - 0$ . Luego, es fácil ver que  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_2}, \rho)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan asociada está dada por (5.5). Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 3$ . El centralizador  $M_{22}^{s_3}$  es un grupo no abeliano de orden 384, cuya tabla de caracteres está dada por la Tabla 5.9, con  $D := i\sqrt{3}$ . Los representantes de las clases de conjugación



$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$ y_k $	1	2	2	3	4	2	6	4	4	4	8	6	4	4	6	2	2
$ G^{y_k} $	384	16	32	12	8	64	12	16	32	16	8	12	16	16	12	48	384
$ \mathcal{O}_{y_k} $	1	24	12	32	48	6	32	24	12	24	48	32	24	24	32	8	1
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
$\mu_3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
$\mu_4$	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1
$\mu_5$	2	0	2	-1	0	2	-1	0	2	-2	0	1	0	0	1	-2	2
$\mu_6$	2	0	2	-1	0	2	-1	0	2	2	0	-1	0	0	-1	2	2
$\mu_7$	3	-1	-1	0	1	3	0	-1	-1	1	-1	0	1	1	0	-3	3
$\mu_8$	3	1	-1	0	-1	3	0	1	-1	1	1	0	-1	-1	0	-3	3
$\mu_9$	3	-1	-1	0	1	3	0	-1	-1	-1	1	0	-1	-1	0	3	3
$\mu_{10}$	3	1	-1	0	-1	3	0	1	-1	-1	-1	0	1	1	0	3	3
$\mu_{11}$	6	0	-2	0	0	-2	0	0	2	0	0	0	2	-2	0	0	6
$\mu_{12}$	6	0	-2	0	0	-2	0	0	2	0	0	0	-2	2	0	0	6
$\mu_{13}$	6	-2	2	0	0	-2	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	6
$\mu_{14}$	6	2	2	0	0	-2	0	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	6
$\mu_{15}$	8	0	0	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8
$\mu_{16}$	8	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	D	0	0	-D	0	-8
$\mu_{17}$	8	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	-D	0	0	D	0	-8

Tabla 5.9: Tabla de caracteres de  $M_{22}^{s_3}$ .

de  $M_{22}^{s_3}$  son  $y_1 := \text{id}$ ,

$$\begin{aligned}
y_2 &:= (3, 10)(4, 18)(6, 19)(7, 20)(8, 22)(9, 11)(12, 16)(15, 17), \\
y_3 &:= (3, 15)(4, 20)(6, 22)(7, 18)(8, 19)(9, 16)(10, 17)(11, 12), \\
y_4 &:= (2, 3, 10)(4, 11, 12)(5, 8, 22)(6, 21, 19)(9, 18, 16)(14, 15, 17), \\
y_5 &:= (2, 3, 14, 15)(4, 7, 11, 9)(5, 8, 21, 19)(6, 22)(10, 17)(12, 18, 20, 16), \\
y_6 &:= (1, 2)(3, 17)(4, 20)(7, 18)(9, 11)(10, 15)(12, 16)(13, 14), \\
y_7 &:= (1, 2, 3, 13, 14, 15)(4, 20, 9, 18, 7, 12)(5, 6, 19)(8, 21, 22)(10, 17)(11, 16), \\
y_8 &:= (1, 2, 3, 17)(4, 7, 9, 16)(5, 6)(10, 13, 14, 15)(11, 18, 20, 12)(21, 22), \\
y_9 &:= (1, 2, 13, 14)(3, 10, 15, 17)(4, 9, 18, 12)(5, 21)(7, 11, 20, 16)(8, 19), \\
y_{10} &:= (1, 4, 15, 12)(2, 7, 10, 11)(3, 9, 13, 18)(5, 21)(6, 22)(14, 20, 17, 16), \\
y_{11} &:= (1, 4, 3, 11, 13, 18, 15, 16)(2, 7, 17, 12, 14, 20, 10, 9)(5, 21)(6, 19, 22, 8), \\
y_{12} &:= (1, 4, 2, 9, 3, 11)(5, 8, 6)(7, 10)(12, 15, 16, 13, 18, 14)(17, 20)(19, 22, 21), \\
y_{13} &:= (1, 4, 10, 16)(2, 9, 15, 7)(3, 20, 14, 12)(5, 8)(11, 13, 18, 17)(19, 21), \\
y_{14} &:= (1, 4, 13, 18)(2, 11, 14, 16)(3, 9, 15, 12)(5, 6)(7, 17, 20, 10)(21, 22), \\
y_{15} &:= (1, 4, 17, 9, 3, 20)(2, 11)(5, 6, 8)(7, 13, 18, 10, 12, 15)(14, 16)(19, 21, 22), \\
y_{16} &:= (1, 4)(2, 20)(3, 9)(7, 14)(10, 16)(11, 17)(12, 15)(13, 18), \\
y_{17} &:= (1, 13)(2, 14)(3, 15)(4, 18)(7, 20)(9, 12)(10, 17)(11, 16) = s_3.
\end{aligned}$$

Para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 17$ , llamamos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{22}^{s_3}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . De la Tabla 5.9 y por ser  $s_3$  real, se tiene que si  $k \neq 15, 16, 17$ , entonces  $q_{s_3 s_3} \neq -1$

y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_3}, \rho_k) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Por otro lado, si  $k = 15, 16$  ó  $17$ , entonces  $q_{s_3 s_3} = -1$ . Para estos casos se probará que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_3}, \rho_k) = \infty$ . Primero se computa que  $\mathcal{O}_{s_3} \cap M_{22}^{s_3}$  tiene 51 elementos y que contiene a  $\sigma_1 = s_3$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_2 &:= (3, 15)(4, 20)(6, 22)(7, 18)(8, 19)(9, 16)(10, 17)(11, 12) = y_3, \\ \sigma_3 &:= (1, 13)(2, 14)(4, 7)(6, 22)(8, 19)(9, 11)(12, 16)(18, 20).\end{aligned}$$

Es fácil ver que  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  conmutan entre sí y que  $\sigma_2 \sigma_3 = s_3$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,

$$\begin{aligned}g_2 &:= (1, 6)(2, 8)(4, 11)(7, 9)(12, 18)(13, 22)(14, 19)(16, 20), \\ g_3 &:= (3, 6)(4, 16)(7, 11)(8, 17)(9, 20)(10, 19)(12, 18)(15, 22).\end{aligned}$$

Estos elementos están en  $M_{22}$  y satisfacen las relaciones dadas por (5.1), (5.2) y (5.3).

Supongamos que  $k = 15, 16$  ó  $17$ . Ya que  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  conmutan existe una base  $\{v_l \mid 1 \leq l \leq 8\}$  de  $V_k$ , el espacio vectorial de la representación  $\rho_k$ , compuesta por autovectores simultáneos de  $\rho_k(\sigma_1) = -\text{Id}$ ,  $\rho_k(\sigma_2)$  y  $\rho_k(\sigma_3)$ . Digamos que  $\rho_k(\sigma_2)v_l = \lambda_l v_l$  y  $\rho_k(\sigma_3)v_l = \kappa_l v_l$ ,  $1 \leq l \leq 8$ . Notar que  $\lambda_l, \kappa_l = \pm 1$ ,  $1 \leq l \leq 8$ , ya que  $|\sigma_2| = 2 = |\sigma_3|$ . Por otro lado, como  $\sigma_2 \sigma_3 = s_2$  se tiene que  $\lambda_l \kappa_l = -1$ ,  $1 \leq l \leq 8$ . De la Tabla 5.9, podemos deducir que  $\sum_{l=1}^8 \lambda_l = 0$  pues  $\sigma_2 = y_3$  y  $\mu_k(\mathcal{O}_{y_3}^{M_{22}^{s_3}}) = 0$ . Reordenando la base podemos suponer que  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -1$ ; así,  $\kappa_1 = -1$  y  $\kappa_2 = 1$ . Definimos  $W := \mathbb{C}$  - span  $\{g_1 v_1, g_2 v_2, g_3 v_2\}$ . Luego,  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_3}, \rho_k)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan está dada por (5.5), y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_3}, \rho_k) = \infty$ .  $\square$

*Observación 5.1.6.* Se computa que los grupos  $M_{22}^{s_2}$  y  $M_{22}^{s_{12}}$  tienen 14 y 12 clases de conjugación, respectivamente. Luego, existen 132 pares posibles  $(\mathcal{O}, \rho)$  para  $M_{22}$ . Concluimos que 131 de ellos dan lugar a álgebras de Nichols de dimensión infinita, y 1 tiene  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de trenza negativa.

#### 5.1.4. El grupo $M_{23}$

El grupo de Mathieu simple  $M_{23}$  puede ser dado como un subgrupo de  $\mathbb{S}_{23}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}M_{23} &:= \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23), \\ &\quad (3, 17, 10, 7, 9)(4, 13, 14, 19, 5)(8, 18, 11, 12, 23)(15, 20, 22, 21, 16) \rangle.\end{aligned}$$

El orden de  $M_{23}$  es 10200960. En la Tabla 5.10, se muestra la tabla de caracteres de  $M_{23}$ , donde  $A = (-1+i\sqrt{7})/2$ ,  $B = (-1+i\sqrt{11})/2$ ,  $C = (-1+i\sqrt{15})/2$  y  $D = (-1+i\sqrt{23})/2$ . Los representantes

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$ s_j $	1	2	3	4	5	6	7	7	8	11	11	14	14	15	15	23	23
$ G^{s_j} $	$ M_{23} $	2688	180	32	15	12	14	14	8	11	11	14	14	15	15	23	23
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	22	6	4	2	2	0	1	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\chi_3$	45	-3	0	1	0	0	A	A'	-1	1	1	-A	-A'	0	0	-1	-1
$\chi_4$	45	-3	0	1	0	0	A'	A	-1	1	1	-A'	-A	0	0	-1	-1
$\chi_5$	230	22	5	2	0	1	-1	-1	0	-1	-1	1	1	0	0	0	0
$\chi_6$	231	7	6	-1	1	-2	0	0	-1	0	0	0	0	1	1	1	1
$\chi_7$	231	7	-3	-1	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	C	C'	1	1
$\chi_8$	231	7	-3	-1	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	C'	C	1	1
$\chi_9$	253	13	1	1	-2	1	1	1	-1	0	0	-1	-1	1	1	0	0
$\chi_{10}$	770	-14	5	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	D	D'
$\chi_{11}$	770	-14	5	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	D'	D
$\chi_{12}$	896	0	-4	0	1	0	0	0	0	B	B'	0	0	1	1	-1	-1
$\chi_{13}$	896	0	-4	0	1	0	0	0	0	B'	B	0	0	1	1	-1	-1
$\chi_{14}$	990	-18	0	2	0	0	A	A'	0	0	0	A	A'	0	0	1	1
$\chi_{15}$	990	-18	0	2	0	0	A'	A	0	0	0	A'	A	0	0	1	1
$\chi_{16}$	1035	27	0	-1	0	0	-1	-1	1	1	1	-1	-1	0	0	0	0
$\chi_{17}$	2024	8	-1	0	-1	-1	1	1	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0

Tabla 5.10: Tabla de caracteres de  $M_{23}$ .

de las clases de conjugación de  $M_{23}$  son  $s_1 := \text{id}$ ,

$$\begin{aligned}
s_2 &:= (1, 10)(3, 14)(4, 17)(5, 13)(6, 11)(12, 21)(16, 22)(20, 23), \\
s_3 &:= (1, 18, 7)(2, 10, 13)(3, 23, 9)(4, 12, 22)(8, 14, 17)(11, 20, 21), \\
s_4 &:= (1, 17, 10, 4)(2, 8)(3, 6, 14, 11)(5, 12, 13, 21)(7, 15)(16, 20, 22, 23), \\
s_5 &:= (1, 9, 21, 15, 7)(4, 17, 11, 22, 12)(6, 10, 16, 14, 18)(8, 19, 23, 20, 13), \\
s_6 &:= (1, 19, 20)(2, 9, 18, 17, 14, 5)(3, 21)(4, 13, 23, 10, 11, 22)(6, 8, 15)(7, 16), \\
s_7 &:= (1, 12, 14, 11, 18, 7, 10)(2, 21, 6, 19, 4, 5, 8)(3, 13, 9, 22, 17, 20, 23), \\
s_8 &:= 1, 11, 10, 14, 7, 12, 18)(2, 19, 8, 6, 5, 21, 4)(3, 22, 23, 9, 20, 13, 17), \\
s_9 &:= (1, 20, 17, 22, 10, 23, 4, 16)(2, 7, 8, 15)(3, 13, 6, 21, 14, 5, 11, 12)(9, 18), \\
s_{10} &:= (1, 22, 5, 2, 9, 21, 20, 4, 6, 18, 8)(7, 10, 13, 11, 23, 14, 16, 17, 15, 12, 19), \\
s_{11} &:= (1, 5, 9, 20, 6, 8, 22, 2, 21, 4, 18)(7, 13, 23, 16, 15, 19, 10, 11, 14, 17, 12), \\
s_{12} &:= (1, 22, 3, 15, 12, 21, 23)(2, 7, 17, 6, 11, 16, 20, 18, 14, 9, 4, 8, 5, 13)(10, 19), \\
s_{13} &:= (1, 15, 23, 3, 21, 22, 12)(2, 6, 20, 9, 5, 7, 11, 18, 4, 13, 17, 16, 14, 8)(10, 19), \\
s_{14} &:= (1, 23, 5, 21, 19)(2, 10, 13, 17, 3, 7, 12, 11, 4, 8, 6, 16, 9, 22, 18)(14, 20, 15), \\
s_{15} &:= (1, 5, 19, 23, 21)(2, 11, 18, 12, 22, 7, 9, 3, 16, 17, 6, 13, 8, 10, 4)(14, 20, 15) \\
s_{16} &:= (1, 7, 17, 13, 23, 19, 10, 14, 12, 3, 5, 15, 4, 6, 18, 9, 20, 8, 11, 22, 2, 21, 16), \\
s_{17} &:= (1, 19, 5, 9, 2, 17, 14, 4, 8, 16, 23, 3, 18, 22, 7, 10, 15, 20, 21, 13, 12, 6, 11), .
\end{aligned}$$

Resumimos nuestro estudio para el grupo  $M_{23}$  en el siguiente enunciado.

**Teorema 5.1.7.** *Sea  $\rho \in \widehat{M}_{23}^{s_j}$ , con  $1 \leq j \leq 17$ . La trenza es negativa en los casos  $j = 9, 12$  y  $13$ , con  $\rho = \chi_{(-1)}$ . En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ .*

*Demostración. CASO:  $j = 3, 5$ .* De la Tabla 5.10, se ve que  $s_j$  es real. Así,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M}_{23}^{s_j}$ , por Lema 2.3.4.

