

ESPACIOS DE GEODÉSICAS ORIENTADAS

POR YAMILE GODOY

PRESENTADO ANTE LA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA
COMO PARTE DE LOS REQUERIMIENTOS PARA LA OBTENCIÓN
DEL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

AGOSTO DE 2012
©FAMAF-UNC 2012

DIRECTOR: DR. MARCOS SALVAI

Resumen

En esta tesis tratamos dos problemas que involucran espacios de geodésicas: por un lado, el flujo magnético en la variedad de geodésicas orientadas de las formas espaciales de dimensión tres, y por otro la estructura de contacto canónica en el espacio de geodésicas nulas orientadas de pseudoesferas y productos.

Con respecto al primer problema, sea M una forma espacial de dimensión tres y sea \mathcal{L} la variedad de geodésicas orientadas de M , la cual es un espacio simétrico hermitiano pseudo-riemanniano. Dado que una curva suave en el espacio de geodésicas orientadas de una variedad determina una superficie reglada en dicha variedad, caracterizamos las superficies regladas de M asociadas a las geodésicas magnéticas de \mathcal{L} . Para la prueba de los resultados centrales usamos un teorema de Adachi et al, donde dan una expresión para las geodésicas magnéticas de un espacio simétrico hermitiano de Kähler. Además, usamos propiedades del borde asintótico del espacio hiperbólico y la distribución horosférica (para el caso en que M tiene curvatura seccional negativa).

Para el segundo problema, consideramos la estructura de contacto canónica (definida por B. Khesin y S. Tabachnikov) en el espacio de geodésicas nulas orientadas de una variedad pseudo-riemanniana y la estudiamos para la pseudoesfera y productos pseudo-riemannianos de variedades riemannianas. Sea S la pseudoesfera de signatura (k, m) y sea $\mathcal{L}^0(S)$ el espacio de geodésicas nulas orientadas de S . Probamos que $\mathcal{L}^0(S)$ es una variedad y describimos geoméricamente su distribución de contacto canónica en términos del espacio de geodésicas orientadas de una cierta hipersuperficie totalmente geodésica degenerada en S . Además, encontramos un contactomorfismo con una variedad de contacto estándar, más precisamente, el fibrado tangente unitario de una variedad pseudo-riemanniana. También, expresamos el operador billar nulo en $\mathcal{L}^0(S)$ asociado a algunas regiones sencillas en S mediante el flujo geodésico de esferas. Para N el producto pseudo-riemanniano de dos variedades riemannianas completas, damos

condiciones geométricas en los factores para que $\mathcal{L}^0(N)$ sea una variedad y exhibimos un contactomorfismo con una variedad de contacto más concreta.

Math. Subject Classification (2010): 53C22 Geodesics, 53C35 Symmetric spaces, 53C55 Hermitian and Kählerian manifolds, 53B30 Indefinite metrics, 53C50 Manifolds with indefinite metrics, 53D10 Contact manifolds, 53D25 Geodesic flows, 37D50 Hyperbolic systems with singularities, 58D10 Spaces of imbeddings and immersions.

Palabras y frases claves: variedad de geodésicas orientadas, espacio simétrico hermitiano, flujo magnético, superficie reglada, distribución horosférica, variedad de contacto, geodésica nula, billares.

Abstract

In this thesis we deal with two problems involving spaces of oriented geodesics: on the one hand, the magnetic flow on the manifold of oriented geodesics of a three dimensional space form, and on the other hand the canonical contact structure on the space of oriented null geodesics of pseudospheres and products.

With respect to the first problem, let M be a three dimensional space form and let \mathcal{L} be the manifold of oriented geodesics of M , which is a pseudo-Riemannian Hermitian symmetric space. Since a smooth curve in the space of oriented geodesics of a manifold determines a ruled surface in such manifold, we characterize the ruled surfaces of M associated with the magnetic geodesics of \mathcal{L} . For the proof of our central results we use a theorem of Adachi et al, where they give an expression for magnetic geodesics of a Kähler Hermitian symmetric space. We also use properties of the asymptotic boundary of the hyperbolic space and the horospherical distribution (for the negative curvature case).

For the second problem, we consider the canonical contact structure (defined by B. Khesin and S. Tabachnikov) on the space of oriented null geodesics of a pseudo-Riemannian manifold and we study it for the pseudosphere and pseudo-Riemannian products of Riemannian manifolds. Let S be the pseudosphere of signature (k, m) and let $\mathcal{L}^0(S)$ be the space of oriented null geodesics of S . We prove that $\mathcal{L}^0(S)$ is a manifold and describe geometrically its canonical contact distribution in terms of the space of oriented geodesics of certain totally geodesic degenerate hypersurfaces on S . Further, we find a contactomorphism with a standard contact manifold, more precisely, the unit tangent bundle of a pseudo-Riemannian manifold. We also study the billiard operator on $\mathcal{L}^0(S)$ associated with some regions in S and describe it in terms of the geodesic flows on spheres. For N the pseudo-Riemannian product of two complete Riemannian

manifolds, we give geometrical conditions on the factors for $\mathcal{L}^0(N)$ to be a manifold, and exhibit a contactomorphism with a concrete contact manifold.

Math. Subject Classification (2010): 53C22 Geodesics, 53C35 Symmetric spaces, 53C55 Hermitian and Kählerian manifolds, 53B30 Indefinite metrics, 53C50 Manifolds with indefinite metrics, 53D10 Contact manifolds, 53D25 Geodesic flows, 37D50 Hyperbolic systems with singularities, 58D10 Spaces of imbeddings and immersions.

Key words and phrases: manifold of oriented geodesics, Hermitian symmetric space, magnetic flow, ruled surface, horospherical distribution, contact manifold, null geodesic, billiards.

Agradecimientos

Quiero agradecer a las personas e instituciones que ayudaron en la realización de mi doctorado, en particular a: mi director de doctorado, Marcos Salvai, por haberme brindado sus conocimientos y por haberme propuesto problemas de la Geometría Diferencial tan interesantes para mí, por su apoyo y guía constante en cada momento de la carrera y por su calidez humana. Al CIEM, FaMAF, CONICET y SeCyT, por brindarme el lugar de trabajo y el apoyo económico. A mi comisión asesora; al tribunal de tesis, por sus sugerencias y aportes para mejorar la presentación. A mis amigos y compañeros de doctorado, con los cuales compartimos estos intensos años.

Agradezco a mi familia: a mis padres, por ser el apoyo incondicional ante todo y a Sergio, por ser mi compañero de cada día.

Índice general

Resumen	3
Abstract	5
Agradecimientos	7
Capítulo 1. Introducción	11
Capítulo 2. El flujo magnético en la variedad de geodésicas orientadas de las formas espaciales de dimensión tres	15
1. Submersiones y transporte paralelo	15
2. Espacios normales	16
3. Espacios simétricos hermitianos	18
4. Geodésicas magnéticas en espacios simétricos pseudo-hermitianos	20
5. Variedades de geodésicas orientadas de las formas espaciales de dimensión tres	22
6. Geodésicas magnéticas espaciales y temporales de \mathcal{L}_κ	27
7. El borde asintótico del espacio hiperbólico y la distribución horosférica	33
8. Geodésicas magnéticas nulas de \mathcal{L}_κ	39
Capítulo 3. La estructura de contacto canónica en el espacio de geodésicas nulas orientadas de pseudoesferas y productos	45
1. Variedades de contacto	45
2. Espacios de geodésicas nulas orientadas	48
3. La distribución de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(N)$	49
4. La estructura de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$	50
5. Billares	54
6. La estructura de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(M_+ \times N_-)$	57

10

Índice general

Bibliografía

65

Introducción

El marco general de los espacios de geodésicas es el de espacios de subvariedades congruentes: Sea N una variedad diferenciable donde actúa un grupo de Lie G . Sea M una subvariedad cerrada de N y sea \mathcal{C} el conjunto de todas las subvariedades de N congruentes a M por la acción de G , es decir,

$$\mathcal{C} = \{g(M) : g \in G\}.$$

Sea H el subconjunto de todos los elementos en G que preservan a M . Como M es cerrada en N , se tiene que H es un subgrupo de Lie de G cerrado y podemos identificar $\mathcal{C} \simeq G/H$.