*CASO:  $j = 7, 8, 14, 15, 16, 17$ .* Se computa que  $s_j^2$  y  $s_j^4$  están en  $\mathcal{O}_{s_j}$ . Ya que  $|s_j|$  es impar se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M}_{23}^{s_j}$ , por Lema 2.3.5.

*CASO:  $j = 10, 11$ .* Se computa que  $s_j^3$  y  $s_j^9$  están en  $\mathcal{O}_{s_j}$ . Como  $|s_j| = 11$  resulta que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M}_{23}^{s_j}$ , por Lema 2.3.5.

*CASO:  $j = 12, 13$ .* El centralizador es  $M_{23}^{s_j} = \langle s_j \rangle \simeq \mathbb{Z}/14$ , y  $s_j^9$  y  $s_j^{11}$  están en  $\mathcal{O}_{s_j}$ . Así, si  $q_{s_j s_j} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.5. El caso restante corresponde a  $\rho(s_j) = \omega_{14}^7 = -1$ , el cual satisface  $q_{s_j s_j} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_j} \cap M_{23}^{s_j} = \{s_j, s_j^9, s_j^{11}\}$ ; ahora, es fácil ver que la trenza es negativa.

*CASO:  $j = 9$ .* El elemento  $s_9$  es real y su centralizador es  $M_{23}^{s_9} = \langle s_9 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$ . Así, si  $q_{s_9 s_9} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_9}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. El caso que falta corresponde a  $\rho(s_9) = \omega_8^4 = -1$ , el cual satisface  $q_{s_9 s_9} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_9} \cap M_{23}^{s_9} = \{s_9, s_9^3, s_9^5, s_9^7\}$ ; como antes, la trenza resulta negativa.

*CASO:  $j = 6$ .* El centralizador es  $M_{23}^{s_6} = \langle x, s_6 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6$ , con

$$x := (2, 22)(3, 7)(4, 9)(5, 11)(10, 14)(13, 18)(16, 21)(17, 23).$$

Sean  $\{\nu_0, \dots, \nu_5\}$ , con  $\nu_l(s_6) := \omega_6^l$ ,  $0 \leq l \leq 5$ . Luego,

$$\widehat{M}_{23}^{s_6} = \{\epsilon \otimes \nu_l, \text{sgn} \otimes \nu_l \mid 0 \leq l \leq 5\},$$

donde  $\epsilon$  y  $\text{sgn}$  son la representación trivial y signo de  $\mathbb{Z}/2$ , respectivamente. Notar que  $s_6$  es real. Si  $\rho \in \widehat{M}_{23}^{s_6}$ , con  $l \neq 3$ , entonces  $q_{s_6 s_6} \neq -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. En los dos casos restantes,  $\rho = \epsilon \otimes \nu_3$  y  $\rho = \text{sgn} \otimes \nu_3$ , se probará que también el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho)$  es de dimensión infinita. Primero se computa que  $\mathcal{O}_{s_6} \cap M_{23}^{s_6}$  tiene 6 elementos, y que contiene a  $\sigma_1 := s_{13}$ ,

$$\sigma_2 := (1, 19, 20)(2, 4, 18, 23, 14, 11)(3, 16)(5, 22, 9, 13, 17, 10)(6, 8, 15)(7, 21),$$

$$\sigma_3 := (1, 19, 20)(2, 10, 18, 22, 14, 13)(3, 7)(4, 5, 23, 9, 11, 17)(6, 8, 15)(16, 21).$$

Se puede ver que  $\sigma_2 = x s_6$  y  $\sigma_3 = x s_6^4$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,

$$g_2 := (1, 20, 19)(3, 21, 7)(4, 10, 9)(5, 11, 13)(6, 8, 15)(17, 23, 22),$$

y  $g_3 := g_2^{-1}$ . Estos elementos están en  $M_{23}$  y satisfacen las relaciones (5.6), (5.7) y (5.8). Si  $W := \mathbb{C} \cdot \text{span} \{g_1, g_2, g_3\}$ , entonces  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_6}, \rho)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan está dada por (5.5). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho) = \infty$ .

*CASO:  $j = 4$ .* El elemento  $s_4$  es real, tiene orden 4 y su centralizador  $M_{23}^{s_4}$  es un grupo no abeliano de orden 32.

Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{M_{23}^{s_4}}$ . Se probará que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_4}, \rho)$  es de dimensión infinita. Si  $q_{s_4 s_4} \neq -1$ , entonces el resultado sigue por Lema 2.3.4. Supongamos que  $q_{s_4 s_4} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_4} \cap M_{23}^{s_4}$  tiene 16 elementos y que contiene a  $\sigma_1 := s_4$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_2 &:= (1, 12, 6, 20)(2, 7)(3, 16, 4, 5)(8, 15)(10, 21, 11, 23)(13, 14, 22, 17), \\ \sigma_3 &:= (1, 16, 11, 13)(2, 15)(3, 21, 17, 20)(4, 23, 14, 12)(5, 10, 22, 6)(7, 8).\end{aligned}$$

Estos elementos conmutan entre sí y  $\sigma_2 \sigma_3 = s_4^{-1}$ . Se eligen  $g_1 := \text{id}$ ,

$$g_2 := (2, 15, 7)(3, 21, 5)(4, 20, 13)(6, 11, 10)(12, 16, 17)(14, 23, 22)$$

y  $g_3 := g_2^{-1}$ . Estos elementos pertenecen a  $M_{23}$  y satisfacen las relaciones (5.6), (5.7) y (5.8). Se define  $W := \mathbb{C}$ -span  $\{g_1 v, g_2 v, g_3 v\}$ , donde  $v \in V - 0$ . Luego, es fácil mostrar que  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_4}, \rho)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan asociada está dada por (5.5). Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_4}, \rho) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 2$ . El centralizador  $M_{23}^{s_2}$  es un grupo no abeliano de orden 2688, cuya tabla de caracteres está dada por la Tabla 5.11, donde  $A = (-1 + i\sqrt{7})/2$  y  $B = i\sqrt{3}$ . Los representantes de las clases de conjugación de  $M_{23}^{s_2}$  son  $y_1 := \text{id}$ ,

$$\begin{aligned}y_2 &:= (2, 7, 9, 18, 8, 19, 15)(3, 20, 5, 12, 11, 16, 4)(6, 22, 17, 14, 23, 13, 21), \\ y_3 &:= (2, 18, 15, 9, 19, 7, 8)(3, 12, 4, 5, 16, 20, 11)(6, 14, 21, 17, 13, 22, 23), \\ y_4 &:= (1, 10)(2, 8, 7, 19, 9, 15, 18)(3, 6, 20, 22, 5, 17, 12, 14, 11, 23, 16, 13, 4, 21), \\ y_5 &:= (1, 10)(2, 19, 18, 7, 15, 8, 9)(3, 22, 12, 23, 4, 6, 5, 14, 16, 21, 20, 17, 11, 13), \\ y_6 &:= (1, 23, 4)(3, 6, 21)(7, 8, 15)(9, 18, 19)(10, 20, 17)(11, 12, 14), \\ y_7 &:= (1, 17, 23, 10, 4, 20)(3, 12, 6, 14, 21, 11)(5, 13)(7, 15, 8)(9, 19, 18)(16, 22), \\ y_8 &:= (1, 3, 23, 6, 4, 21)(5, 16)(7, 15, 8)(9, 19, 18)(10, 14, 20, 11, 17, 12)(13, 22), \\ y_9 &:= (1, 21, 4, 6, 23, 3)(5, 16)(7, 8, 15)(9, 18, 19)(10, 12, 17, 11, 20, 14)(13, 22), \\ y_{10} &:= (1, 10)(3, 14)(4, 17)(5, 13)(6, 11)(12, 21)(16, 22)(20, 23) = s_2, \\ y_{11} &:= (1, 12, 10, 21)(2, 15)(3, 22, 14, 16)(4, 13, 17, 5)(6, 20, 11, 23)(7, 8), \\ y_{12} &:= (1, 5, 12, 4, 10, 13, 21, 17)(2, 7, 15, 8)(3, 6, 22, 20, 14, 11, 16, 23)(18, 19), \\ y_{13} &:= (1, 6)(3, 4)(5, 16)(10, 11)(12, 20)(13, 22)(14, 17)(21, 23), \\ y_{14} &:= (1, 4, 6, 3)(2, 15)(5, 12, 16, 20)(7, 8)(10, 17, 11, 14)(13, 21, 22, 23), \\ y_{15} &:= (2, 15)(3, 4)(5, 22)(7, 8)(12, 21)(13, 16)(14, 17)(20, 23), \\ y_{16} &:= (1, 6, 10, 11)(2, 7, 15, 8)(3, 5, 17, 16)(4, 22, 14, 13)(12, 21)(18, 19).\end{aligned}$$

Para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 16$ , llamamos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{23}^{s_2}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . De la Tabla 5.11, se tiene que si  $k \neq 9, 10, 11, 15, 16$ , entonces  $q_{s_2 s_2} \neq -1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Por otro lado, si  $k = 9, 10, 11, 15$  ó  $16$ , entonces  $q_{s_2 s_2} = -1$ . En estos casos, se probará que el álgebra de Nichols también es de dimensión infinita. Primero se computa que  $\mathcal{O}_{s_2} \cap M_{23}^{s_2}$  tiene 99 elementos y contiene a  $\sigma_1 := s_2$ ,

$$\sigma_2 := (3, 6)(5, 20)(7, 9)(11, 14)(12, 21)(13, 23)(15, 18)(16, 22).$$

Además, se computa que  $\sigma_2 \in \mathcal{O}_{y_{15}}^{M_{23}^{s_2}}$ . Ahora bien, se eligen  $g_1 := \text{id}$  y

$$g_2 := (1, 7)(3, 20)(4, 18)(5, 14)(6, 23)(9, 10)(11, 13)(15, 17).$$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$ y_k $	1	7	7	14	14	3	6	6	6	2	4	8	2	4	2	4
$ G^{y_k} $	2688	14	14	14	14	12	12	12	12	2688	32	8	192	16	32	8
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	3	A	A'	A	A'	0	0	0	0	3	-1	1	3	-1	-1	1
$\mu_3$	3	A'	A	A'	A	0	0	0	0	3	-1	1	3	-1	-1	1
$\mu_4$	6	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	6	2	0	6	2	2	0
$\mu_5$	7	0	0	0	0	1	1	-1	-1	7	3	1	-1	-1	-1	-1
$\mu_6$	7	0	0	0	0	1	1	1	1	7	-1	-1	7	-1	-1	-1
$\mu_7$	7	0	0	0	0	1	1	-1	-1	7	-1	-1	-1	-1	3	1
$\mu_8$	8	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	8	0	0	8	0	0	0
$\mu_9$	8	1	1	-1	-1	2	-2	0	0	-8	0	0	0	0	0	0
$\mu_{10}$	8	1	1	-1	-1	-1	1	B	-B	-8	0	0	0	0	0	0
$\mu_{11}$	8	1	1	-1	-1	-1	1	-B	B	-8	0	0	0	0	0	0
$\mu_{12}$	14	0	0	0	0	-1	-1	1	1	14	2	0	-2	-2	2	0
$\mu_{13}$	21	0	0	0	0	0	0	0	0	21	1	-1	-3	1	-3	1
$\mu_{14}$	21	0	0	0	0	0	0	0	0	21	-3	1	-3	1	1	-1
$\mu_{15}$	24	A'	A	-A'	-A	0	0	0	0	-24	0	0	0	0	0	0
$\mu_{16}$	24	A	A'	-A	-A'	0	0	0	0	-24	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.11: Tabla de caracteres de  $M_{23}^{s_2}$ .

Estos elementos están en  $M_{23}$ , y cumplen  $\sigma_r g_r = g_r \sigma_1$ ,  $r = 1, 2$ ,  $\sigma_2 g_1 = g_1 \sigma_2$  y  $\sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_2$ .

Asumamos que  $k = 9, 10, 11, 15$  ó  $16$ . De la Tabla 5.11, se tiene que el grado de  $\rho_k$  es 8 ó 24. Dado que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  conmutan se tiene que existe una base  $\{v_l \mid 1 \leq l \leq \deg(\rho_k)\}$  de  $V_k$ , el espacio vectorial de la representación  $\rho_k$ , compuesta por autovectores simultáneos de  $\rho_k(\sigma_1) = -\text{Id}$  y  $\rho_k(\sigma_2)$ . Digamos que  $\rho_k(\sigma_2)v_l = \lambda_l v_l$ ,  $1 \leq l \leq \deg(\rho_k)$ , donde  $\lambda_l = \pm 1$ , pues  $|\sigma_2| = 2$ . De la Tabla 5.11, tenemos que  $\sum_{l=1}^{\deg(\rho_k)} \lambda_l = 0$ . Reordenando la base podemos suponer que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{\deg(\rho_k)/2} = 1 = -\lambda_{1+\deg(\rho_k)/2} = \dots = -\lambda_{\deg(\rho_k)}$ . Se puede verificar fácilmente que si  $W := \mathbb{C} \text{-span} \{g_1 v_l, g_2 v_l \mid 1 \leq l \leq \deg(\rho_k)\}$ , entonces  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_2}, \rho)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan asociada  $\mathcal{A}$  tiene al menos dos filas con tres  $-1$  o más. Esto implica que el Diagrama de Dynkin correspondiente tiene al menos dos vértices con tres aristas o más; luego,  $\mathcal{A}$  no es de tipo finito. Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k) = \infty$ .  $\square$

*Observación 5.1.8.* Se computa que los grupos  $M_{23}^{s_3}$ ,  $M_{23}^{s_4}$ ,  $M_{23}^{s_5}$ ,  $M_{23}^{s_7}$  y  $M_{23}^{s_8}$  tienen 15, 14, 15, 14 y 14 clases de conjugación, respectivamente. Luego, existen 251 pares posibles  $(\mathcal{O}, \rho)$  para  $M_{23}$ ; 248 de ellos dan lugar a álgebras de Nichols de dimensión infinita, y 3 tienen  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de trenza negativa.