A veces \mathcal{C} admite geometrías distinguidas dignas de estudio por sí mismas. Por ejemplo, métricas pseudo-riemmanianas invariantes por la componente conexa de la identidad del grupo de isometrías de N ([Sal05], [Sal07]), estructuras de (para)Kähler ([Anc], [Sal05], [Sal07], [GG10b]), estructuras simplécticas, de contacto o (para)complejas ([Anc], [AGK11], [KT09]). En otros casos, es de interés la relación entre las geometrías de \mathcal{C} y de N . Entre ellos podemos mencionar los siguientes:

- Notemos que una curva en \mathcal{C} determina genéricamente una inmersión de dimensión $m + 1$ en N (donde m es la dimensión de M), mediante barrido.

Los casos donde N es la esfera, M es un círculo máximo o una esfera máxima y G es el grupo de transformaciones conformes que preservan orientación, se estudian por ejemplo en [LS11], [LOS11] y [LO10]. Las superficies regladas determinadas por las geodésicas de \mathcal{C} , en los casos en que N es el espacio hiperbólico o euclídeo y M es una geodésica orientada son estudiados, por ejemplo, en [Hon12], [GK05] y [GG10b].

- En el caso en que M es una geodésica orientada en una variedad riemanniana y G el grupo de isometrías, una hipersuperficie orientada S de N determina una

subvariedad $\phi : S \rightarrow \mathcal{C}$, $\phi(p) = \ell_p$ (donde ℓ_p es la geodésica orientada ortogonal a S que pasa por p ; la orientación de ℓ_p está dada por la de S) de dimensión $n - 1$, donde n es la dimensión de N (ver por ejemplo, [GG10a]).

- Fibraciones de N por subvariedades congruentes a M : El problema consiste en describir geoméricamente cuáles subconjuntos F de \mathcal{C} determinan foliaciones de (subconjuntos abiertos de) N . El paradigma es el artículo [GW83], donde las foliaciones de S^3 por círculos máximos son caracterizadas de esta manera. Ver también [Sal02] (una generalización parcial de [GW83]) y [Sal09], con la foliaciones globales de \mathbb{R}^3 por rectas, el cual incluye una reformulación pseudo-riemanniana del resultado principal de [GW83].

En esta tesis estudiamos dos problemas que involucran espacios de geodésicas en el contexto establecido arriba, obteniendo resultados sobre la relación entre las geometrías de N y de \mathcal{C} , en el primer caso, y estudiando geometrías distinguidas, en el segundo. Estos problemas son desarrollados en los dos capítulos siguientes que describimos brevemente a continuación.

Capítulo 2. *El flujo magnético en la variedad de geodésicas orientadas de las formas espaciales de dimensión tres.*

Sea (M, g, J) una variedad pseudo-riemanniana de Kähler (como es usual, consideramos la geometría riemanniana como un caso particular de la pseudo-riemanniana), es decir, J es un campo tensorial de tipo $(1, 1)$ tal que J_p es una transformación ortogonal en $(T_p M, g_p)$ y $J_p^2 = -\text{id}$ para todo $p \in M$, y además $\nabla J = 0$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita.

Una curva σ en M es una geodésica magnética de M si satisface la ecuación $\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = J\dot{\sigma}$. Adachi et al [AMU00] (ver también [Ika03, Teorema 6.1]) encontraron una expresión para tales curvas en espacios simétricos hermitianos compactos (ver también [BJ08], Remark 1). Con hipótesis ligeramente más generales, en la Sección 4 damos una prueba alternativa de la validez de tal expresión usando las ecuaciones de O'Neill para la derivada covariante en el contexto de submersiones. Para ello, en la Sección 1 recordamos dichas ecuaciones de O'Neill y en las Secciones 2 y 3 repasamos la teoría

de espacios normales y espacios simétricos hermitianos en el caso particular que nos interesa y su estructura de Kähler.

En segundo lugar, consideramos las formas espaciales de dimensión tres, es decir, los espacios simplemente conexos completos de dimensión tres M_κ de curvatura seccional constante $\kappa = 0, \pm 1$, y sus respectivas variedades de geodésicas orientadas \mathcal{L}_κ . En la Sección 5 verificamos que la variedad pseudo-riemanniana \mathcal{L}_κ posee una estructura de espacio simétrico hermitiano (en el contexto presentado en la Sección 3). Una curva de \mathcal{L}_κ determina una superficie reglada en M_κ . Guilfoyle y Klingenberg probaron en [GK05] que, para $\kappa = 0$, una geodésica genérica de \mathcal{L}_κ describe un helicoides en M_κ . Los resultados centrales de este capítulo se encuentran en los Teoremas 2.11, 2.29 y 2.30, donde daremos una descripción de las superficies regladas en M_κ determinadas por las geodésicas magnéticas de \mathcal{L}_κ . Para tratar el caso $\kappa = -1$, en la Sección 7 repasamos el concepto de borde imaginario del espacio hiperbólico y estudiamos detalladamente las distribuciones horosféricas en \mathcal{L}_{-1} .

Capítulo 3. *La estructura de contacto canónica en el espacio de geodésicas nulas orientadas de pseudoesferas y productos.*

Sea N una variedad pseudo-riemanniana completa. Dos geodésicas nulas γ y σ de N son equivalentes si tienen la misma trayectoria y orientación. Llamando $\mathcal{L}^0(N)$ al conjunto de todas las clases de equivalencia de geodésicas nulas de N , decimos que $\mathcal{L}^0(N)$ es una variedad si admite una estructura diferenciable (no necesariamente Hausdorff) tal que la proyección canónica $\Pi : T^0N \rightarrow \mathcal{L}^0(N)$ es una submersión, donde T^0N denota el conjunto de vectores tangentes a N no nulos de norma cero. Este no es siempre el caso, ver por ejemplo la métrica pseudo-riemanniana en el toro T^2 dada en [Low01] tal que la trayectoria de cada geodésica nula es densa. Sin embargo, consideraciones infinitesimales en una $[\gamma] \in \mathcal{L}^0(N)$ fija son siempre posibles, por ejemplo mediante campos de Jacobi a lo largo de γ .

Para el caso en que $\mathcal{L}^0(N)$ es una variedad, B. Khesin y S. Tabachnikov introducen en [KT09] una estructura de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(N)$ (generalizando la definición dada en el caso lorentziano por R. Low en [Low01]) y la estudian para el espacio

pseudo-euclidiano. Continuamos trabajando en esa dirección para otros espacios tales como pseudoesferas y algunos productos.

Para esto, repasamos la definición de variedad de contacto, algunos ejemplos típicos de éstas (tales como los fibrados tangentes unitarios de variedades pseudo-riemannianas) y retomamos la definición de dicha estructura de contacto canónica.

Sea $\mathbb{R}^{k+1,m}$ el espacio pseudo-euclidiano de signatura $(k+1, m)$. La pseudoesfera de radio 1 en $\mathbb{R}^{k+1,m}$ se define por

$$S^{k,m} = \{p \in \mathbb{R}^{k+1,m} \mid \langle p, p \rangle = 1\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{k+1,m} \mid |u|^2 - |v|^2 = 1\},$$

la cual es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^{k+1,m}$ con métrica inducida de signatura (k, m) y difeomorfa a $S^k \times \mathbb{R}^m$. Notar que la pseudoesfera de Lorentz $S^{k,1}$ es el espacio de de Sitter. Las geodésicas nulas de $S^{k,m}$ son líneas rectas en $\mathbb{R}^{k+1,m}$ con velocidad inicial en $T^0 S^{k,m}$. Otras propiedades geométricas de las pseudoesferas se estudian por ejemplo en [O’N83] y [Har90].

En la Sección 4 mostramos que $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$ es una variedad y es contactomorfa al fibrado tangente unitario de una cierta variedad pseudo-riemanniana. Este resultado está motivado por el hecho que los fibrados tangentes unitarios de variedades pseudo-riemannianas están entre los ejemplos estándar de variedades de contacto. Además, describimos geoméricamente su distribución de contacto canónica en términos del espacio de geodésicas orientadas de una hipersuperficie totalmente geodésica degenerada en $S^{k,m}$. Khesin y Tabachnikov en [KT09] introducen el operador billar nulo y estudian su dinámica para el espacio pseudo-euclidiano. En esta sección, también expresamos el operador billar nulo de $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$ asociado a ciertas regiones sencillas en $S^{k,m}$ en términos del flujo geodésico de esferas.

Dadas M y N variedades riemannianas completas, consideramos en $M \times N$ la métrica pseudo-riemanniana cuya norma está definida por $\langle (u, v), (u, v) \rangle = |u|_M^2 - |v|_N^2$, para cada $(u, v) \in T_{(p,q)}(M \times N)$ y $(p, q) \in M \times N$. A esta variedad pseudo-riemanniana la denotamos por $M_+ \times N_-$. En la Sección 6 probamos que $\mathcal{L}^0(M_+ \times N_-)$ es una variedad si el flujo geodésico de M es libre y propio. También encontramos condiciones en M y N para la existencia de un contactomorfismo entre $\mathcal{L}^0(M_+ \times N_-)$ y una variedad de contacto más concreta.

El flujo magnético en la variedad de geodésicas orientadas de las formas espaciales de dimensión tres

Sea M una variedad simplemente conexa completa de dimensión tres de curvatura seccional constante $0, 1$ or -1 . Sea \mathcal{L} la variedad de todas las geodésicas completas orientadas (salvo parametrización) de M , munida de su métrica pseudo-riemanniana canónica de signatura $(2, 2)$ y estructura de Kähler J . Una curva suave en \mathcal{L} determina una superficie reglada en M .

Caracterizamos las superficies regladas de M asociadas a las geodésicas magnéticas de \mathcal{L} , es decir, aquellas curvas σ en \mathcal{L} que satisfacen $\nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = J\dot{\sigma}$. Más precisamente: una geodésica magnética de tipo temporal (de tipo espacial) determina la superficie reglada en M dada por el campo binormal a lo largo de una hélice con torsión positiva (negativa). Geodésicas magnéticas nulas describen conos, cilindros o, en el caso hiperbólico, también conos con vértices en el infinito. Esto determina una relación entre las geometrías de \mathcal{L} y M .

1. Submersiones y transporte paralelo

Sea $\pi : B \rightarrow M$ una submersión pseudo-riemanniana, es decir, π es una aplicación diferenciable y suryectiva, el subespacio horizontal \mathcal{H}_x del espacio tangente a x de B es no degenerado, $(d\pi)_x$ es suryectiva y $(d\pi)_x|_{\mathcal{H}_x} : \mathcal{H}_x \rightarrow T_{\pi(x)}M$ es una isometría, para todo $x \in B$.

Recordamos los resultados de O'Neill [O'N67] en el caso particular en que las fibras son totalmente geodésicas.

Se denotan por \mathcal{H} y \mathcal{V} las proyecciones de cada espacio tangente de B sobre sus subespacios vectoriales horizontal y vertical, respectivamente. El tensor canónico de

O'Neill A , en campos vectoriales arbitrarios E y F de B , está definido por

$$A_E F = \mathcal{V} \nabla_{\mathcal{H}E} (\mathcal{H}F) + \mathcal{H} \nabla_{\mathcal{H}E} (\mathcal{V}F).$$

Este tensor satisface las siguientes propiedades:

1. A_E es, en cada punto, un operador lineal antisimétrico del espacio tangente de B ; transforma vectores verticales en horizontales y horizontales en verticales;
2. A es horizontal, esto es, $A_E = A_{\mathcal{H}E}$;
3. para campos vectoriales horizontales, $A_X Y = \frac{1}{2} \mathcal{V} [X, Y] = -A_Y X$.

Si E es un campo vectorial a lo largo de una curva α en B , denotaremos por H y V la parte horizontal $\mathcal{H}E$ y la parte vertical $\mathcal{V}E$ de E , respectivamente, y por E_* el campo vectorial $d\pi(E) = d\pi(H)$ a lo largo de $\pi \circ \alpha$. La derivada covariante de un campo vectorial a lo largo de una curva será denotada por una prima; es decir $(E_*)'$ será un campo vectorial a lo largo de $\pi \circ \alpha$. Dado un campo vectorial U a lo largo de la curva $\pi \circ \alpha$ en M , denotaremos por \widetilde{U} a su levantamiento horizontal a α . Con lo cual, $(\widetilde{E_*})'$ denotará el campo vectorial horizontal a lo largo de α que se proyecta a la derivada covariante de $d\pi(E)$.

Teorema 2.1. [O'N67] *Sea $\pi : B \rightarrow M$ una submersión pseudo-riemanniana, y sea $E = H + V$ un campo vectorial a lo largo de una curva α en B . Si las fibras son totalmente geodésicas, entonces*

$$(2.1) \quad \mathcal{H}(E') = (\widetilde{E_*})' + A_H(\mathcal{V}\dot{\alpha}) + A_{\mathcal{H}\dot{\alpha}}(V),$$

$$(2.2) \quad \mathcal{V}(E') = A_{\mathcal{H}\dot{\alpha}}(H) + \mathcal{V}(V').$$

2. Espacios normales

Sea G un grupo de Lie conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} munido de una métrica pseudo-riemanniana bi-invariante g . Sea H un subgrupo de Lie cerrado y conexo de G con álgebra de Lie \mathfrak{h} tal que $g|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ es no degenerada. Sea \mathfrak{p} el complemento ortogonal de \mathfrak{h} . Se cumple que $\text{Ad}(H)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ (en particular $g|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$ es $\text{Ad}(H)$ -invariante). Luego, g induce una métrica pseudo-riemanniana en $M = G/H$ tal que la proyección canónica

$\pi : G \rightarrow M$ es una submersión pseudo-riemanniana. El espacio homogéneo M provisto de dicha métrica pseudo-riemanniana se denomina *espacio normal*.

En estas condiciones las fibras son subvariedades totalmente geodésicas, ya que las geodésicas de G son subgrupos monoparamétricos.

A partir de estas hipótesis, enunciamos y demostramos el siguiente lema.

Lema 2.2. *Sea G un grupo de Lie conexo con una métrica pseudo-riemanniana bi-invariante y sea H un subgrupo de Lie de G como arriba. Sea β la curva en el espacio normal $M = G/H$ definida por $\beta(t) = \pi \circ \alpha(t)$, donde $\alpha(t) = \exp tZ$, con $Z \in \mathfrak{g}$. Si $Z = Y + W$, con $Y \in \mathfrak{p}$ y $W \in \mathfrak{h}$, entonces*

$$\frac{D\dot{\beta}}{dt}(t) = d\pi_{\alpha(t)}[W, Y]_{\alpha(t)}.$$

PRUEBA. Observemos que al ser α una geodésica de G (pues la métrica de G es bi-invariante), las partes vertical y horizontal de la derivada covariante de $\dot{\alpha}$ son nulas, para cada t . Entonces, aplicando la ecuación (2.1) del Teorema de O'Neill 2.1 al campo $E = \dot{\alpha}$, se obtiene la siguiente igualdad

$$\widetilde{(\dot{\alpha}_*)}' + 2A_{\mathcal{H}\dot{\alpha}}(\mathcal{V}\dot{\alpha}) = 0,$$

donde $\widetilde{(\dot{\alpha}_*)}'$ denota el campo vectorial horizontal a lo largo de α que se proyecta a la derivada covariante de $d\pi(\dot{\alpha}) = \dot{\beta}$, es decir, $d\pi(\widetilde{(\dot{\alpha}_*)}')$ es $\dot{\beta}'$ (recordamos que la prima aquí denota la derivada covariante a lo largo de β). Utilizando la definición del tensor A y la propiedad de ser horizontal en el sentido que $A_E = A_{\mathcal{H}E}$, tenemos

$$A_{\mathcal{H}\dot{\alpha}}(\mathcal{V}\dot{\alpha}) = A_{\dot{\alpha}}(\mathcal{V}\dot{\alpha}) = \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{H}\dot{\alpha}}\mathcal{V}\dot{\alpha}).$$