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$ s_j $	1	2	2	3	3	4	4	4	5	6	6	7	7
$ G^{s_j} $	$ M_{24} $	21504	7680	1080	504	384	128	96	60	24	24	42	42
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	23	7	-1	5	-1	-1	3	-1	3	1	-1	2	2
$\chi_3$	45	-3	5	0	3	-3	1	1	0	0	-1	A	A'
$\chi_4$	45	-3	5	0	3	-3	1	1	0	0	-1	A'	A
$\chi_5$	231	7	-9	-3	0	-1	-1	3	1	1	0	0	0
$\chi_6$	231	7	-9	-3	0	-1	-1	3	1	1	0	0	0
$\chi_7$	252	28	12	9	0	4	4	0	2	1	0	0	0
$\chi_8$	253	13	-11	10	1	-3	1	1	3	-2	1	1	1
$\chi_9$	483	35	3	6	0	3	3	3	-2	2	0	0	0
$\chi_{10}$	770	-14	10	5	-7	2	-2	-2	0	1	1	0	0
$\chi_{11}$	770	-14	10	5	-7	2	-2	-2	0	1	1	0	0
$\chi_{12}$	990	-18	-10	0	3	6	2	-2	0	0	-1	A	A'
$\chi_{13}$	990	-18	-10	0	3	6	2	-2	0	0	-1	A'	A
$\chi_{14}$	1035	27	35	0	6	3	-1	3	0	0	2	-1	-1
$\chi_{15}$	1035	-21	-5	0	-3	3	3	-1	0	0	1	2A	2A'
$\chi_{16}$	1035	-21	-5	0	-3	3	3	-1	0	0	1	2A'	2A
$\chi_{17}$	1265	49	-15	5	8	-7	1	-3	0	1	0	-2	-2
$\chi_{18}$	1771	-21	11	16	7	3	-5	-1	1	0	-1	0	0
$\chi_{19}$	2024	8	24	-1	8	8	0	0	-1	-1	0	1	1
$\chi_{20}$	2277	21	-19	0	6	-3	1	-3	-3	0	2	2	2
$\chi_{21}$	3312	48	16	0	-6	0	0	0	-3	0	-2	1	1
$\chi_{22}$	3520	64	0	10	-8	0	0	0	0	-2	0	-1	-1
$\chi_{23}$	5313	49	9	-15	0	1	-3	-3	3	1	0	0	0
$\chi_{24}$	5544	-56	24	9	0	-8	0	0	-1	1	0	0	0
$\chi_{25}$	5796	-28	36	-9	0	-4	4	0	1	-1	0	0	0
$\chi_{26}$	10395	-21	-45	0	0	3	-1	3	0	0	0	0	0

Tabla 5.12: Tabla de caracteres de  $M_{24}$  (i).

### 5.1.5. El grupo $M_{24}$

El grupo de Mathieu simple  $M_{24}$  puede ser dado como un subgrupo de  $S_{24}$  de la siguiente manera

$$M_{24} := \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23), \\ (3, 17, 10, 7, 9)(4, 13, 14, 19, 5)(8, 18, 11, 12, 23)(15, 20, 22, 21, 16), \\ (1, 24)(2, 23)(3, 12)(4, 16)(5, 18)(6, 10)(7, 20)(8, 14)(9, 21)(11, 17)(13, 22)(15, 19) \rangle.$$

El orden de  $M_{24}$  es 244823040. En las Tablas 5.12 y 5.13, se muestra la tabla de caracteres de  $M_{24}$ , donde  $A = (-1 + i\sqrt{7})/2$ ,  $C = (-1 + i\sqrt{15})/2$  y  $D = (-1 + i\sqrt{23})/2$ .

Resumimos nuestro estudio para el grupo  $M_{24}$  en el siguiente enunciado.

**Teorema 5.1.9.** Sea  $\rho \in \widehat{M_{24}^{s_j}}$ . La trenza es negativa en los casos  $j = 6$ , con  $\rho = \rho_{2,6}$  ó  $\rho_{3,6}$ ,  $j = 8$ ,

$j$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$ s_j $	8	10	11	12	12	14	14	15	15	21	21	23	23
$ G^{s_j} $	16	20	11	12	12	14	14	15	15	21	21	23	23
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0
$\chi_3$	-1	0	1	0	1	-A	-A'	0	0	A	A'	-1	-1
$\chi_4$	-1	0	1	0	1	-A'	-A	0	0	A'	A	-1	-1
$\chi_5$	-1	1	0	-1	0	0	0	C	C'	0	0	1	1
$\chi_6$	-1	1	0	-1	0	0	0	C'	C	0	0	1	1
$\chi_7$	0	2	-1	1	0	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1
$\chi_8$	-1	-1	0	0	1	-1	-1	0	0	1	1	0	0
$\chi_9$	-1	-2	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$\chi_{10}$	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	D	D'
$\chi_{11}$	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	D'	D
$\chi_{12}$	0	0	0	0	1	A	A'	0	0	A	A'	1	1
$\chi_{13}$	0	0	0	0	1	A'	A	0	0	A'	A	1	1
$\chi_{14}$	1	0	1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0
$\chi_{15}$	-1	0	1	0	-1	0	0	0	0	-A	-A'	0	0
$\chi_{16}$	-1	0	1	0	-1	0	0	0	0	-A'	-A	0	0
$\chi_{17}$	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$\chi_{18}$	-1	1	0	0	-1	0	0	1	1	0	0	0	0
$\chi_{19}$	0	-1	0	-1	0	1	1	-1	-1	1	1	0	0
$\chi_{20}$	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
$\chi_{21}$	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	1	0	0
$\chi_{22}$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	1	1
$\chi_{23}$	-1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\chi_{24}$	0	-1	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	1	1
$\chi_{25}$	0	1	-1	-1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$\chi_{26}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Tabla 5.13: Tabla de caracteres de  $M_{24}$  (ii).

con  $\rho = \rho_{2,8}$  ó  $\rho_{3,8}$ ,  $j = 14$ , con  $\rho = \epsilon \otimes \chi_{(-1)}$  ó  $\text{sgn} \otimes \chi_{(-1)}$ ,  $j = 17, 18, 19$  y  $20$ , con  $\rho = \chi_{(-1)}$ . En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_s, \rho) = \infty$ .

*Demostración.* CASO:  $j = 4, 5, 9, 16$ . De las Tablas 5.12 y 5.13, se ve que  $s_j$  es real. Por Lema 2.3.4,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M}_{24}^{s_j}$ .

CASO:  $j = 12, 13, 21, 22, 23, 24, 25, 26$ . Se computa que  $s_j^2$  y  $s_j^4$  están en  $\mathcal{O}_{s_j}$ . Ya que  $|s_j|$  es impar se tiene que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , para toda  $\rho \in \widehat{M}_{24}^{s_j}$ , por Lema 2.3.5.

CASO:  $j = 19, 20$ . El elemento  $s_j$  tiene orden 14 y su centralizador es  $M_{24}^{s_j} \simeq \mathbb{Z}/14$ . Se computa que  $s_j^9, s_j^{11} \in \mathcal{O}_{s_j}$ . Así, si  $q_{s_j s_j} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.5. El caso que falta corresponde a  $\rho(s_j) = \omega_{14}^7 = -1$ , y satisface  $q_{s_j s_j} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_j} \cap M_{24}^{s_j} = \{s_j, s_j^9, s_j^{11}\}$ ; luego, es fácil probar que la trenza es negativa.



*CASO:*  $j = 17, 18$ . El elemento  $s_j$  es real, tiene orden 12 y su centralizador es  $M_{24}^{s_j} \simeq \mathbb{Z}/12$ . Luego, si  $q_{s_j s_j} \neq -1$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_j}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. El caso restante corresponde a  $\rho(s_j) = \omega_{12}^6 = -1$ , y satisface  $q_{s_j s_j} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_j} \cap M_{24}^{s_j} = \{s_j, s_j^5, s_j^7, s_j^{11}\}$ ; como antes, la trenza resulta negativa.

*CASO:*  $j = 15$ . El elemento  $s_{15}$  es real, tiene orden 10 y su centralizador es  $M_{24}^{s_{15}} = \langle x, s_{15} \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/10$ , donde

$$x := (1, 12)(2, 18)(3, 6)(4, 10)(5, 7)(8, 23)(9, 22)(11, 24)(13, 15)(14, 21)(16, 20)(17, 19).$$

Sean  $\{\nu_0, \dots, \nu_9\}$ , donde  $\nu_l(s_{15}) := \omega_{10}^l$ ,  $0 \leq l \leq 9$ . Luego,

$$\widehat{M_{24}^{s_{15}}} = \{\epsilon \otimes \nu_l, \text{sgn} \otimes \nu_l \mid 0 \leq l \leq 9\},$$

donde  $\epsilon$  y  $\text{sgn}$  son la representación trivial y signo de  $\mathbb{Z}/2$ , respectivamente. Si  $\rho \in \widehat{M_{24}^{s_{15}}}$ , con  $l \neq 5$ , entonces  $q_{s_{15} s_{15}} \neq -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{15}}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Los dos casos restantes son  $\rho = \epsilon \otimes \nu_5$  y  $\rho = \text{sgn} \otimes \nu_5$ ; se probará que también dan lugar álgebras de Nichols de dimensión infinita. Primero se computa que  $\mathcal{O}_{s_{15}} \cap M_{24}^{s_{15}}$  tiene 12 elementos y contiene a  $\sigma_1 := s_{15}$ ,

$$\sigma_2 := (1, 12)(2, 5, 14, 10, 9, 18, 7, 21, 4, 22)(3, 19, 13, 20, 23, 6, 17, 15, 16, 8)(11, 24),$$

$$\sigma_3 := (1, 24)(2, 6, 14, 15, 9, 8, 7, 19, 4, 20)(3, 21, 13, 22, 23, 5, 17, 10, 16, 18)(11, 12).$$

Además, se puede ver que  $\sigma_2 \sigma_3 = \sigma_1^7$ . Elegimos  $g_1 = \text{id}$ ,

$$g_2 := (1, 11, 24)(3, 5, 6)(8, 23, 18)(10, 15, 13)(16, 22, 20)(17, 21, 19)$$

y  $g_3 := g_2^{-1}$ . Estos elementos están en  $M_{24}$  y satisfacen las relaciones (5.6), (5.7) y (5.8).

Supongamos que  $\rho = \epsilon \otimes \nu_5$  ó  $\text{sgn} \otimes \nu_5$ . Si  $W := \mathbb{C} \text{-span} \{g_1, g_2, g_3\}$ , entonces  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_{15}}, \rho)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan está dada por (5.5). Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{15}}, \rho) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 14$ . El elemento  $s_{14}$  es real, tiene orden 8 y su centralizador es  $M_{24}^{s_{14}} = \langle x, s_{14} \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8$ , donde

$$x := (1, 3)(2, 13)(4, 5)(6, 18)(7, 23)(8, 11)(9, 15)(10, 19)(12, 22)(14, 21)(16, 20)(17, 24).$$

Sean  $\{\nu_0, \dots, \nu_7\}$ , donde  $\nu_l(s_{14}) := \omega_8^l$ ,  $0 \leq l \leq 7$ . Luego,

$$\widehat{M_{24}^{s_{14}}} = \{\epsilon \otimes \nu_l, \text{sgn} \otimes \nu_l \mid 0 \leq l \leq 7\},$$

donde  $\epsilon$  y  $\text{sgn}$  son la representación trivial y signo de  $\mathbb{Z}/2$ , respectivamente. Si  $\rho \in \widehat{M_{24}^{s_{14}}}$ , con  $l \neq 4$ , entonces  $q_{s_{14} s_{14}} \neq -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{14}}, \rho) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Los dos casos restantes  $\rho = \epsilon \otimes \nu_4$  y  $\rho = \text{sgn} \otimes \nu_4$  tienen trenza negativa. En efecto, se tiene que

$$\mathcal{O}_{s_{14}} \cap M_{24}^{s_{14}} = \{s_{14}^{-1}, x s_{14}^{-3}, x s_{14}, s_{14}^3, s_{14}^{-3}, x s_{14}^3, s_{14}, x s_{14}^{-1}\}.$$

Por simplicidad escribimos

$$\begin{array}{llll} \sigma_1 := s_{14}^{-1}, & \sigma_2 := x s_{14}^{-3}, & \sigma_3 := x s_{14}, & \sigma_4 := s_{14}^3, \\ \sigma_5 := s_{14}^{-3}, & \sigma_6 := x s_{14}^3, & \sigma_7 := s_{14}, & \sigma_8 := x s_{14}^{-1}. \end{array}$$

Se eligen en  $M_{24}$  los siguientes elementos

$$\begin{aligned} g_1 &:= (3, 8)(4, 5)(7, 22)(9, 15)(10, 23)(12, 21)(14, 19)(16, 18), \\ g_2 &:= (2, 4)(5, 13)(7, 21)(9, 17)(10, 22)(12, 19)(14, 23)(15, 24), \\ g_3 &:= (2, 5)(4, 13)(7, 23)(9, 24)(10, 19)(12, 22)(14, 21)(15, 17), \\ g_4 &:= (2, 13)(3, 8)(7, 19)(10, 21)(12, 23)(14, 22)(16, 18)(17, 24), \\ g_5 &:= (2, 13)(4, 5)(7, 14)(9, 15)(10, 12)(17, 24)(19, 22)(21, 23), \\ g_6 &:= (2, 4, 13, 5)(3, 8)(7, 10, 14, 12)(9, 24, 15, 17)(16, 18)(19, 23, 22, 21), \end{aligned}$$

$g_7 := \text{id}$  y  $g_8 := g_6^{-1}$ . Se puede ver que estos elementos satisfacen  $\sigma_k g_7 = g_7 \sigma_k$ ,  $1 \leq k \leq 8$ ,  $\sigma_7 g_k = g_k \sigma_k$ ,  $1 \leq k \leq 5$ ,  $\sigma_7 g_6 = g_6 \sigma_8$  y  $\sigma_7 g_8 = g_8 \sigma_6$ . Es claro que si  $\rho = \epsilon \otimes \nu_4$  ó  $\rho = \text{sgn} \otimes \nu_4$ , entonces  $\rho(\gamma_{k,7} \gamma_{7,k}) = 1$ , para todo  $1 \leq k \leq 8$ . Por Lema 2.2.3, la trenza es negativa.

*CASO:*  $j = 10$ . El representante es

$$s_{10} := (1, 20)(3, 4, 16)(5, 14, 21, 19, 23, 15)(7, 11, 12, 24, 18, 13)(8, 22, 10)(9, 17),$$

tiene orden 6 y es real. Su centralizador  $M_{24}^{s_{10}}$  es un grupo no abeliano de orden 24.

Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{M_{24}^{s_{10}}}$ . Se probará que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{10}}, \rho)$  es de dimensión infinita. Si  $q_{s_{10}s_{10}} \neq -1$ , entonces el resultado sigue por Lema 2.3.4. Supongamos que  $q_{s_{10}s_{10}} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_{10}} \cap M_{24}^{s_{10}}$  tiene 10 elementos y contiene a  $\sigma_1 := s_{10}$ ,  $\sigma_2 := s_{10}^{-1}$ ,

$$\sigma_3 := (1, 20)(2, 6)(3, 8, 16, 10, 4, 22)(5, 14, 21, 19, 23, 15)(7, 18, 12)(11, 13, 24)$$

y  $\sigma_4 := \sigma_3^{-1}$ . Dichos elementos conmutan entre sí. Elegimos  $g_1 := \text{id}$ ,

$$\begin{aligned} g_2 &:= (2, 6)(3, 10)(4, 22)(8, 16)(11, 13)(12, 18)(14, 15)(21, 23), \\ g_3 &:= (1, 6, 17)(2, 9, 20)(3, 7, 5)(4, 18, 23)(8, 11, 14)(10, 24, 19)(12, 21, 16)(13, 15, 22) \end{aligned}$$

y  $g_4 := g_3 g_2$ . Estos elementos están en  $M_{24}$  y satisfacen  $\sigma_r g_r = g_r \sigma_1$ ,  $\sigma_r g_1 = g_1 \sigma_r$ ,  $1 \leq r \leq 4$ , y

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_2, & \sigma_1 g_3 = g_3 \gamma, & \sigma_1 g_4 = g_4 \gamma^{-1}, \\ \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_4, & \sigma_2 g_3 = g_3 \gamma^{-1}, & \sigma_2 g_4 = g_4 \gamma, \\ \sigma_4 g_2 = g_2 \sigma_3, & \sigma_4 g_3 = g_3 \sigma_2, & \sigma_3 g_4 = g_4 \sigma_2, \end{array}$$

donde  $\gamma := (2, 6)(3, 8, 16, 10, 4, 22)(5, 23, 21)(7, 11, 12, 24, 18, 13)(9, 17)(14, 15, 19)$ . Se puede ver que  $\sigma_3 \gamma = s_{10}^{-1}$ . Definimos  $W := \mathbb{C}$ -span  $\{g_1 v, g_2 v, g_3 v, g_4 v\}$ , donde  $v \in V - 0$ . Luego, es fácil ver que  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_{10}}, \rho)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan asociada está dada por (5.11). Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{10}}, \rho) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 11$ . Se computa que  $M_{24}^{s_{11}} \simeq M_{24}^{s_{10}}$ . Esto implica que este caso es análogo al caso anterior, pues  $\mathcal{O}_{s_{11}} \simeq \mathcal{O}_{s_{10}}$  como racks.

*CASO:*  $j = 8$ . El representante es

$$s_8 := (1, 22, 11, 16)(2, 8, 14, 17)(3, 23, 24, 6)(4, 21, 12, 13)(5, 15, 19, 9)(7, 18, 20, 10),$$

tiene orden 4 y es real. Su centralizador  $M_{24}^{s_8}$  es un grupo no abeliano de orden 96 cuya tabla de caracteres está dada por la Tabla 5.14.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$ y_k $	1	2	2	4	4	12	4	4	12	4	3	4	6	4	2	2	2	4	4	4
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
$\mu_3$	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
$\mu_4$	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1
$\mu_5$	1	-1	1	-i	i	i	-i	-i	-i	i	1	-1	-1	1	1	-1	-1	i	-i	i
$\mu_6$	1	1	1	-i	-i	i	i	i	-i	-i	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	i	-i	i
$\mu_7$	1	-1	1	i	-i	-i	i	i	i	-i	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-i	i	-i
$\mu_8$	1	1	1	i	i	-i	-i	-i	i	i	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-i	i	-i
$\mu_9$	2	0	2	2	0	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	2	2	2	2	2
$\mu_{10}$	2	0	2	-2	0	1	0	0	1	0	-1	0	-1	0	0	2	2	-2	-2	-2
$\mu_{11}$	2	0	2	-2i	0	-i	0	0	i	0	-1	0	1	0	0	-2	-2	2i	-2i	2i
$\mu_{12}$	2	0	2	2i	0	i	0	0	-i	0	-1	0	1	0	0	-2	-2	-2i	2i	-2i
$\mu_{13}$	3	-1	-1	1	-1	0	1	-1	0	1	0	1	0	1	-1	-1	3	1	-3	-3
$\mu_{14}$	3	1	-1	1	1	0	-1	1	0	-1	0	-1	0	-1	1	-1	3	1	-3	-3
$\mu_{15}$	3	-1	-1	-1	1	0	-1	1	0	-1	0	1	0	1	-1	-1	3	-1	3	3
$\mu_{16}$	3	1	-1	-1	-1	0	1	-1	0	1	0	-1	0	-1	1	-1	3	-1	3	3
$\mu_{17}$	3	-1	-1	i	-i	0	-i	i	0	i	0	1	0	-1	1	1	-3	-i	-3i	3i
$\mu_{18}$	3	1	-1	i	i	0	i	-i	0	-i	0	-1	0	1	-1	1	-3	-i	-3i	3i
$\mu_{19}$	3	-1	-1	-i	i	0	i	-i	0	-i	0	1	0	-1	1	1	-3	i	3i	-3i
$\mu_{20}$	3	1	-1	-i	-i	0	-i	i	0	i	0	-1	0	1	-1	1	-3	i	3i	-3i

Tabla 5.14: Tabla de caracteres de  $M_{24}^{ss}$ .

Para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 20$ , llamamos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{24}^{ss}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . Se computa que  $s_8 \in \mathcal{O}_{y_{20}}^{M_{24}^{ss}}$ .

De la Tabla 5.14, tenemos que si  $k \neq 2, 3, 10, 13, 14$ , entonces  $q_{s_8 s_8} \neq -1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_8}, \rho_k) = \infty$ , por Lema 2.3.4. Por otro lado, se computa que  $\mathcal{O}_{s_8} \cap M_{24}^{ss}$  tiene 32 elementos y contiene a

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= (1, 2, 11, 14)(3, 18, 9, 13)(4, 23, 20, 5)(6, 7, 19, 12)(8, 16, 17, 22)(10, 15, 21, 24), \\ \sigma_2 &:= (1, 2, 11, 14)(3, 21, 9, 10)(4, 19, 20, 6)(5, 7, 23, 12)(8, 16, 17, 22)(13, 15, 18, 24), \\ \sigma_5 &:= (1, 16, 11, 22)(2, 17, 14, 8)(3, 5, 24, 19)(4, 10, 12, 18)(6, 9, 23, 15)(7, 13, 20, 21), \end{aligned}$$

$\sigma_3 := \sigma_2^{-1}$ ,  $\sigma_4 := \sigma_1^{-1}$ ,  $\sigma_7 := \sigma_5^{-1}$ ,  $\sigma_6 := s_8^{-1}$  y  $\sigma_8 := s_8$ . We choose in  $M_{24}$

$$\begin{aligned} g_1 &:= (2, 16, 14, 22)(3, 9, 15, 24)(4, 7)(5, 21, 19, 10)(6, 18, 23, 13)(8, 17), \\ g_2 &:= (2, 16, 14, 22)(4, 12, 7, 20)(5, 13, 23, 21)(6, 10, 19, 18)(8, 17)(9, 24), \\ g_3 &:= (2, 22, 14, 16)(3, 9, 15, 24)(5, 13, 19, 18)(6, 10, 23, 21)(8, 17)(12, 20), \\ g_6 &:= (2, 14)(3, 4, 15, 7)(5, 18, 6, 21)(9, 20, 24, 12)(10, 23, 13, 19)(16, 22), \\ g_7 &:= (3, 4)(5, 13)(6, 10)(7, 15)(9, 20)(12, 24)(18, 23)(19, 21), \end{aligned}$$

$g_4 := g_2^{-1}$ ,  $g_5 := g_2^2$  y  $g_8 := \text{id}$ . Se puede ver que estos elementos satisfacen  $\sigma_k g_l = g_l \gamma_{k,l}$ , donde  $\gamma_{k,k} = s_8$ ,  $\gamma_{k,8} = \sigma_k$ ,  $1 \leq k \leq 8$ ,  $\gamma_{8,1} = \sigma_3$ ,  $\gamma_{8,2} = \sigma_4$ ,  $\gamma_{8,3} = \sigma_1$ ,  $\gamma_{8,4} = \sigma_2$ ,  $\gamma_{8,5} = \sigma_5$ ,  $\gamma_{8,6} = \sigma_6$ ,

$\gamma_{8,7} = \sigma_7$ , y

$$\begin{array}{llllll}
\gamma_{1,2} = \sigma_7, & \gamma_{1,3} = \sigma_5, & \gamma_{1,4} = \sigma_6, & \gamma_{1,5} = \sigma_3, & \gamma_{1,6} = \sigma_3, & \gamma_{1,7} = \sigma_1, \\
\gamma_{2,1} = \sigma_7, & \gamma_{2,3} = \sigma_6, & \gamma_{2,4} = \sigma_5, & \gamma_{2,5} = \sigma_4, & \gamma_{2,6} = \sigma_4, & \gamma_{2,7} = \sigma_2, \\
\gamma_{3,1} = \sigma_5, & \gamma_{3,2} = \sigma_6, & \gamma_{3,4} = \sigma_7, & \gamma_{3,5} = \sigma_1, & \gamma_{3,6} = \sigma_1, & \gamma_{3,7} = \sigma_3, \\
\gamma_{4,1} = \sigma_6, & \gamma_{4,2} = \sigma_5, & \gamma_{4,3} = \sigma_7, & \gamma_{4,5} = \sigma_2, & \gamma_{4,6} = \sigma_2, & \gamma_{4,7} = \sigma_4, \\
\gamma_{5,1} = \sigma_1, & \gamma_{5,2} = \sigma_2, & \gamma_{5,3} = \sigma_3, & \gamma_{5,4} = \sigma_4, & \gamma_{5,6} = \sigma_7, & \gamma_{5,7} = \sigma_6, \\
\gamma_{6,1} = \sigma_2, & \gamma_{6,2} = \sigma_1, & \gamma_{6,3} = \sigma_4, & \gamma_{6,4} = \sigma_3, & \gamma_{6,5} = \sigma_7, & \gamma_{6,7} = \sigma_5, \\
\gamma_{7,1} = \sigma_4, & \gamma_{7,2} = \sigma_3, & \gamma_{7,3} = \sigma_2, & \gamma_{7,4} = \sigma_1, & \gamma_{7,5} = \sigma_6, & \gamma_{7,6} = \sigma_5.
\end{array}$$

Supongamos que  $k = 10, 13$  ó  $14$ ; luego,  $q_{s_8 s_8} = -1$ . Considerando *caso por caso* verificamos que siempre se puede construir un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_8}, \rho_k)$  de tipo diagonal cuyo diagrama de Dynkin generalizado contiene un  $r$ -ciclo con  $r > 3$ . Por Lema 2.3.7,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_8}, \rho_k) = \infty$ .

Finalmente, asumamos que  $k = 2$  ó  $3$ . Luego,  $q_{s_8 s_8} = -1$  y se computa que  $\rho(\gamma_{1,t}\gamma_{t,1}) = 1$ , para todo  $1 \leq t \leq 32$ . Por Lema 2.2.3, la trenza es negativa.

*CASO:*  $j = 7$ . El representante es

$$s_7 := (1, 18, 11, 16)(3, 6, 8, 20)(7, 22, 14, 19)(9, 15)(10, 23, 12, 21)(17, 24),$$

tiene orden 4 y es real. Su centralizador  $M_{24}^{s_7}$  es un grupo no abeliano de orden 128.

Sea  $\rho = (\rho, V) \in \widehat{M}_{24}^{s_7}$ . Se probará que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_7}, \rho)$  es de dimensión infinita. Si  $q_{s_7 s_7} \neq -1$ , entonces el resultado sigue por Lema 2.3.4. Supongamos que  $q_{s_7 s_7} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_7} \cap M_{24}^{s_7}$  tiene 40 elementos y contiene a

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &:= (2, 4, 13, 5)(3, 8)(6, 20)(7, 19, 14, 22)(9, 17, 15, 24)(10, 23, 12, 21), \\
\sigma_3 &:= (1, 16, 11, 18)(2, 5, 13, 4)(3, 6, 8, 20)(9, 17, 15, 24)(10, 12)(21, 23),
\end{aligned}$$

$\sigma_2 := \sigma_1^{-1}$  y  $\sigma_4 := \sigma_3^{-1}$ . Dichos elementos conmutan entre sí y  $\sigma_1 \sigma_3 = s_7^{-1}$ . Elegimos

$$\begin{aligned}
g_1 &:= (1, 2, 18, 4, 11, 13, 16, 5)(3, 9, 20, 24, 8, 15, 6, 17)(10, 21, 12, 23)(19, 22), \\
g_2 &:= (1, 2, 11, 13)(3, 9, 8, 15)(4, 18, 5, 16)(6, 24, 20, 17)(10, 23)(12, 21), \\
g_3 &:= (2, 19, 4, 14, 13, 22, 5, 7)(3, 6, 8, 20)(9, 23, 17, 12, 15, 21, 24, 10)(16, 18), \\
g_4 &:= (2, 14, 13, 7)(3, 6)(4, 19, 5, 22)(8, 20)(9, 10, 15, 12)(17, 21, 24, 23).
\end{aligned}$$

Estos elementos están en  $M_{24}$  y satisfacen

$$\begin{array}{llll}
\sigma_1 g_1 = g_1 s_7, & \sigma_1 g_2 = g_2 s_7^{-1}, & \sigma_1 g_3 = g_3 \sigma_1, & \sigma_1 g_4 = g_4 \sigma_2, \\
\sigma_2 g_1 = g_1 s_7^{-1}, & \sigma_2 g_2 = g_2 s_7, & \sigma_2 g_3 = g_3 \sigma_2, & \sigma_2 g_4 = g_4 \sigma_1, \\
\sigma_3 g_1 = g_1 \sigma_3, & \sigma_3 g_2 = g_2 \sigma_4, & \sigma_3 g_3 = g_3 s_7, & \sigma_3 g_4 = g_4 s_7^{-1}, \\
\sigma_4 g_1 = g_1 \sigma_4, & \sigma_4 g_2 = g_2 \sigma_3, & \sigma_4 g_3 = g_3 s_7^{-1}, & \sigma_4 g_4 = g_4 s_7.
\end{array}$$

Si definimos  $W := \mathbb{C} \cdot \text{span} \{g_1 v, g_2 v, g_3 v, g_4 v\}$ , con  $v \in V - 0$ , entonces  $W$  resulta un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_7}, \rho)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan asociada está dada por (5.11). Por Teorema 2.3.2,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_7}, \rho) = \infty$ .