Entonces, como $\mathcal{H}\dot{\alpha}(t) = Y_{\alpha(t)}$ y $\mathcal{V}\dot{\alpha}(t) = W_{\alpha(t)}$,

$$(2.3) \quad \dot{\beta}'(t) = -2d\pi_{\alpha(t)}(\nabla_{\mathcal{H}\dot{\alpha}}\mathcal{V}\dot{\alpha}) = -2d\pi_{\alpha(t)}(\nabla_Y W)_{\alpha(t)}.$$

Finalmente, como la métrica de G es bi-invariante se tiene que $\nabla_Y W = \frac{1}{2}[Y, W]$, con lo cual de (2.3) resulta $\frac{D\dot{\beta}}{dt}(t) = d\pi_{\alpha(t)}[W, Y]_{\alpha(t)}$, como queríamos verificar. \square

3. Espacios simétricos hermitianos

Sea G un grupo de Lie conexo con una métrica pseudo-riemanniana bi-invariante y sea H un subgrupo de Lie de G como en la sección anterior (en particular conexo). Sea τ un automorfismo involutivo de G tal que H es la componente conexa de la identidad de $\{x \in G \mid \tau(x) = x\}$. Entonces, el espacio normal $M = G/H$ es un espacio simétrico pseudo-riemanniano (ver por ejemplo [O'N83, página 315]).

Para cada $g \in G$, sea $L_g : M \rightarrow M$ el difeomorfismo dado por $L_g(kH) = gkH$.

Proposición 2.3. *Sean G un grupo de Lie conexo y H un subgrupo de Lie de G como arriba. Sea a un elemento del centro de \mathfrak{h} tal que ad_a es ortogonal y $\text{ad}_a^2 = -\text{id}$ en \mathfrak{p} . Si $J_{eH} =: d\pi_e \circ \text{ad}_a \circ (d\pi_e|_{\mathfrak{p}})^{-1}$, entonces, para cada $g \in G$, $J_{gH} = (dL_g)_{eH} \circ J_{eH} \circ (dL_{g^{-1}})_{gH}$ define una estructura Hermitiana en M .*

Para la prueba de la proposición usaremos reiteradamente las bien conocidas identidades presentadas en el siguiente lema:

Lema 2.4. *Para cada $h \in H$,*

$$(2.4) \quad (dL_h)_{eH} \circ d\pi_e = d\pi_e \circ \text{Ad}(h),$$

$$(2.5) \quad \text{ad}_a \circ \text{Ad}(h) = \text{Ad}(h) \circ \text{ad}_a.$$

PRUEBA. La primera identidad se debe a que $L_h \circ \pi = \pi \circ l_h$ y $d\pi_e \circ \text{Ad}(h) = d\pi_h \circ (dl_h)_e$, con l_h la multiplicación a izquierda por h en G , ambas igualdades de fácil verificación. La segunda se reduce al hecho que $\text{Ad}(h)a = a$ si $h \in H$. Pues, si $X \in \mathfrak{p}$,

$$\begin{aligned} \text{Ad}(h) \circ \text{ad}_a(X) &= \text{Ad}(h)([a, X]) \\ &= [\text{Ad}(h)a, \text{Ad}(h)X] \\ &= [a, \text{Ad}(h)X] \\ &= \text{ad}_a \circ \text{Ad}(h)(X). \end{aligned}$$

Finalmente nos dedicaremos a comprobar ese hecho. Observemos que si $h \in H$ es un elemento en un entorno de la identidad donde la exponencial es un difeomorfismo,

entonces existirá $Z \in \mathfrak{h}$ tal que $h = \exp Z$. Consideremos ahora la curva γ dada por $t \mapsto \text{Ad}(\exp tZ)a$ y veamos que ésta es constante. Sea $t_o \in \mathbb{R}$ y calculemos $\dot{\gamma}(t_o)$,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t_o) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma(t + t_o) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Ad}(\exp(t + t_o)Z)a \\ &= \text{Ad}(\exp t_o Z) \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Ad}(\exp tZ)a = \text{Ad}(\exp t_o Z) \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp t \text{ad}_Z a \\ &= \text{Ad}(\exp t_o Z) \circ \text{ad}_Z a = \text{Ad}(\exp t_o Z)[Z, a]. \end{aligned}$$

Como a está en el centro de \mathfrak{h} se tiene que $\dot{\gamma}(t_o) = 0$. Luego, $\gamma(t) = a$ para todo t , en particular para $t = 1$. Ahora, por ser H conexo, cualquier $h \in H$ está generado por elementos de la forma $\exp Z$ con Z en un entorno del origen de \mathfrak{h} donde la exponencial es un difeomorfismo. Entonces por lo probado arriba se ve que $\text{Ad}(h)a = a$, para todo $h \in H$. \square

PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 2.3. Primero observemos que, por definición, J_{eH} resulta ortogonal y con cuadrado igual a $-\text{id}$ en $T_{eH}M$. Se tiene que J determina una estructura casi hermitiana en M , pues J así definida es en cada punto de M una transformación ortogonal del espacio tangente a dicho punto, su cuadrado es menos la transformación identidad y está bien definida. Las dos primeras propiedades se cumplen claramente. Restaría verificar que J está bien definida.

Si $gH = kH$, con $g, k \in G$, queremos probar que $J_{gH} = J_{kH}$. Consideremos un elemento $X \in T_{gH}M$. Tenemos

$$\begin{aligned} J_{gH}X &= (dL_g)_{eH} \circ J_{eH} \circ (dL_{g^{-1}})_{gH} X \\ &= (dL_g)_{eH} \circ J_{eH} \circ (dL_{g^{-1}k})_{k^{-1}gH} \circ (dL_{k^{-1}})_{kH} X. \end{aligned}$$

Como $d\pi_e|_{\mathfrak{p}}$ es un isomorfismo de \mathfrak{p} sobre $T_{eH}M$, existe $Y \in \mathfrak{p}$ tal que $(dL_{k^{-1}})_{kH} X = d\pi_e Y$. Reemplazando esto en lo anterior, y usando la definición de J en eH y la identidad (2.4) del Lema 2.4, ya que $g^{-1}k \in H$, se tiene lo siguiente

$$(dL_g)_{eH} \circ J_{eH} \circ d\pi_e \circ \text{Ad}(g^{-1}k)Y = (dL_g)_{eH} \circ d\pi_e \circ \text{ad}_a \circ \text{Ad}(g^{-1}k)Y.$$

Ahora, por (2.4) y (2.5) del Lema 2.4, lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}
(dL_g)_{eH} \circ d\pi_e \circ \text{Ad}(g^{-1}k) \circ \text{ad}_a Y &= (dL_g)_{eH} \circ (dL_{g^{-1}k})_{eH} \circ d\pi_e \circ \text{ad}_a Y \\
&= (dL_k)_{eH} \circ J_{eH} \circ d\pi_e Y \\
&= (dL_k)_{eH} \circ J_{eH} \circ (dL_{k^{-1}})_{kH} X \\
&= J_{kH} X.
\end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrada la buena definición de J .