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$ y_k $	1	3	2	2	4	2	2	6	4	4	4	2	4
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
$\mu_3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
$\mu_4$	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$\mu_5$	2	-1	2	0	0	2	2	-1	2	0	0	0	0
$\mu_6$	2	-1	2	0	0	2	2	-1	2	0	0	0	0
$\mu_7$	3	0	-1	-1	1	3	-1	0	-1	-1	1	-1	-1
$\mu_8$	3	0	-1	1	-1	3	-1	0	-1	1	-1	1	1
$\mu_9$	3	0	-1	-1	1	3	-1	0	-1	-1	1	-1	1
$\mu_{10}$	3	0	-1	1	-1	3	-1	0	-1	1	-1	1	-1
$\mu_{11}$	3	0	3	1	1	-1	-1	0	-1	-1	-1	1	1
$\mu_{12}$	3	0	-1	1	-1	-1	3	0	-1	-1	1	1	1
$\mu_{13}$	3	0	-1	-1	1	-1	3	0	-1	1	-1	-1	1
$\mu_{14}$	3	0	-1	1	-1	-1	3	0	-1	-1	1	1	-1
$\mu_{15}$	3	0	3	-1	-1	-1	-1	0	-1	1	1	-1	1
$\mu_{16}$	3	0	3	1	1	-1	-1	0	-1	-1	-1	1	-1
$\mu_{17}$	3	0	-1	-1	1	-1	3	0	-1	1	-1	-1	-1
$\mu_{18}$	3	0	3	-1	-1	-1	-1	0	-1	1	1	-1	-1
$\mu_{19}$	4	1	0	2	0	0	0	-1	0	0	0	-2	2i
$\mu_{20}$	4	1	0	-2	0	0	0	-1	0	0	0	2	-2i
$\mu_{21}$	4	1	0	-2	0	0	0	-1	0	0	0	2	2i
$\mu_{22}$	4	1	0	2	0	0	0	-1	0	0	0	-2	-2i
$\mu_{23}$	6	0	-2	0	0	-2	-2	0	2	0	0	0	0
$\mu_{24}$	6	0	-2	0	0	-2	-2	0	2	0	0	0	0
$\mu_{25}$	8	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$\mu_{26}$	8	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Tabla 5.15: Tabla de caracteres de  $M_{24}^{s_6}$  (i).

CASO:  $j = 6$ . El representante es

$$s_6 := (1, 9, 20, 17)(2, 6)(3, 10)(4, 8)(5, 24, 19, 7)(11, 14, 18, 23)(12, 21, 13, 15)(16, 22),$$

tiene orden 4 y es real. Su centralizador  $M_{24}^{s_6}$  es un grupo no abeliano de orden 384 cuya tabla de caracteres está dada por las Tablas 5.15 y 5.16.

Para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 26$ , llamamos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{24}^{s_6}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . Se computa que  $s_6 \in \mathcal{O}_{y_{23}}^{M_{24}^{s_6}}$ . De las Tablas 5.15 y 5.16, tenemos que si  $k \neq 2, 3, 5, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 24$ , entonces  $q_{s_6 s_6} \neq -1$  y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho_k) = \infty$ , por Lema 2.3.4.

Por otro lado, se computa que  $\mathcal{O}_{s_6} \cap M_{24}^{s_6}$  tiene 80 elementos y contiene a

$$\sigma_1 := (1, 7)(2, 4, 3, 16)(5, 9)(6, 8, 10, 22)(11, 14, 18, 23)(12, 15, 13, 21)(17, 19)(20, 24),$$

$$\sigma_4 := (1, 9, 20, 17)(2, 10)(3, 6)(4, 22)(5, 24, 19, 7)(8, 16)(11, 23, 18, 14)(12, 15, 13, 21),$$

$$\sigma_7 := (1, 24)(2, 4, 3, 16)(5, 17)(6, 8, 10, 22)(7, 20)(9, 19)(11, 23, 18, 14)(12, 21, 13, 15),$$

$k$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$ y_k $	4	4	4	4	12	4	12	2	4	4	4	4	2
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
$\mu_3$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
$\mu_4$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_5$	0	0	0	0	1	-2	1	-2	-2	-2	-2	-2	2
$\mu_6$	0	0	0	0	-1	2	-1	2	2	2	2	2	2
$\mu_7$	-1	-1	1	1	0	3	0	-1	-1	3	-1	3	3
$\mu_8$	1	1	-1	-1	0	3	0	-1	-1	3	-1	3	3
$\mu_9$	1	1	-1	-1	0	-3	0	1	1	-3	1	-3	3
$\mu_{10}$	-1	-1	1	1	0	-3	0	1	1	-3	1	-3	3
$\mu_{11}$	-1	1	-1	1	0	-1	0	-1	-1	3	3	3	3
$\mu_{12}$	-1	1	1	-1	0	-1	0	-1	3	3	-1	3	3
$\mu_{13}$	-1	1	1	-1	0	1	0	1	-3	-3	1	-3	3
$\mu_{14}$	1	-1	-1	1	0	1	0	1	-3	-3	1	-3	3
$\mu_{15}$	-1	1	-1	1	0	1	0	1	1	-3	-3	-3	3
$\mu_{16}$	1	-1	1	-1	0	1	0	1	1	-3	-3	-3	3
$\mu_{17}$	1	-1	-1	1	0	-1	0	-1	3	3	-1	3	3
$\mu_{18}$	1	-1	1	-1	0	-1	0	-1	-1	3	3	3	3
$\mu_{19}$	0	-2i	0	0	i	0	-i	0	0	-4i	0	4i	-4
$\mu_{20}$	0	2i	0	0	i	0	-i	0	0	-4i	0	4i	-4
$\mu_{21}$	0	-2i	0	0	-i	0	i	0	0	4i	0	-4i	-4
$\mu_{22}$	0	2i	0	0	-i	0	i	0	0	4i	0	-4i	-4
$\mu_{23}$	0	0	0	0	0	-2	0	2	-2	6	-2	6	6
$\mu_{24}$	0	0	0	0	0	2	0	-2	2	-6	2	-6	6
$\mu_{25}$	0	0	0	0	-i	0	i	0	0	-8i	0	8i	-8
$\mu_{26}$	0	0	0	0	i	0	-i	0	0	8i	0	-8i	-8

Tabla 5.16: Tabla de caracteres de  $M_{24}^{s_6}$  (ii).

$\sigma_2 := \sigma_1^{-1}$ ,  $\sigma_3 := s_6$ ,  $\sigma_5 := s_6^{-1}$ ,  $\sigma_6 := \sigma_4^{-1}$  y  $\sigma_8 := \sigma_7^{-1}$ . Además, se computa que  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_7, \sigma_8 \in \mathcal{O}_{y_{17}}^{M_{24}^{s_6}}$ ,  $\sigma_4, \sigma_6 \in \mathcal{O}_{y_{24}}^{M_{24}^{s_6}}$  y  $s_6^{-1} \in \mathcal{O}_{y_{25}}^{M_{24}^{s_6}}$ . Elegimos en  $M_{24}$

$$g_1 := (1, 2, 17, 16)(3, 9, 4, 20)(5, 8, 24, 10)(6, 19, 22, 7)(11, 12, 23, 21)(13, 14, 15, 18),$$

$$g_4 := (2, 4)(3, 16)(6, 22)(8, 10)(11, 14)(12, 21)(13, 15)(18, 23),$$

$$g_5 := (2, 10)(3, 6)(4, 22)(7, 24)(8, 16)(9, 17)(14, 23)(15, 21),$$

$$g_7 := (1, 2, 24, 10, 20, 3, 7, 6)(4, 5, 8, 17, 16, 19, 22, 9)(12, 15, 13, 21)(14, 23),$$

$g_3 := \text{id}$ ,  $g_2 := g_1 g_5$ ,  $g_6 := g_4 g_5$  y  $g_8 := g_7 g_5$ . Se puede ver que estos elementos satisfacen  $\sigma_k g_l = g_l \gamma_{k,l}$ , donde  $\gamma_{k,k} = s_6$ ,  $\gamma_{k,3} = \sigma_k$ ,  $1 \leq k \leq 8$ ,  $\gamma_{3,1} = \sigma_2$ ,  $\gamma_{3,2} = \sigma_8$ ,  $\gamma_{3,4} = \sigma_4$ ,  $\gamma_{3,5} = \sigma_5$ ,  $\gamma_{3,6} = \sigma_6$ ,

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$ y_k $	1	2	3	4	7	7	6	2	2	4	4	2	4	4	6
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	3	-1	0	1	A	A'	0	-1	3	1	-1	3	-1	-1	0
$\mu_3$	3	-1	0	1	A'	A	0	-1	3	1	-1	3	-1	-1	0
$\mu_4$	6	2	0	0	-1	-1	0	2	6	0	2	6	2	2	0
$\mu_5$	7	-1	1	-1	0	0	-1	3	-1	1	-1	7	-1	-1	1
$\mu_6$	7	3	1	1	0	0	1	3	7	1	3	-1	-1	-1	1
$\mu_7$	7	-1	1	-1	0	0	1	-1	7	-1	-1	7	-1	-1	1
$\mu_8$	7	3	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	7	3	3	1
$\mu_9$	7	-1	1	-1	0	0	1	-1	7	-1	-1	-1	-1	3	1
$\mu_{10}$	8	0	-1	0	1	1	-1	0	8	0	0	8	0	0	-1
$\mu_{11}$	8	0	2	0	1	1	0	4	0	2	0	0	0	0	-2
$\mu_{12}$	14	2	-1	0	0	0	1	2	-2	0	-2	14	2	2	-1
$\mu_{13}$	14	2	-1	0	0	0	-1	2	14	0	2	-2	-2	2	-1
$\mu_{14}$	21	1	0	-1	0	0	0	5	-3	1	-3	-3	1	-3	0
$\mu_{15}$	21	-3	0	1	0	0	0	1	-3	-1	1	21	-3	-3	0
$\mu_{16}$	21	1	0	-1	0	0	0	1	21	-1	1	-3	1	-3	0
$\mu_{17}$	21	1	0	-1	0	0	0	-3	-3	1	1	-3	-3	5	0
$\mu_{18}$	21	-3	0	1	0	0	0	1	-3	-1	1	-3	1	1	0
$\mu_{19}$	21	5	0	1	0	0	0	1	-3	-1	-3	-3	-3	1	0
$\mu_{20}$	21	1	0	-1	0	0	0	-3	-3	1	1	21	1	1	0
$\mu_{21}$	21	-3	0	1	0	0	0	-3	21	1	-3	-3	1	1	0
$\mu_{22}$	24	0	0	0	A'	A	0	-4	0	2	0	0	0	0	0
$\mu_{23}$	24	0	0	0	A	A'	0	-4	0	2	0	0	0	0	0
$\mu_{24}$	28	-4	1	0	0	0	-1	4	-4	0	0	-4	0	4	1
$\mu_{25}$	28	4	1	0	0	0	-1	-4	-4	0	0	-4	0	-4	1
$\mu_{26}$	42	-2	0	0	0	0	0	-2	-6	0	2	-6	2	-2	0
$\mu_{27}$	48	0	0	0	-1	-1	0	8	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{28}$	56	0	-1	0	0	0	1	0	-8	0	0	-8	0	0	-1
$\mu_{29}$	56	0	2	0	0	0	0	-4	0	-2	0	0	0	0	-2
$\mu_{30}$	64	0	-2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2

Tabla 5.17: Tabla de caracteres de  $M_{24}^{s_2}$  (i).

$\gamma_{3,7} = \sigma_2$ ,  $\gamma_{3,8} = \sigma_8$ , y

$$\begin{array}{llllll}
 \gamma_{1,2} = \sigma_5, & \gamma_{1,4} = \sigma_2, & \gamma_{1,5} = \sigma_7, & \gamma_{1,6} = \sigma_8, & \gamma_{1,7} = \sigma_4, & \gamma_{1,8} = \sigma_6, \\
 \gamma_{2,1} = \sigma_5, & \gamma_{2,4} = \sigma_1, & \gamma_{2,5} = \sigma_8, & \gamma_{2,6} = \sigma_7, & \gamma_{2,7} = \sigma_6, & \gamma_{2,8} = \sigma_4, \\
 \gamma_{4,1} = \sigma_8, & \gamma_{4,2} = \sigma_2, & \gamma_{4,5} = \sigma_6, & \gamma_{4,6} = \sigma_5, & \gamma_{4,7} = \sigma_8, & \gamma_{4,8} = \sigma_2, \\
 \gamma_{5,1} = \sigma_1, & \gamma_{5,2} = \sigma_7, & \gamma_{5,4} = \sigma_6, & \gamma_{5,6} = \sigma_4, & \gamma_{5,7} = \sigma_1, & \gamma_{5,8} = \sigma_7, \\
 \gamma_{6,1} = \sigma_7, & \gamma_{6,2} = \sigma_1, & \gamma_{6,4} = \sigma_5, & \gamma_{6,5} = \sigma_4, & \gamma_{6,7} = \sigma_7, & \gamma_{6,8} = \sigma_1, \\
 \gamma_{7,1} = \sigma_4, & \gamma_{7,2} = \sigma_6, & \gamma_{7,4} = \sigma_8, & \gamma_{7,5} = \sigma_1, & \gamma_{7,6} = \sigma_2, & \gamma_{7,5} = \sigma_5, \\
 \gamma_{8,1} = \sigma_6, & \gamma_{8,2} = \sigma_4, & \gamma_{8,4} = \sigma_7, & \gamma_{8,5} = \sigma_2, & \gamma_{8,6} = \sigma_1, & \gamma_{8,7} = \sigma_5.
 \end{array}$$

Supongamos que  $k = 5, 9, 10, 13, 14, 15, 16$  ó  $24$ ; luego,  $q_{s_6 s_6} = -1$ . Considerando *caso por caso* verificamos que siempre es posible construir un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_6}, \rho_k)$  de tipo diagonal cuyo diagrama de Dynkin generalizado contiene un  $r$ -ciclo con  $r > 3$ . Por Lema 2.3.7,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho_k) = \infty$ .

Finalmente, asumamos que  $k = 2$  ó  $3$ . Luego,  $q_{s_6 s_6} = -1$  y se computa que  $\rho(\gamma_{1,t} \gamma_{t,1}) = 1$ , para

$k$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$ y_k $	8	14	6	14	4	2	2	4	12	4	4	4	2	4	2
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	A	0	A'	-1	3	-1	1	0	1	-1	-1	-1	3	3
$\mu_3$	1	A'	0	A	-1	3	-1	1	0	1	-1	-1	-1	3	3
$\mu_4$	0	-1	0	-1	2	6	2	0	0	0	2	2	2	6	6
$\mu_5$	-1	0	1	0	3	-1	3	1	-1	1	-1	-1	3	-1	7
$\mu_6$	-1	0	-1	0	-1	-1	3	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	7
$\mu_7$	-1	0	1	0	-1	7	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	7	7
$\mu_8$	1	0	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7
$\mu_9$	1	0	-1	0	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	3	3	-1	7
$\mu_{10}$	0	1	-1	1	0	8	0	0	-1	0	0	0	0	8	8
$\mu_{11}$	0	-1	0	-1	0	0	-4	0	0	-2	0	0	0	0	-8
$\mu_{12}$	0	0	-1	0	2	-2	2	0	1	0	-2	-2	2	-2	14
$\mu_{13}$	0	0	1	0	-2	-2	2	0	1	0	-2	2	2	-2	14
$\mu_{14}$	1	0	0	0	-3	5	5	-1	0	1	1	1	1	-3	21
$\mu_{15}$	1	0	0	0	1	-3	1	-1	0	-1	1	1	1	-3	21
$\mu_{16}$	1	0	0	0	1	-3	1	1	0	-1	1	-3	-3	-3	21
$\mu_{17}$	1	0	0	0	1	5	-3	-1	0	1	1	-3	1	-3	21
$\mu_{18}$	-1	0	0	0	-3	5	1	1	0	-1	1	-3	5	-3	21
$\mu_{19}$	-1	0	0	0	1	5	1	1	0	-1	1	1	-3	-3	21
$\mu_{20}$	-1	0	0	0	-3	-3	-3	1	0	1	1	1	-3	-3	21
$\mu_{21}$	-1	0	0	0	1	-3	-3	-1	0	1	1	1	1	-3	21
$\mu_{22}$	0	-A'	0	-A	0	0	4	0	0	-2	0	0	0	0	-24
$\mu_{23}$	0	-A	0	-A'	0	0	4	0	0	-2	0	0	0	0	-24
$\mu_{24}$	0	0	-1	0	0	-4	4	0	1	0	0	0	-4	4	28
$\mu_{25}$	0	0	-1	0	0	-4	-4	0	1	0	0	0	4	4	28
$\mu_{26}$	0	0	0	0	2	10	-2	0	0	0	-2	2	-2	-6	42
$\mu_{27}$	0	1	0	1	0	0	-8	0	0	0	0	0	0	0	-48
$\mu_{28}$	0	0	1	0	0	-8	0	0	-1	0	0	0	0	8	56
$\mu_{29}$	0	0	0	0	0	0	4	0	0	2	0	0	0	0	-56
$\mu_{30}$	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-64

Tabla 5.18: Tabla de caracteres de  $M_{24}^{s_2}$  (ii).

todo  $1 \leq t \leq 80$ . Por Lema 2.2.3, la trenza es negativa.

CASO:  $j = 2$ . El representante es

$$s_2 := (1, 20)(5, 19)(7, 24)(9, 17)(11, 18)(12, 13)(14, 23)(15, 21)$$

y su centralizador  $M_{24}^{s_2}$  es un grupo no abeliano de orden 21504 cuya tabla de caracteres está dada por las Tablas 5.17 y 5.18, donde  $A = (-1 + i\sqrt{7})/2$ .

Para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 30$ , llamamos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{24}^{s_2}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . Se probará que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k)$  es de dimensión infinita, para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 30$ . Se computa que  $s_2 \in \mathcal{O}_{y_{30}}^{M_{24}^{s_2}}$ . Ahora bien, si  $k \neq 11, 22, 23, 27, 29, 30$ , entonces el resultado sigue por Lema 2.3.4, pues  $q_{s_2 s_2} \neq -1$ . Supongamos que  $k = 11, 22, 23, 27, 29$  ó  $30$ ; luego,  $q_{s_2 s_2} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_2} \cap M_{24}^{s_2}$  tiene 281 elementos y contiene a  $\sigma_1 := s_2$  y

$$\sigma_2 := (2, 16)(3, 4)(5, 19)(6, 22)(7, 24)(8, 10)(11, 18)(14, 23),$$



$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$ y_k $	1	5	10	10	10	3	6	12	6	6	2	4	8	8	4
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
$\mu_3$	4	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	4	0	0	0	0
$\mu_4$	4	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	4	0	0	0	0
$\mu_5$	5	0	0	0	0	-1	-1	1	1	-1	5	1	-1	-1	1
$\mu_6$	5	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	5	1	1	1	1
$\mu_7$	6	1	1	1	1	0	0	0	0	0	6	-2	0	0	-2
$\mu_8$	6	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	-2	2	0	0	-2
$\mu_9$	6	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	-2	2	0	0	-2
$\mu_{10}$	6	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	-2	-2	2i	-2i	2
$\mu_{11}$	6	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	-2	-2	-2i	2i	2
$\mu_{12}$	10	0	0	0	0	1	1	-1	1	-1	2	2	0	0	-2
$\mu_{13}$	10	0	0	0	0	1	1	1	-1	-1	2	2	0	0	-2
$\mu_{14}$	10	0	0	0	0	1	1	-1	1	-1	2	-2	0	0	2
$\mu_{15}$	10	0	0	0	0	1	1	1	-1	-1	2	-2	0	0	2
$\mu_{16}$	12	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
$\mu_{17}$	12	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
$\mu_{18}$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
$\mu_{19}$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	3	1	1	3
$\mu_{20}$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	3	-1	-1	3
$\mu_{21}$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	1	-1
$\mu_{22}$	20	0	0	0	0	-1	-1	-1	1	1	4	0	0	0	0
$\mu_{23}$	20	0	0	0	0	-1	-1	1	-1	1	4	0	0	0	0
$\mu_{24}$	20	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	-4	0	0	0	0
$\mu_{25}$	20	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	-4	0	0	0	0
$\mu_{26}$	24	-1	-1	1	1	0	0	0	0	0	-8	0	0	0	0
$\mu_{27}$	24	-1	1	A	-A	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0
$\mu_{28}$	24	-1	1	-A	A	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0
$\mu_{29}$	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	0	0	-2
$\mu_{30}$	40	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	-8	0	0	0	0

Tabla 5.19: Tabla de caracteres de  $M_{24}^{s_3}$  (i).

con  $\sigma_2 \in \mathcal{O}_{y_9}^{M_{24}^{s_2}}$ . Elegimos  $g_1 := \text{id}$  y

$$g_2 := (1, 2)(3, 13, 22, 17, 10, 15)(4, 12, 6, 9, 8, 21)(5, 11, 7)(16, 20)(18, 24, 19).$$

Estos elementos están en  $M_{24}$  y satisfacen  $\sigma_1 g_1 = g_1 \sigma_1$ ,  $\sigma_2 g_1 = g_1 \sigma_2$ ,  $\sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_1$  y  $\sigma_2 g_2 = g_2 \sigma_2$ .

De las Tablas 5.17 y 5.18, se puede ver que  $\deg(\rho_k)$  es par y mayor o igual a 8. Ya que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  conmutan existe una base  $\{v_l \mid 1 \leq l \leq \deg(\rho_k)\}$  de  $V_k$ , el espacio vectorial de la representación  $\rho_k$ , compuesta por autovectores simultáneos de  $\rho_k(\sigma_1) = -\text{Id}$  y  $\rho_k(\sigma_2)$ . Digamos que  $\rho_k(\sigma_2)v_l = \lambda_l v_l$ ,  $1 \leq l \leq \deg(\rho_k)$ , donde  $\lambda_l = \pm 1$ , debido a que  $|\sigma_2| = 2$ . De la Tabla 5.17, se tiene que  $\sum_{l=1}^{\deg(\rho_k)} \lambda_l = 0$ . Reordenando la base podemos suponer que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{\deg(\rho_k)/2} = 1 = -\lambda_{1+\deg(\rho_k)/2} = \dots = -\lambda_{\deg(\rho_k)}$ . Si  $W := \mathbb{C} \text{-span} \{g_1 v_l, g_2 v_l \mid 1 \leq l \leq \deg(\rho_k)\}$ , entonces es fácil mostrar que  $W$  es un subespacio vectorial trenzado de  $M(\mathcal{O}_{s_2}, \rho)$  de tipo Cartan cuya matriz de Cartan asociada  $\mathcal{A}$  tiene al menos dos filas con tres  $-1$  o más. Esto implica que el Diagrama de Dynkin correspondiente tiene al menos dos vértices con tres aristas o más; luego,  $\mathcal{A}$  no es de tipo finito. Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \rho_k) = \infty$ .

$k$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$ y_k $	4	2	4	2	4	2	4	4	2	2	4	2	4	2	2
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2$	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1
$\mu_3$	-2	4	-2	4	-2	4	0	0	4	0	0	0	0	0	-2
$\mu_4$	2	4	2	4	2	4	0	0	4	0	0	0	0	0	2
$\mu_5$	1	5	1	5	1	5	1	1	5	1	-1	1	-1	1	1
$\mu_6$	-1	5	-1	5	-1	5	1	1	5	1	1	1	1	1	-1
$\mu_7$	0	6	0	6	0	6	-2	-2	6	-2	0	-2	0	-2	0
$\mu_8$	0	6	0	-2	0	2	0	0	-6	2	2	2	-2	-2	0
$\mu_9$	0	6	0	-2	0	2	0	0	-6	2	-2	2	2	-2	0
$\mu_{10}$	0	6	0	-2	0	2	0	0	-6	-2	0	-2	0	2	0
$\mu_{11}$	0	6	0	-2	0	2	0	0	-6	-2	0	-2	0	2	0
$\mu_{12}$	2	10	2	2	-2	-2	0	0	-10	-2	0	-2	0	2	-2
$\mu_{13}$	-2	10	-2	2	2	-2	0	0	-10	-2	0	-2	0	2	2
$\mu_{14}$	0	10	-4	2	0	-2	0	0	-10	2	0	2	0	-2	4
$\mu_{15}$	0	10	4	2	0	-2	0	0	-10	2	0	2	0	-2	-4
$\mu_{16}$	0	-12	0	-4	0	0	2	-2	0	4	0	-4	0	0	0
$\mu_{17}$	0	-12	0	-4	0	0	-2	2	0	-4	0	4	0	0	0
$\mu_{18}$	-1	15	3	-1	-1	-1	-1	-1	15	3	1	3	1	3	3
$\mu_{19}$	-1	15	3	-1	-1	-1	-1	-1	15	-1	-1	-1	-1	-1	3
$\mu_{20}$	1	15	-3	-1	1	-1	-1	-1	15	-1	1	-1	1	-1	-3
$\mu_{21}$	1	15	-3	-1	1	-1	-1	-1	15	3	-1	3	-1	3	-3
$\mu_{22}$	-2	20	2	4	2	-4	0	0	-20	0	0	0	0	0	-2
$\mu_{23}$	2	20	-2	4	-2	-4	0	0	-20	0	0	0	0	0	2
$\mu_{24}$	0	-20	0	4	0	0	-2	2	0	4	0	-4	0	0	0
$\mu_{25}$	0	-20	0	4	0	0	2	-2	0	-4	0	4	0	0	0
$\mu_{26}$	0	24	0	-8	0	8	0	0	-24	0	0	0	0	0	0
$\mu_{27}$	0	-24	0	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{28}$	0	-24	0	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{29}$	0	30	0	-2	0	-2	2	2	30	-2	0	-2	0	-2	0
$\mu_{30}$	0	-40	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.20: Tabla de caracteres de  $M_{24}^{s_3}$  (ii).

CASO:  $j = 3$ . El representante es

$$s_3 := (1, 11)(2, 23)(3, 7)(4, 13)(5, 6)(8, 18)(9, 16)(10, 15)(12, 24)(14, 17)(19, 21)(20, 22).$$

El centralizador  $M_{24}^{s_3}$  es un grupo no abeliano de orden 7680 cuya tabla de caracteres está dada por las Tablas 5.19 y 5.20, donde  $A = -i\sqrt{5}$ .

Para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 30$ , llamamos  $\rho_k = (\rho_k, V_k)$  a la representación irreducible de  $M_{24}^{s_3}$  cuyo carácter es  $\mu_k$ . Se probará que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_3}, \rho_k)$  es de dimensión infinita, para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq 30$ . Se computa que  $s_3 \in \mathcal{O}_{y_{17}}^{M_{24}^{s_3}}$ . En primer lugar, si  $k \neq 16, 17, 24, 25, 27, 28, 30$ , entonces el resultado sigue por Lema 2.3.4, pues  $q_{s_3 s_3} \neq -1$ . Asumamos que  $k = 16, 17, 24, 25, 27, 28$  ó  $30$ ; luego,  $q_{s_3 s_3} = -1$ . Se computa que  $\mathcal{O}_{s_3} \cap M_{24}^{s_3}$  tiene 278 elementos y contiene a  $\sigma_1 := s_3$  y

$$\sigma_2 := (1, 5)(2, 10)(3, 12)(4, 8)(6, 11)(7, 24)(9, 19)(13, 18)(14, 22)(15, 23)(16, 21)(17, 20),$$

con  $\sigma_2 \in \mathcal{O}_{y_{30}}^{M_{24}^{s_3}}$ . Se eligen  $g_1 := \text{id}$  y

$$g_2 := (5, 11)(7, 12)(8, 13)(9, 20)(10, 23)(14, 21)(16, 17)(19, 22).$$

Estos elementos están en  $M_{24}$  y satisfacen  $\sigma_1 g_1 = g_1 \sigma_1$ ,  $\sigma_2 g_1 = g_1 \sigma_2$ ,  $\sigma_1 g_2 = g_2 \sigma_2$  y  $\sigma_2 g_2 = g_2 \sigma_1$ . Dado que  $\deg(\rho_k)$  es par y mayor o igual a 12, y  $\mu_k(\mathcal{O}_{y_{30}^{M_{24}^{s_3}}}) = 0$ , para  $k = 16, 17, 24, 25, 27, 28$  ó 30, podemos proceder como en el caso anterior. Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_3}, \rho_k) = \infty$ , para todo  $k$ .  $\square$

*Observación 5.1.10.* Se computa que los grupos  $M_{24}^{s_4}$ ,  $M_{24}^{s_5}$ ,  $M_{24}^{s_7}$ ,  $M_{24}^{s_9}$ ,  $M_{24}^{s_{10}}$ ,  $M_{24}^{s_{11}}$ ,  $M_{24}^{s_{12}}$  y  $M_{24}^{s_{13}}$  tienen 17, 18, 26, 20, 15, 15, 21 y 21 clases de conjugación, respectivamente. Luego, existen 502 pares posibles  $(\mathcal{O}, \rho)$  para  $M_{24}$ ; 492 de ellos dan lugar a álgebras de Nichols de dimensión infinita, y 10 tienen  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de trenza negativa.