Debemos comprobar que $\nabla J = 0$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de M . Por definición tenemos que $(\nabla J)(\bar{X}, \bar{Y}) = \nabla_{\bar{X}} J\bar{Y} - J\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}$, para cada par de campos \bar{X}, \bar{Y} en M . Consideremos los únicos elementos X, Y en \mathfrak{p} tales que $d\pi_e X = \bar{X}_{eH}$ y $d\pi_e Y = \bar{Y}_{eH}$ y tomemos el campo paralelo a lo largo de la curva $\alpha : t \mapsto \pi(\exp tX)$ dado por $\bar{Y}_{\alpha(t)} = (dL_{\exp tX})_{eH} \circ d\pi_e Y$ (recordemos que M es un espacio simétrico), luego

$$(J\nabla_{\bar{X}} \bar{Y})_{eH} = J_{eH}(\nabla_{\bar{X}} \bar{Y})_{eH} = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
J_{\alpha(t)} \bar{Y}_{\alpha(t)} &= dL_{\exp tX} \circ J_{eH} \circ dL_{\exp(-tX)} \circ (dL_{\exp tX})_{eH} \circ d\pi_e Y \\
&= dL_{\exp tX} \circ J_{eH} \circ d\pi_e Y.
\end{aligned}$$

Como $J\bar{Y}(\alpha(t)) = dL_{\exp tX} \circ J_{eH} \circ d\pi_e Y$ es también un campo paralelo a lo largo de α , se tiene

$$(\nabla_{\bar{X}} J\bar{Y})_{eH} = 0.$$

Así $(\nabla J)_{eH} = 0$. Luego, como la conexión de Levi-Civita y J son G -invariantes, se tiene que $\nabla J = 0$. \square

4. Geodésicas magnéticas en espacios simétricos pseudo-hermitianos

En esta sección retomamos el concepto de geodésica magnética dado en la Introducción.

Definición 2.5. Sea (M, g, J) una variedad pseudo-riemanniana de Kähler. Una curva σ en M es una *geodésica magnética* de M si satisface la ecuación

$$\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = J_{\sigma} \dot{\sigma}.$$

De la definición de geodésica magnética se tiene que dado p en M , para cada $v \in T_p M$ existe una única geodésica magnética σ con $\sigma(0) = p$ y $\dot{\sigma}(0) = v$. Además, las geodésicas magnéticas tienen rapidez constante pues

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t) \rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t) \right\rangle = 2 \langle J \dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t) \rangle = 0$$

ya que para todo $u \in TM$ vale

$$\langle Ju, u \rangle = \langle Ju, J^t Ju \rangle = \langle J^2 u, Ju \rangle = -\langle u, Ju \rangle.$$

Para finalizar esta sección, presentamos una aplicación directa del resultado de Adachi et al [AMU00].

Sea G un grupo de Lie conexo con una métrica pseudo-riemanniana bi-invariante y sea H un subgrupo de Lie de G tal que $M = G/H$ es un espacio normal (como se vio en la Sección 2). Además, supongamos que M es un espacio simétrico pseudo-riemanniano y que su estructura de Kähler es la determinada por un elemento a del centro del álgebra de Lie de H que satisface las hipótesis de la Proposición 2.3.

Adachi et al enunciaron el teorema para el caso riemanniano (ver también [Ika03, Teorema 6.1]). Como la prueba no se encuentra explícita en [AMU00], damos una prueba alternativa de su validez en el contexto establecido arriba (ligeramente más general), usando el Teorema de O'Neill 2.1.

Proposición 2.6. *Sea $M = G/H$ un espacio simétrico pseudo-hermitiano como arriba. Si $\sigma(t)$ es una geodésica magnética de M con condiciones iniciales $\sigma(0) = eH$ y $\dot{\sigma}(0) = X \in \mathfrak{p}$, entonces $\sigma(t) = \pi(\exp t(X + a))$.*

PRUEBA. Sea $\alpha(t) = \exp t(X + a)$ y sea $\beta(t) = \pi \circ \alpha(t)$. En primer lugar, β es una geodésica magnética de M . De hecho, recordando la definición de J y utilizando las identidades presentadas más arriba, donde l_g denota la multiplicación a izquierda por

g en G , tenemos

$$\begin{aligned}
J_{\beta(t)}\dot{\beta}(t) &= (dL_{\alpha(t)})_{eH} \circ J_{eH} \circ (dL_{\alpha(t)^{-1}})_{\beta(t)} \dot{\beta}(t) \\
&= (dL_{\alpha(t)})_{eH} \circ J_{eH} \circ (dL_{\alpha(t)^{-1}})_{\beta(t)} \circ d\pi_{\alpha(t)} \dot{\alpha}(t) \\
&= (dL_{\alpha(t)})_{eH} \circ J_{eH} \circ d\pi_e \circ (dl_{\alpha(t)^{-1}})_{\alpha(t)} \dot{\alpha}(t) \\
&= (dL_{\alpha(t)})_{eH} \circ d\pi_e \circ \text{ad}_a \circ (dl_{\alpha(t)^{-1}})_{\alpha(t)} \dot{\alpha}(t).
\end{aligned}$$

Observando que $\dot{\alpha}(t) = (dl_{\alpha(t)})_e(X + a)_e$, lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}
(dL_{\alpha(t)})_{eH} \circ d\pi_e \circ \text{ad}_a(X + a)_e &= (dL_{\alpha(t)})_{eH} \circ d\pi_e [a, X]_e \\
&= d\pi_{\alpha(t)} \circ (dl_{\alpha(t)})_e [a, X]_e \\
&= d\pi_{\alpha(t)} [a, X]_{\alpha(t)}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $a \in \mathfrak{h}$ y $X \in \mathfrak{p}$, por el Lema 2.2 $\frac{D\dot{\beta}}{dt}(t) = d\pi_{\alpha(t)}[a, X]_{\alpha(t)}$. Con lo cual se tiene que $\frac{D\dot{\beta}}{dt}(t) = J_{\beta(t)}\dot{\beta}(t)$. Como β tiene las mismas condiciones iniciales que σ , por unicidad de las geodésicas magnéticas, se tiene la igualdad buscada. \square

5. Variedades de geodésicas orientadas de las formas espaciales de dimensión tres

En esta sección denotamos por M_κ a la variedad riemanniana completa simplemente conexa de curvatura seccional constante $\kappa = 0, 1, -1$ y de dimensión tres. Para el análisis simultáneo de los tres casos $\kappa = 0, 1, -1$, consideramos la presentación estándar de M_κ como una subvariedad de \mathbb{R}^4 , es decir,

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 &= \{(1, x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}^3\}, \quad \mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x|^2 = 1\} \text{ y} \\
\mathbb{H}^3 &= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \text{ y } x_0 > 0\}.
\end{aligned}$$

Sea \mathcal{L}_κ el espacio de todas las geodésicas orientadas completas de M_κ (salvo reparametrizaciones que preserven la orientación). A cada elemento $c \in \mathcal{L}_\kappa$ se lo puede ver como la clase de equivalencia de geodésicas de rapidez unitaria $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M_\kappa$ con imagen c tal que $\{\dot{\gamma}(s)\}$ es una base positiva de $T_{\gamma(s)}c$ para todo s .

A continuación presentamos una métrica pseudo-riemanniana en \mathcal{L}_κ extraída de [Sal09]. Sea γ una geodésica completa de M_κ de rapidez unitaria y sea \mathcal{J}_γ el espacio

de los campos de Jacobi a lo largo de γ que son ortogonales a γ . Existe un isomorfismo canónico bien definido

$$(2.6) \quad T_\gamma : \mathcal{J}_\gamma \rightarrow T_{[\gamma]}\mathcal{L}_\kappa, \quad T_\gamma(J) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 [\gamma_t],$$

donde γ_t es cualquier variación de γ por geodésicas de rapidez unitaria asociada a J .

Se puede definir en \mathcal{L}_κ una métrica pseudo-riemanniana de signatura (2,2) como sigue: para $X \in T_{[\gamma]}\mathcal{L}_\kappa$, $\|X\| := \langle X, X \rangle$, está dado por

$$(2.7) \quad \|X\| = \langle \dot{\gamma} \times J, J' \rangle,$$

donde $X = T_\gamma(J)$, el producto cruz \times está inducido por una orientación fija de M_κ y J' denota la derivada covariante de J a lo largo de γ . Notar que $\|X\|$ está bien definido pues

$$\langle \dot{\gamma} \times J, J' \rangle' = \langle \dot{\gamma} \times J', J' \rangle + \langle \dot{\gamma} \times J, J'' \rangle,$$

que es idénticamente cero ya que $J'' = R_\kappa(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$ es un múltiplo de J (aquí R_κ es el tensor de curvatura de M_κ).