*Observación 5.1.11.* Considerando las Observaciones 5.1.2, 5.1.4, 5.1.6, 5.1.8 y 5.1.10, podemos decir que para los cinco grupos de Mathieu simples se ha podido determinar, mediante criterios de subracks abelianos, que 1114 pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  de un total de 1137, dan lugar a álgebras de Nichols  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  de dimensión infinita. Los 23 pares restantes tienen  $M(\mathcal{O}, \rho)$  de trenza negativa.

## 5.2. Usando técnicas basadas en subracks no abelianos

En la sección previa, se han descartado pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  con  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$  por medio de técnicas de subracks abelianos de  $\mathcal{O}$ . Como resultado se ha mostrado que sobreviven 23 pares, los cuales dan lugar a espacios vectoriales trenzados  $M(\mathcal{O}, \rho)$  con trenza negativa. En esta sección, se considerarán estos 23 pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  y se mostrará que 16 de ellos dan lugar a álgebras de Nichols de dimensión infinita usando técnicas de subracks no abelianos de  $\mathcal{O}$ .

**El grupo  $M_{11}$ .** En la sección anterior, se ha determinado que cinco pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  son tales que  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es de trenza negativa. Veremos que uno de esos pares satisface  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 10$ . Elegimos en  $\mathcal{O}_{s_{10}}$  los siguientes elementos:  $\sigma_0 := s_{10}$ ,

$$\sigma_1 := (1, 6, 8)(2, 5, 3, 4, 10, 9)(7, 11)$$

y  $\sigma_2 := \sigma_0 \triangleright \sigma_1$ . Es fácil ver que la familia  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/3}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$  en  $\mathcal{O}_{s_{10}}$ . Luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{10}}, \chi_{(-1)}) = \infty$ , por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ .

**El grupo  $M_{12}$ .** En la sección anterior, se ha determinado que cuatro pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  son tales que  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es de trenza negativa. Veremos que tres de esos pares satisfacen  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 14$ . Definimos  $\sigma_1 := s_{14}$ ,  $\sigma_2 := (1, 3, 5, 11, 4, 8, 10, 12)(7, 9)$ ,  $\sigma_3 := \sigma_2 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_4 := \sigma_3 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_5 := \sigma_4 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_6 := s_{14}^3$  y  $\tau_l := \sigma_l^5$ ,  $1 \leq l \leq 6$ . Se puede verificar con GAP que estos elementos pertenecen a  $\mathcal{O}_{s_{14}}$ . Además, se puede ver por cálculos directos que la familia  $(\sigma_l)_{l=1}^6 \cup (\tau_l)_{l=1}^6$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{14}}, \chi_{(-1)}) = \infty$ , por Corolario 2.4.32.

*CASO:*  $j = 5$ . Elegimos en  $\mathcal{O}_{s_5}$  los siguientes elementos:  $\sigma_1 := s_5$ ,

$$\sigma_2 := (1, 4, 12, 7)(2, 6, 3, 8, 11, 10, 9, 5),$$

$\sigma_3 := \sigma_2 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_4 := \sigma_3 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_5 := \sigma_4 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_6 := s_5^3$  y  $\tau_l := \sigma_l^5$ ,  $1 \leq l \leq 6$ . Se puede verificar que la familia  $(\sigma_l)_{l=1}^6 \cup (\tau_l)_{l=1}^6$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_5}, \chi_{(-1)}) = \infty$ , por Corolario 2.4.32.

*CASO:*  $j = 2$ . Elegimos en  $\mathcal{O}_{s_2}$  los siguientes elementos:  $\sigma_0 := s_2$ ,

$$\sigma_1 := (1, 2, 12, 11, 8, 10)(3, 6, 9)(4, 5)$$

y  $\sigma_2 := \sigma_0 \triangleright \sigma_1$ . Es fácil ver que la familia  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/3}$  es de tipo  $\mathcal{D}_3$  en  $\mathcal{O}_{s_2}$ . Luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_2}, \chi_{(-1)}) = \infty$ , por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ .

**El grupo  $M_{22}$ .** En la sección anterior, se ha determinado que  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ , para todo par  $(\mathcal{O}, \rho)$  salvo el par  $(\mathcal{O}_{s_4}, \chi_{(-1)})$ . Veremos que este par también da lugar a un álgebra de Nichols de dimensión infinita. Elegimos en  $\mathcal{O}_{s_4}$  los siguientes elementos:  $\sigma_1 := s_4$ ,

$$\sigma_2 := (1, 5, 13, 10, 11, 7, 12, 22)(2, 9)(3, 21, 19, 15, 17, 18, 6, 8)(4, 14, 20, 16),$$

$\sigma_3 := \sigma_2 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_4 := \sigma_3 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_5 := \sigma_4 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_6 := s_4^{-1}$  y  $\tau_l := \sigma_l^5$ ,  $1 \leq l \leq 6$ . Por cálculos directos podemos verificar que la familia  $(\sigma_l)_{l=1}^6 \cup (\tau_l)_{l=1}^6$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Por Corolario 2.4.32,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_4}, \chi_{(-1)}) = \infty$ .

Teniendo en cuenta el párrafo precedente y el Teorema 5.1.5 podemos enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.1.** *Si  $H$  es un álgebra de Hopf compleja de dimensión finita con  $G(H) \simeq M_{22}$ , entonces  $H$  es el álgebra de grupo  $\mathbb{C}M_{22}$ .  $\square$*

**El grupo  $M_{23}$ .** En la sección anterior, se ha determinado que tres pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  son tales que  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es de trenza negativa. Veremos que uno de estos pares satisface  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ .

*CASO:*  $j = 9$ . Elegimos en  $\mathcal{O}_{s_9}$  los siguientes elementos:  $\sigma_1 := s_9$ ,

$$\sigma_2 := (1, 3, 5, 20, 10, 14, 13, 23)(2, 15, 7, 8)(4, 22, 12, 6, 17, 16, 21, 11)(9, 19),$$

$\sigma_3 := \sigma_2 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_4 := \sigma_3 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_5 := \sigma_4 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_6 := s_9^{-1}$  y  $\tau_l := \sigma_l^5$ ,  $1 \leq l \leq 6$ . Se puede ver que la familia  $(\sigma_l)_{l=1}^6 \cup (\tau_l)_{l=1}^6$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_9}, \chi_{(-1)}) = \infty$ , por Corolario 2.4.32.

**El grupo  $M_{24}$ .** En la sección anterior, se ha determinado que diez pares  $(\mathcal{O}, \rho)$  son tales que  $M(\mathcal{O}, \rho)$  es de trenza negativa. Veremos que todos ellos dan lugar a álgebras de Nichols de dimensión infinita.

*CASO:*  $j = 6$ . El representante de la clase de conjugación es

$$s_6 = (1, 9, 20, 17)(2, 6)(3, 10)(4, 8)(5, 24, 19, 7)(11, 14, 18, 23)(12, 21, 13, 15)(16, 22).$$

Elegimos en  $\mathcal{O}_{s_6}$  los siguientes elementos:  $\sigma_1 := s_6$ ,

$$\sigma_2 := (1, 9, 20, 17)(2, 11)(3, 14)(4, 18)(5, 19, 7, 24)(6, 10, 8, 22)(12, 21, 15, 13)(16, 23),$$

$\sigma_3 := \sigma_2 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_4 := \sigma_3 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_5 := \sigma_4 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_6 := \sigma_2 \triangleright \sigma_3$ ,  $\tau_1 := \sigma_6^{-1}$ ,  $\tau_2 := \sigma_4^{-1}$ ,  $\tau_3 := \sigma_5^{-1}$ ,  $\tau_4 := \sigma_2^{-1}$ ,  $\tau_5 := \sigma_3^{-1}$  y  $\tau_6 := \sigma_1^{-1}$ . Por cálculos directos se puede verificar que la familia  $(\sigma_l)_{l=1}^6 \cup (\tau_l)_{l=1}^6$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Ahora, asumamos que  $\rho = \rho_{2,6}$  ó  $\rho_{3,6}$ ; entonces,  $q_{\sigma_1 \sigma_1} = -1$  pues  $s_6 \in \mathcal{O}_{23}^{M_{24}^{s_6}}$ . Definimos  $g := (3, 16)(5, 12)(6, 8)(7, 15)(9, 17)(13, 19)(14, 23)(21, 24)$ ; se puede ver que  $g \in M_{24}$  y que  $g \triangleright \sigma_1 = \tau_1$ . Además, se computa con GAP que  $\tau_1, \sigma_6 \in \mathcal{O}_{24}^{M_{24}^{s_6}}$ . Luego, de la Tabla 5.16, se tiene que  $\rho(\sigma_6) = \rho(\tau_1) = \rho(g\sigma_6g) = -1$ . Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_6}, \rho) = \infty$ , por Teorema 2.4.31.

*CASO:*  $j = 8$ . El representante es

$$s_8 = (1, 4, 24, 14)(2, 21, 15, 6)(3, 16, 8, 12)(5, 11, 23, 20)(7, 18, 17, 13)(9, 10, 22, 19).$$

Elegimos en  $\mathcal{O}_{s_8}$  los siguientes elementos:  $\sigma_0 := s_8$ ,

$$\sigma_1 = (1, 2, 24, 15)(3, 5, 8, 23)(4, 19, 14, 10)(6, 22, 21, 9)(7, 16, 17, 12)(11, 13, 20, 18)$$

y  $\sigma_2 := \sigma_0 \triangleright \sigma_1$ . Se puede ver que  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/3}$  es una familia de tipo  $\mathcal{D}_3$  en  $\mathcal{O}_{s_8}$ . Ahora, si  $\rho = \rho_{2,8}$  ó  $\rho_{2,8}$ , entonces  $q_{\sigma_0 \sigma_0} = -1$ , y  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_8}, \rho) = \infty$ , por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$ .

*CASO:*  $j = 14$ . El representante es

$$s_{14} = (2, 10, 4, 16, 20, 15, 6, 18)(3, 17, 11, 5, 7, 12, 21, 13)(9, 19)(14, 24, 23, 22).$$

Se eligen en  $\mathcal{O}_{s_{14}}$  los siguientes elementos:  $\sigma_1 := s_{14}$ ,

$$\sigma_2 := (2, 4, 18, 15, 20, 6, 16, 10)(3, 12, 13, 21, 7, 17, 5, 11)(8, 9)(14, 22, 24, 23),$$

$\sigma_3 := \sigma_2 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_4 := \sigma_3 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_5 := \sigma_4 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_6 := s_{14}^3$  y  $\tau_l := \sigma_l^5$ ,  $1 \leq l \leq 6$ . Se puede ver que la familia  $(\sigma_l)_{l=1}^6 \cup (\tau_l)_{l=1}^6$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Ahora, si  $\rho = \epsilon \otimes \chi_{(-1)}$  ó  $\text{sgn} \otimes \chi_{(-1)}$ , entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{14}}, \rho) = \infty$ , por Corolario 2.4.32.

*CASO:*  $j = 17$ . El representante es

$$s_{17} = (1, 9, 12, 10, 17, 14, 3, 23, 5, 21, 19, 13)(2, 18)(4, 8, 15, 20)(6, 16, 7, 24, 22, 11).$$

Definimos  $\sigma_1 := s_{17}$ ,

$$\sigma_2 = (1, 9, 13, 3, 17, 14, 10, 19, 5, 21, 23, 12)(2, 18)(4, 8, 20, 15)(6, 11, 7, 16, 22, 24),$$

$\sigma_3 := \sigma_2 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_4 := \sigma_3 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_5 := \sigma_4 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_6 := s_{17}^7$  y  $\tau_l := \sigma_l^5$ ,  $1 \leq l \leq 6$ . Estos elementos están en  $\mathcal{O}_{s_{17}}$ , y la familia  $(\sigma_l)_{l=1}^6 \cup (\tau_l)_{l=1}^6$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Luego,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{17}}, \chi_{(-1)}) = \infty$ , por Corolario 2.4.32.

*CASO:*  $j = 18$ . El representante es

$$s_{18} = (1, 18, 20, 4, 17, 5, 24, 13, 11, 14, 7, 23)(2, 10, 16, 21, 22, 8, 15, 19, 12, 6, 9, 3).$$

Elegimos en  $\mathcal{O}_{s_{18}}$  los siguientes elementos:  $\sigma_1 := s_{18}$ ,

$$\sigma_2 = (1, 2, 10, 14, 17, 22, 8, 18, 11, 12, 6, 5)(3, 15, 20, 4, 21, 9, 24, 13, 19, 16, 7, 23),$$

$\sigma_3 := \sigma_2 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_4 := \sigma_3 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_5 := \sigma_4 \triangleright \sigma_1$ ,  $\sigma_6 := s_{18}^7$  y  $\tau_l := \sigma_l^5$ ,  $1 \leq l \leq 6$ . Se puede ver que la familia  $(\sigma_l)_{l=1}^6 \cup (\tau_l)_{l=1}^6$  es de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ . Entonces,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{18}}, \chi_{(-1)}) = \infty$ , por Corolario 2.4.32.

*CASO:*  $j = 19$ . El representante es

$$s_{19} = (1, 5, 20, 23, 19, 2, 18, 7, 17, 9, 21, 24, 6, 12)(3, 14, 8, 15, 13, 11, 16)(4, 22).$$

Elegimos en  $\mathcal{O}_{s_{19}}$  los siguientes elementos:  $\sigma_0 := s_{19}$ ,

$$\sigma_1 := (1, 14, 20, 15, 19, 11, 18, 3, 17, 8, 21, 13, 6, 16)(2, 12, 7, 5, 9, 23, 24)(4, 10)$$

y  $\sigma_2 := \sigma_0 \triangleright \sigma_1$ . Se puede ver que  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}/3}$  es una familia de tipo  $\mathcal{D}_3$  en  $\mathcal{O}_{s_{19}}$ . Por lo tanto,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{19}}, \chi_{(-1)}) = \infty$ , por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$  y  $k = 9$ .

*CASO:*  $j = 20$ . El representante es  $s_{20} = s_{19}^{-1}$ . Ahora, la familia  $(\sigma_i^{-1})_{i \in \mathbb{Z}/3}$ , con  $\sigma_i$  como en el caso  $j = 19$  anterior, es de tipo  $\mathcal{D}_3$ . Luego  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{s_{20}}, \chi_{(-1)}) = \infty$ , por Corolario 2.4.10, con  $p = 3$  y  $k = 9$ .

Teniendo en cuenta lo obtenido en estos casos y el Teorema 5.1.9 podemos enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.2.** *Si  $H$  es un álgebra de Hopf compleja de dimensión finita con  $G(H) \simeq M_{24}$ , entonces  $H$  es el álgebra de grupo  $\mathbb{C}M_{24}$ .  $\square$*

*Observación 5.2.3.* En los 7 casos restantes, que aparecen en la Tabla 5.1, hemos verificado utilizando el programa GAP que no existen familias de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$  ni  $\mathcal{D}_p$ , para cualquier primo impar  $p$ , dentro de las respectivas clases de conjugación. Por lo tanto, en estos casos no podemos decidir si la dimensión de  $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$  es infinita o no con las técnicas hoy disponibles.