Recordemos que X es nulo, de tipo temporal o de tipo espacial si $\|X\| = 0$, $\|X\| < 0$ o $\|X\| > 0$, respectivamente.

Sea $[\gamma] \in \mathcal{L}_\kappa$ y sea R_γ la rotación en M_κ en ángulo $\pi/2$ que fija γ . Esta rotación induce una isometría \tilde{R}_γ de \mathcal{L}_κ cuya diferencial en $[\gamma]$ es una isometría lineal de $T_{[\gamma]}\mathcal{L}_\kappa$ que al cuadrado es $-\text{id}$. Esto da una estructura casi hermitiana \tilde{J} en \mathcal{L}_κ . Con la métrica definida arriba, \mathcal{L}_κ es Kähler (ver Proposición 2.8).

5.1. \mathcal{L}_κ como espacio simétrico pseudo-hermitiano. Sea G_κ la componente de la identidad del grupo de isometrías de M_κ , es decir, $G_0 = SO_3 \times \mathbb{R}^3$, $G_1 = SO_4$ y $G_{-1} = O_o(1, 3)$. Consideramos la presentación usual de G_0 como subgrupo de $GL_4(\mathbb{R})$. El grupo G_κ actúa en \mathcal{L}_κ como sigue: $g \cdot [\gamma] = [g \circ \gamma]$. Esta acción es suave y es transitiva pues el grupo de isometrías actúa transitivamente en T^1M_κ .

Si denotamos por \mathfrak{g}_κ al álgebra de Lie de G_κ , se tiene que,

$$\mathfrak{g}_\kappa = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\kappa x^t \\ x & B \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^3, B \in so_3 \right\}.$$

Sea γ_o la geodésica de M_κ con $\gamma_o(0) = e_0$ y velocidad $e_1 \in T^1M_\kappa$, donde $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^4 . Para $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, sea $\text{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & B \end{pmatrix}$, donde 0_2 denota la matriz nula 2×2 . Entonces el subgrupo de isotropía de G_κ en $[\gamma_o]$ es

$$H_\kappa = \{\text{diag}(R_\kappa(t), B) \mid t \in \mathbb{R}, B \in SO_2\},$$

donde

$$(2.8) \quad R_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad R_{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Sea $j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. El álgebra de Lie de H_κ es

$$\mathfrak{h}_\kappa = \{\text{diag}(r_\kappa(t), sj) \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

donde $r_\kappa(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa t \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Entonces podemos identificar \mathcal{L}_κ con G_κ/H_κ vía el difeomorfismo

$$(2.9) \quad \phi : G_\kappa/H_\kappa \rightarrow \mathcal{L}_\kappa, \quad \phi(gH_\kappa) = g \cdot [\gamma_o].$$

Para $x, y \in \mathbb{R}^2$ denotamos $Z(x, y) = \begin{pmatrix} 0_2 & (-\kappa x, -y)^t \\ (x, y) & 0_2 \end{pmatrix}$. Sea

$$\mathfrak{p}_\kappa = \{Z(x, y) \in \mathfrak{g}_\kappa \mid x, y \in \mathbb{R}^2\},$$

el cual es un complemento $\text{Ad}(H_\kappa)$ -invariante de \mathfrak{h}_κ .

Para $\kappa = 0, 1$, consideramos en \mathfrak{g}_κ el producto interno tal que $\mathfrak{h}_\kappa \perp \mathfrak{p}_\kappa$,

$$(2.10) \quad \|Z(x, y)\| = \det(x, y) \quad \text{y} \quad \|\text{diag}(r_\kappa(t), sj)\| = -ts.$$

(ver [KM96, página 499] para $\kappa = 0$). En \mathfrak{g}_{-1} consideramos la forma de Killing ($\mathfrak{h}_\kappa \perp \mathfrak{p}_\kappa$ también se cumple).

Para $\kappa = 0, 1, -1$, este producto interno en \mathfrak{g}_κ induce en G_κ una métrica bi-invariante. Entonces, existe una única métrica en $\mathcal{L}_\kappa \simeq G_\kappa/H_\kappa$ tal que $\pi : G_\kappa \rightarrow G_\kappa/H_\kappa$ es una submersión pseudo-riemanniana. Luego, \mathcal{L}_κ es un espacio normal.

Observación 2.7. Para $\kappa = 0, 1$, la métrica en \mathcal{L}_κ dada en (2.10) coincide con la dada en (2.7) (ver Lema 2.13). Para $\kappa = -1$, la métrica en \mathcal{L}_{-1} asociada a la forma de Killing es diferente de la definida en (2.7). Sin embargo, las geodésicas magnéticas de ambas métricas en \mathcal{L}_{-1} son las mismas. Esto se sigue debido a que las geodésicas son las mismas (ver [Sal07] o [O’N83, pág. 330, ejercicio 10 b)], con lo cual las conexiones de Levi-Civita coinciden.

Sea $\tilde{I} = \text{diag}(-I, I)$, donde I es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, entonces $\tau : G_\kappa \rightarrow G_\kappa$ definido por $\tau(B) = \tilde{I}B\tilde{I}$, es un automorfismo involutivo de G_κ tal que $\tau(B) = B$ para todo $B \in H_\kappa$. Luego, G_κ/H_κ , con la métrica considerada arriba, es un espacio simétrico pseudo-riemanniano.

Sea $A = \text{diag}(0_2, j)$. Este elemento está en el centro de \mathfrak{h}_κ . Además, ad_A es ortogonal y $\text{ad}_A^2 = -\text{id}$ en \mathfrak{p}_κ . Luego, por la Proposición 2.3, $G_\kappa/H_\kappa \simeq \mathcal{L}_\kappa$ es un espacio simétrico pseudo-hermitiano.

A continuación vemos que esta estructura casi hermitiana en G_κ/H_κ coincide con la estructura casi hermitiana \tilde{J} definida de manera más geométrica al comienzo de esta sección.

Proposición 2.8. *Sea \tilde{J} la estructura casi hermitiana en \mathcal{L}_κ que en cada $[\gamma] \in \mathcal{L}_\kappa$ está definida por la diferencial en $[\gamma]$ de la isometría \tilde{R}_γ , donde R_γ es la rotación en M_κ en ángulo $\pi/2$ que fija γ , y sea J la estructura de Kähler en $\mathcal{L}_\kappa \simeq G_\kappa/H_\kappa$ determinada por $A = \text{diag}(0_2, j)$ y el difeomorfismo ϕ dado en (2.9). Entonces, ambas estructuras casi hermitianas coinciden.*

En consecuencia, con la métrica definida en (2.7) y la estructura casi hermitiana \tilde{J} , la variedad \mathcal{L}_κ es Kähler.

PRUEBA. En efecto, por la G -invariancia de J y \tilde{J} , es suficiente verificar que

$$d\tilde{R}_{[\gamma_0]} = J_{[\gamma_0]},$$

donde $J_{[\gamma_0]} = d\phi \circ d\pi_I \circ \text{ad}_A \circ (d\pi_I|_{\mathfrak{p}_\kappa})^{-1} \circ (d\phi)^{-1}$ y $R = \text{diag}(I, j)|_{M_\kappa}$. Denotemos por ϵ_1 y ϵ_2 a los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^2 y tomemos

$$E_1 = Z(\epsilon_1, 0), \quad E_2 = Z(\epsilon_2, 0), \quad E_3 = Z(0, \epsilon_1) \quad \text{y} \quad E_4 = Z(0, \epsilon_2).$$

El conjunto $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ es una base de \mathfrak{p}_κ . Ahora, sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la base de $T_{[\gamma_0]}\mathcal{L}_\kappa$ dada por $v_i = d\phi \circ d\pi_I E_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Realizando los cálculos necesarios, tenemos que

$$(2.11) \quad J_{[\gamma_0]}v_1 = v_2, \quad J_{[\gamma_0]}v_2 = -v_1, \quad J_{[\gamma_0]}v_3 = v_4 \text{ y } J_{[\gamma_0]}v_4 = -v_3.$$

Por otro lado, como $R \in H_\kappa$, usando (2.5) del Lema 2.4 llegamos a

$$d\tilde{R}_{[\gamma_0]}v_i = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \phi \circ L_R \circ \pi(\exp tE_i) = d\phi_{IH_\kappa} \circ d\pi_I \circ \text{Ad}(R) E_i,$$

para todo i . Luego, haciendo los cálculos para cada i , resulta

$$(2.12) \quad d\tilde{R}_{[\gamma_0]}v_1 = v_2, \quad d\tilde{R}_{[\gamma_0]}v_2 = -v_1, \quad d\tilde{R}_{[\gamma_0]}v_3 = v_4 \text{ y } d\tilde{R}_{[\gamma_0]}v_4 = -v_3.$$

Finalmente, por (2.11) y (2.12) se tiene la igualdad de las transformaciones. \square

Por completitud de la exposición, demostramos el siguiente hecho usado en la Observación 2.7.