## Capítulo 6

# Álgebras de Nichols sobre álgebras de Hopf semisimples

Cerramos esta tesis con algunas consideraciones acerca de álgebras de Nichols sobre álgebras de Hopf semisimples.

Sea  $A$  un álgebra de Hopf. Sea  $J \in A \otimes A$  un torcimiento y  $A^J$  la correspondiente álgebra de Hopf torcida – ver [Ni]. Si  $A$  es una subálgebra de Hopf de un álgebra de Hopf  $H$ , entonces  $J$  es un torcimiento para  $H$  y  $A^J$  es una subálgebra de Hopf de  $H^J$ . Ahora bien, si  $A$  es semisimple, entonces esto induce una biyección

$$\begin{aligned} & \{\text{isoclasas de álgebras de Hopf con corradical } \simeq A\} \\ & \xrightarrow{\sim} \{\text{isoclasas de álgebras de Hopf con corradical } \simeq A^J\}, \quad (6.1) \end{aligned}$$

que preserva invariantes estándares como dimensión, dimensión de Gelfand-Kirillov, etc. Esto nos permite enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 6.0.4.** *Sea  $G \simeq \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_7, M_{22}$  ó  $M_{24}$ , y  $H$  un álgebra de Hopf de dimensión finita con corradical isomorfo a  $(\mathbb{C}G)^J$ , con  $J \in \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$  el torcimiento no trivial definido en [Ni]. Entonces  $H \simeq (\mathbb{C}G)^J$ .*

*Demostración.* Por (6.1) y Teoremas 4.2.6, 4.2.11, 5.2.1 y 5.2.2. □

Éste es uno de los primeros resultados de clasificación para álgebras de Hopf de dimensión finita con corradical isomorfo a un álgebra de Hopf semisimple no trivial fija. Recientemente, un álgebra de Hopf semisimple  $B \simeq (\mathbb{C}\mathbb{D}_3 \times \mathbb{D}_3)^J$  ha sido descubierta en [GNa]. Esta álgebra de Hopf  $B$  es simple, o sea  $B$  no tiene una subálgebra de Hopf normal no trivial. Puesto que existen álgebras de Hopf punteadas no semisimples de dimensión finita con grupo  $\mathbb{D}_3$ , entonces existen álgebras de Hopf no semisimples de dimensión finita con corradical isomorfo a  $B$ .





# Bibliografía

- [A] N. ANDRUSKIEWITSCH, *About finite dimensional Hopf algebras*, Notes of the Lectures at the school “Quantum Symmetries in the Theoretical Physics and Mathematics”, Bariloche, January 2000.
- [AD] N. ANDRUSKIEWITSCH Y S. DĂSCĂLESCU, *On finite quantum groups at  $-1$* , *Algebr. Represent. Theory* **8** 1 (2005) 11–34.
- [AF1] N. ANDRUSKIEWITSCH Y F. FANTINO, *On pointed Hopf algebras associated with unmixed conjugacy classes in  $\mathbb{S}_m$* , *J. Math. Phys.* **48** (2007) 033502 1–26.
- [AF2] N. ANDRUSKIEWITSCH Y F. FANTINO, *On pointed Hopf algebras associated with alternating and dihedral groups*, *Rev. Unión Mat. Argent.* **48** 3 (2007) 57–71.
- [AF3] N. ANDRUSKIEWITSCH Y F. FANTINO, *New techniques for pointed Hopf algebras*, [arXiv:0803.3486](https://arxiv.org/abs/0803.3486), 29 pp.
- [AFZ] N. ANDRUSKIEWITSCH, F. FANTINO Y S. ZHANG, *On pointed Hopf algebras associated with the symmetric groups*, [arXiv:0807.2406v2](https://arxiv.org/abs/0807.2406v2) [math.QA].
- [AGñ1] N. ANDRUSKIEWITSCH Y M. GRAÑA, *Braided Hopf algebras over non-abelian groups*, *Bol. Acad. Ciencias (Córdoba)* **63** (1999) 45–78.
- [AGñ2] N. ANDRUSKIEWITSCH Y M. GRAÑA, *From racks to pointed Hopf algebras*, *Adv. Math.* **178** (2003) 177–243.
- [AHS] N. ANDRUSKIEWITSCH, I. HECKENBERGER Y H.-J. SCHNEIDER, *The Nichols algebra of a semisimple Yetter-Drinfeld module*, [arXiv:0803.2430v1](https://arxiv.org/abs/0803.2430v1) [math.QA].
- [AS1] N. ANDRUSKIEWITSCH Y H.-J. SCHNEIDER, *Lifting of Quantum Linear Spaces and Pointed Hopf Algebras of order  $p^3$* , *J. Algebra* **209** (1998) 658–691.
- [AS2] N. ANDRUSKIEWITSCH Y H.-J. SCHNEIDER, *Finite quantum groups and Cartan matrices*, *Adv. Math.* **154** (2000) 1–45.
- [AS3] N. ANDRUSKIEWITSCH Y H.-J. SCHNEIDER, *Pointed Hopf Algebras*, in “New directions in Hopf algebras”, 1–68, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [AS4] N. ANDRUSKIEWITSCH Y H.-J. SCHNEIDER, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, *Ann. Math.*, accepted, 43 pp.

- [AZ] N. ANDRUSKIEWITSCH Y S. ZHANG, *On pointed Hopf algebras associated to some conjugacy classes in  $S_n$* , Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007) 2723–2731.
- [BGr] C. T. BENSON Y L. C. GROVE, *The Schur indices of the reflection group  $H_4$* , J. Algebra, **27** (1973) 574–578.
- [Ca] R. W. CARTER, *Conjugacy classes in the Weyl group*, Compos. Math. **25** (1972) 1–59.
- [Ci] C. CIBILS, *Tensor products of Hopf bimodules over a group algebra*, Proc. A.M.S. **125** (1997) 1315–1321.
- [CC+] J. H. CONWAY, R. T. CURTIS, S. P. NORTON, R. A. PARKER Y R. A. WILSON, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, 1985.
- [DiPR] R. DIJKGRAAF, V. PASQUIER Y P. ROCHE, *Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models*, Nuclear Phys. B Proc. Suppl. **18B** (1991) 60–72.
- [Dr] V. DRINFELD, *Quantum groups*, Proc. Int. Congr. Math., Berkeley 1986, Vol. 1 (1987) 798–820.
- [ENiO] P. ETINGOF, D. NIKSHYCH Y V. OSTRIK, *On fusion categories*, Ann. Math. **162** (2005) 581–642.
- [EO] P. ETINGOF Y V. OSTRIK, *Finite tensor categories*, Mosc. Math. J. **4** 3 (2004) 627–654, 782–783. math.QA/0301027.
- [F] F. FANTINO, *On pointed Hopf algebras associated with the Mathieu simple groups*, preprint math.QA/07113142v2, 41 pp.
- [FrGñV] S. FREYRE, M. GRAÑA Y L. VENDRAMIN, *On Nichols algebra over  $GL(2, \mathbb{F}_q)$  and  $SL(2, \mathbb{F}_q)$* , J. Math. Phys. **48** (2007) 123513 1–11.
- [FrV] S. FREYRE Y L. VENDRAMIN, *On Nichols algebras over  $PSL(2, \mathbb{F}_q)$  and  $PGL(2, \mathbb{F}_q)$* , math.QA/0802.2567, 6 pp.
- [FuHa] W. FULTON Y J. HARRIS, *Representation theory*, Springer-Verlag, New York 1991.
- [Ga] M. R. GABERDIEL, *An algebraic approach to logarithmic conformal field theory*, Int. J. Mod. Phys. **A18** (2003) 4593–4638, hep-th/0111260.
- [GNa] C. GALINDO Y S. NATALE, *Simple Hopf algebras y deformations of finite groups*, Math. Res. Lett. **14** (5-6) 943–954.
- [Gñ1] M. GRAÑA, *On Nichols algebras of low dimension*, New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999), Contemp. Math. **267** 111–134 Amer. Math. Soc. Providence, RI 2000
- [Gñ2] M. GRAÑA, *Finite dimensional Nichols algebras of non-diagonal group type*, zoo of examples available at <http://mate.dm.uba.ar/~matiasg/zoo.html>.
- [Gñ3] M. GRAÑA, *A freeness theorem for Nichols algebras*, J. Algebra **231** 1 (2000) 235–257.
- [H1] I. HECKENBERGER, *Finite dimensional rank 2 Nichols algebras of diagonal type I: Examples*, math.QA/0402350v2; *II: Classification*, math.QA/0404008.

- [H2] I. HECKENBERGER, *The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type*, Invent. Math. **164** (2006) 175–188.
- [H3] I. HECKENBERGER, *Classification of arithmetic root systems of rank 3*, accepted for publication in Proceedings of the “XVI Coloquio Latinoamericano de Álgebra”.
- [H4] I. HECKENBERGER, *Classification of arithmetic root systems*, Adv. Math., accepted, preprint [math.QA/0605795](#).
- [Hu] J. E. HUMPHREYS, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- [JLi] A. JAMES Y M. LIEBECK, *Representations and characters of groups*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- [JoSt] A. JOYAL Y R. STREET, *Braided tensor categories*, Adv. Math. **102** (1993) 20–78.
- [Ka] C. KASSEL, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics 155, Springer-Verlag, New York (1995).
- [L1] G. LUSZTIG, *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras*, J. of Amer. Math. Soc. **3** (1990) 257–296.
- [L2] G. LUSZTIG, *Quantum groups at roots of 1*, Geom. Dedicata **35** (1990) 89–114.
- [L3] G. LUSZTIG, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, **110** (1993). Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.
- [L4] G. LUSZTIG, *Exotic Fourier transform*, Duke Math. J. **73** (1994) 227–241.
- [Mj] S. MAJID, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [MS] A. MILINSKI Y H.-J. SCHNEIDER, *Pointed Indecomposable Hopf Algebras over Coxeter Groups*, Contemp. Math. **267** (2000) 215–236.
- [Mo] S. MONTGOMERY, *Hopf Algebras y their Actions on Rings*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **82** (1993). American Mathematical Society (AMS).
- [N] W. D. NICHOLS, *Bialgebras of type one*, Commun. Alg. **6** (1978) 1521–1552.
- [Ni] D. NIKSHYCH,  *$K_0$ -rings and twisting of finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Commun. Alg. **26** (1998) 321–342. (Corrigendum: Commun. Alg. **26** (1998) 2019).
- [Ro1] M. ROSSO, *Groupes quantiques et algèbres de battage quantiques*, C.R.A.S. (París) **320** (1995) 145–148.
- [Ro2] M. ROSSO, *Quantum groups and quantum shuffles*, Invent. Math. **133** (1998) 399–416.
- [Sbg] P. SCHAUBURG, *A characterization of the Borel-like subalgebras of quantum enveloping algebras*, Comm. Algebra **24** (1996) 2811–2823.
- [S] H.-J. SCHNEIDER, *Lectures on Hopf algebras* (1995), Trabajos de Matemática 31/95 (FaMAF, 1995).

- [Sch+] M. SCHÖNERT ET AL. “*GAP – Groups, Algorithms, and Programming – version 3 release 4 patchlevel 4*”. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, 1997.
- [Se] J.-P. SERRE, *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York 1977.
- [Sw] M. SWEEDLER, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.
- [Tk1] M. TAKEUCHI, *Survey of braided Hopf algebras*, in “New Trends in Hopf Algebra Theory”; Contemp. Math. **267** (2000) 301–324.
- [Tk2] M. TAKEUCHI, *A survey on Nichols algebras*, American Mathematical Society (AMS). Contemp. Math. **376** (2005) 105–117.
- [Wil] R. A. WILSON, Finite group theory: a list of possible research problems, available at <http://www.maths.qmul.ac.uk/~raw/resprob.html>.
- [Wit] S. WITHERSPOON, *The representation ring of the quantum double of a finite group*, J. Alg. **179** (1996) 305–329.
- [Wo] S. L. WORONOWICZ, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Comm. Math. Phys. **122** (1989) 125–170.

# Índice alfabético

- $(i, j)$ -shuffles, 14
- álgebra, 1
- álgebra de Hopf, 4
  - trenzada graduada, 10
- álgebra de Nichols, 11, 12
- antípoda, 4
- bi-ideal, 3
- biálgebra, 3
- biproducción, 11
- bosonización, 11
- categoría tensorial, 8
  - simétrica, 9
  - trenzada, 9
    - rígida, 9
- coálgebra, 2
  - corradicalmente graduada, 5
  - cosemisimple, 3
  - estrictamente graduada, 5
  - punteada, 3
  - simple, 3
- coconmutatividad, 2
- coideal, 2
- coinvariantes, 4
  - subálgebra de, 5
- comódulo, 2
- comultiplicación, 2
- conjunto cruzado, 18
- coproducto, 2
- corradical, 3
- counidad, 2
- diagrama de Dynkin generalizado, 8
- elemento
  - casi-primitivo, 3
  - de tipo grupo, 3
  - primitivo, 4
- espacio vectorial trenzado, 6
  - débilmente finito, 18
  - de tipo Cartan, 8
  - de tipo diagonal, 8
  - de tipo grupo, 7
    - abeliano, 7
    - finito, 7
  - negativo, 18
- filtración
  - corradical, 5
  - de coálgebras, 5
- flip, 1
- grupo de trenzas, 14
- ideal de aumento, 4
- ideal de Hopf, 4
- método del levante, 15
- módulo de Yetter-Drinfeld, 6
- morfismo
  - de álgebras de Hopf, 4
  - de biálgebras, 3
  - de coálgebras, 2
  - de comódulos, 3
  - de racks, 18
- producto de convolución, 4
- pura
  - clase de conjugación, 45
  - permutación, 45
- quandle, 17
- rack, 17
  - 2-cociclo de, 18
  - del octaedro, 34
- real
  - elemento, 22
  - elemento absolutamente, 81

representación  
  conjugada, 92  
  inducida, 44

sección de Matsumoto, 14

simetrizador cuántico, 14

subrack, 18  
  abeliano, 18  
  de tipo  $\mathcal{D}_p$ , 25  
  de tipo  $\mathcal{D}_p^{(2)}$ , 25  
  de tipo  $\mathfrak{D}$ , 34  
  de tipo  $\mathfrak{D}^{(2)}$ , 35

Sweedler  
  notación sigma de, 2

tipo de una permutación, 43