Lema 2.9. *Sea M una variedad diferenciable y sean g y \bar{g} dos métricas pseudo-riemannianas en M . Si las geodésicas de (M, g) y (M, \bar{g}) coinciden, entonces las conexiones de Levi-Civita asociadas a g y \bar{g} son iguales.*

PRUEBA. Consideremos el tensor D de tipo $(2, 1)$ que en cada par de campos X, Y de M está definido por

$$D(X, Y) = \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y,$$

donde ∇ y $\bar{\nabla}$ son las conexiones de Levi-Civita asociadas a g y \bar{g} respectivamente.

Veamos primero que $D(X, X) = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Para esto es suficiente probar que $D(X, X)(p) = 0$ para cada $p \in M$ en donde $X_p \neq 0$. Sea γ la geodésica en M que pasa por p y tiene velocidad inicial $X_p \neq 0$. Luego $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ es una inmersión y $\dot{\gamma}$ es un campo a lo largo de γ . Por la extensión local de campos a lo largo de una inmersión existirán $\varepsilon > 0$, U entorno de p en M y un campo diferenciable \bar{X} en U con $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$ tal que $\bar{X} \circ \gamma|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} = \dot{\gamma}|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$. Como $D(X, X)(p) = D(\bar{X}, \bar{X})(p)$ y $\nabla_{X_p} \bar{X} = \left. \frac{D\bar{X}}{dt} \right|_0 \bar{X} \circ \gamma(t) = 0$ al igual que con la conexión asociada a \bar{g} , se tiene que $D(X, X)(p) = 0$.

Finalmente, como D es un tensor simétrico, ya que ambas conexiones son sin torsión, por polarización resulta que $D(X, Y) = 0$ para todo par de campos X, Y en M . \square

6. Geodésicas magnéticas espaciales y temporales de \mathcal{L}_κ

Denotamos por γ_v la geodésica en M_κ con velocidad inicial v . Como se vio en la Sección 4, las geodésicas magnéticas tienen rapidez constante, en particular, son *espaciales*, *temporales* o *nulas*.

Definición 2.10. Una superficie reglada en M_κ es una superficie que admite una parametrización de la forma

$$(s, t) \mapsto \gamma_{w(t)}(s),$$

donde $w(t)$ es una curva en T^1M_κ definida en un intervalo abierto I y $s \in \mathbb{R}$.

Recordemos que una curva de \mathcal{L}_κ determina una superficie reglada en M_κ . B. Guilfoyle y W. Klingenberg en [GK05] mostraron que las superficies regladas en \mathbb{R}^3 determinadas por las geodésicas no nulas del espacio de rectas orientadas \mathcal{L}_0 son helicoides en \mathbb{R}^3 .

En esta sección estudiamos las geodésicas magnéticas de tipo espacial y de tipo temporal de \mathcal{L}_κ y las superficies regladas en M_κ asociadas a ellas.

Teorema 2.11. *Sea M_κ una variedad diferenciable completa simplemente conexa de dimensión tres y curvatura seccional constante $\kappa = 0, 1, -1$. Una geodésica magnética genérica σ de \mathcal{L}_κ describe la superficie reglada en M_κ determinada por el campo binormal de una hélice.*

Más precisamente, σ es una geodésica magnética de tipo temporal (de tipo espacial) de \mathcal{L}_κ si y sólo si σ tiene la forma

$$(2.13) \quad \sigma(t) = [\gamma_{B(t)}],$$

donde B es el campo binormal de una hélice h de M_κ de curvatura k , rapidez $1/k$ y torsión positiva (negativa), para algún $k > 0$.

Para el desarrollo de la demostración del teorema, necesitamos ciertos lemas y observaciones que presentamos a continuación.

Observación 2.12. Sea G un grupo de Lie que actúa por isometrías en una variedad N y sea \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Dados $X \in \mathfrak{g}$ y $q \in N$, sea c la curva en N definida por $c(t) = \exp(tX) \cdot q$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $\dim N = 2$, c tiene rapidez y curvatura geodésica constantes y si $\dim N = 3$, la rapidez, curvatura y torsión de la curva c son constantes.

La validez de la observación resulta del hecho que $c(t+t_o) = \exp t_o X \cdot c(t)$ y $\exp t_o X$ es una isometría de N que preserva la orientación, para todo $t_o \in \mathbb{R}$.

Como se vio en (2.6), existe un isomorfismo entre \mathcal{J}_{γ_o} y $T_{[\gamma_o]} \mathcal{L}_\kappa$. En el siguiente lema relacionamos \mathfrak{p}_κ y \mathcal{J}_{γ_o} explícitamente, a través de la matriz A .

Lema 2.13. Sea $Z = Z(x, y) \in \mathfrak{p}_\kappa$.

a) El campo de Jacobi $J(s) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp t(Z + A) \cdot \gamma_o(s)$ en \mathcal{J}_{γ_o} es el único que satisface $J(0) = (0, 0, x)^t$ y $J'(0) = (0, 0, y)^t$.

b) $T_{\gamma_o}(J) = d(\phi \circ \pi)Z$ y su norma es $\|d(\phi \circ \pi)Z\| = \det(x, y)$.

PRUEBA. Para cada κ , consideramos la siguiente parametrización de γ_o :

$$\begin{aligned} \gamma_o(s) &= (1, s, 0, 0), & \text{si } \kappa = 0; \\ \gamma_o(s) &= (\cos s, \sin s, 0, 0), & \text{si } \kappa = 1; \\ \gamma_o(s) &= (\cosh s, \sinh s, 0, 0), & \text{si } \kappa = -1. \end{aligned}$$

Dado $Z = Z(x, y) \in \mathfrak{p}_\kappa$, el campo de Jacobi a lo largo de γ_o definido por $J(s) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp t(Z + A) \cdot \gamma_o(s)$ está en \mathcal{J}_{γ_o} , pues para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\langle J(s), \dot{\gamma}_o(s) \rangle = \langle (Z + A)(\gamma_o(s)), \dot{\gamma}_o(s) \rangle = 0,$$

ya que $(Z + A)(\gamma_o(s))$ es ortogonal a e_0 y e_1 , mientras que $\dot{\gamma}_o(s)$ tiene componentes no nulas sólo en esas dos direcciones.

Se verifica fácilmente que $J(0) = (Z + A)(e_0) = (0, 0, x)^t$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} J'(0) &= \left. \frac{D}{ds} \right|_0 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_0 \exp t(Z + A) \cdot \gamma_o(s) \\ &= \left. \frac{D}{\partial t} \right|_0 \exp t(Z + A)(e_1) = (Z + A)(e_1) = (0, 0, y)^t. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} T_{\gamma_o}(J) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 [\exp t(Z + A) \cdot \gamma_o] = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \phi(\exp t(Z + A)H_\kappa) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \phi(\pi(\exp t(Z + A))) = d\phi \circ d\pi Z, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple pues $A \in \mathfrak{h}_\kappa$. Finalmente, la norma (2.7) de $d(\phi \circ \pi)Z$ es igual a

$$\|d(\phi \circ \pi)Z\| = \langle \dot{\gamma}_o(0) \times J(0), J'(0) \rangle = \det(x, y)$$

y la afirmación del inciso b) queda verificada. \square

Sea $Z(x, y) \in \mathfrak{p}_\kappa$ y sea $h = \text{diag}(R_\kappa(t), B) \in H_\kappa$, donde $B \in SO_2$ y

$$R_\kappa(t) = \begin{pmatrix} c_\kappa(t) & -\kappa s_\kappa(t) \\ s_\kappa(t) & c_\kappa(t) \end{pmatrix}$$

es como en (2.8). Entonces $\text{Ad}(h)Z(x, y) = Z(Bx_t, By_t)$, donde

$$x_t = c_\kappa(t)x - s_\kappa(t)y, \quad y_t = \kappa s_\kappa(t)x + c_\kappa(t)y.$$

Nuevamente aquí, denotamos por ϵ_1 y ϵ_2 a los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^2 .

Lema 2.14. *Sea $Z(x, y) \neq 0$ en \mathfrak{p}_κ .*

a) *Si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^2 , entonces existe $h \in H_\kappa$ tal que $\text{Ad}(h)Z(x, y) = Z(a\epsilon_1, b\epsilon_2)$, con $a > 0$ y $b \neq 0$, para $\kappa = 0, \pm 1$.*

b) *Si $\kappa = 0, 1$ y $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente de \mathbb{R}^2 , entonces existe $h \in H_\kappa$ tal que $\text{Ad}(h)Z(x, y) = Z(0, b\epsilon_2)$, con $b \neq 0$, o bien $\text{Ad}(h)Z(x, y) = Z(a\epsilon_1, 0)$, con $a > 0$. Esto vale para $\kappa = -1$ si además $|x| \neq |y|$.*

c) *Para $\kappa = 1$, existe $h \in H_\kappa$ tal que $\text{Ad}(h)Z(\epsilon_1, 0) = Z(0, \epsilon_2)$.*

PRUEBA. Para probar a) observamos que, como $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente independiente, para $\kappa = 0, \pm 1$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\langle x_t, y_t \rangle = 0$. En efecto, para cada κ , esto es equivalente a que la ecuación

$$\begin{aligned} c_3 - c_2 t &= 0 && \text{si } \kappa = 0; \\ \frac{1}{2}(c_1 - c_2) \sin(2t) + c_3 \cos(2t) &= 0 && \text{si } \kappa = 1; \\ -\frac{1}{2}(c_1 + c_2) \sinh(2t) + c_3 \cosh(2t) &= 0 && \text{si } \kappa = -1 \end{aligned}$$

tenga una solución en los reales, donde $c_1 = \langle x, x \rangle$, $c_2 = \langle y, y \rangle$ y $c_3 = \langle x, y \rangle$. Pero la independencia lineal de x e y determina la existencia de dicha solución en cada caso. Entonces, podemos tomar $B \in SO_2$ tal que $Bx_t = a\epsilon_1$, con $a > 0$ y $By_t = b\epsilon_2$, con $b \neq 0$. Luego, la isometría $h = \text{diag}(R_\kappa(t), B) \in H_\kappa$ satisface $\text{Ad}(h)Z(x, y) = Z(a\epsilon_1, b\epsilon_2)$.

Para la prueba de b), primero supongamos que $x = 0$ o $y = 0$ (pero no ambos nulos pues $Z(x, y) \neq 0$). Sea $B \in SO_2$ tal que $Bx = a\epsilon_1$ con $a > 0$, si $x \neq 0$, y en el caso que $y \neq 0$, sea $B \in SO_2$ tal que $By = b\epsilon_2$, con $b \neq 0$. Entonces podemos tomar $h = \text{diag}(I, B) \in H_\kappa$.

Ahora, sean $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Luego $x = \lambda y$ o $y = \lambda x$, con $\lambda \neq 0$. Supongamos que $y = \lambda x$ (para $x = \lambda y$ el argumento es similar). En los casos $\kappa = 0, 1$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x_t = 0$. En efecto, a partir de las hipótesis y de algunos cálculos, $t \in \mathbb{R}$ se obtiene resolviendo

$$1 - \lambda t = 0, \quad \text{si } \kappa = 0 \quad \text{y} \quad \cos t - \lambda \sin t = 0, \quad \text{si } \kappa = 1.$$

Entonces, tomando $B \in SO_2$ tal que $By_t = b\epsilon_2$ (con $b \neq 0$ ya que $y_t \neq 0$), tenemos que $h = \text{diag}(R_\kappa(t), B) \in H_\kappa$ satisface $\text{Ad}(h)Z(x, y) = Z(0, b\epsilon_2)$.

Para $\kappa = -1$, como en los casos $\kappa = 0, 1$, encontramos $t \in \mathbb{R}$ tal que $x_t = 0$ o bien $y_t = 0$ al resolver

$$\cosh t - \lambda \sinh t = 0, \quad \text{y} \quad -\sinh t + \lambda \cosh t = 0,$$

respectivamente. Pero estas ecuaciones tienen solución si y sólo si $\lambda \neq \pm 1$. Es decir, si y sólo si $|x| \neq |y|$. Con lo cual tomamos $B \in SO_2$ tal que $By_t = b\epsilon_2$ o bien $Bx_t = a\epsilon_1$ (con $a > 0$; aquí de nuevo tenemos que $x_t \neq 0$), según corresponda. Entonces $h = \text{diag}(R_{-1}(t), B) \in H_{-1}$ es la isometría buscada en este caso.

Para la parte c), observamos que $h = \text{diag}(R_1(\pi/2), B) \in H_1$, donde $B \in SO_2$ lleva ϵ_1 a ϵ_2 , satisface $\text{Ad}(h)Z(\epsilon_1, 0) = Z(0, \epsilon_2)$. \square

Observación 2.15. El lema anterior se corresponde, geoméricamente, con el hecho de encontrar un $s \in \mathbb{R}$ en el cual el campo de Jacobi asociado a $Z(x, y)$ (dado por el Lema 2.13) y su derivada covariante son ortogonales.

Recordemos que si h es una curva regular en M_κ de rapidez constante a , entonces el aparato de Frenet de h es

$$(2.14) \quad T(t) = \frac{1}{a} \dot{h}(t), \quad N(t) = \dot{h}'(t) / \|\dot{h}'(t)\|, \quad B(t) = T(t) \times N(t),$$

(aquí la prima denota derivada covariante a lo largo de h), y su curvatura y torsión están dadas por

$$(2.15) \quad k(t) = \frac{1}{a^2} \|\dot{h}'(t)\|, \quad \tau(t) = -\frac{1}{a} \langle B'(t), N(t) \rangle,$$

respectivamente.

Por otro lado, como la derivada covariante en \mathbb{R}^4 coincide con la derivada usual de \mathbb{R}^4 y además M_κ es una subvariedad de \mathbb{R}^4 , si β es una curva en M_κ , se tiene que

$$\frac{D}{dt} \dot{\beta}(t) = \left[\frac{d}{dt} \dot{\beta}(t) \right]^T,$$

donde T denota la proyección ortogonal sobre TM_κ , para cada κ .

Para cada $g \in G_\kappa$ se tiene que g es una isometría de \mathcal{L}_κ y preserva la estructura de Kähler. Con lo cual, lleva geodésicas magnéticas en geodésicas magnéticas.

PRUEBA DEL TEOREMA 2.11. Sea $Z \in \mathfrak{p}_\kappa$ la velocidad inicial de σ , con $\|Z\| \neq 0$. Primero, consideremos el caso $Z = Z(a\epsilon_1, b\epsilon_2)$, con $a > 0$ y $b \neq 0$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea $\alpha(t) = \exp t(Z + A)$. Por Teorema 2.6 y el difeomorfismo ϕ en (2.9), sabemos que $\sigma(t) = \alpha(t) \cdot [\gamma_o]$, es decir, $\sigma(t) = [\alpha(t) \cdot \gamma_o]$.

Sea h la curva en M_κ dada por $h(t) = \alpha(t)(e_0)$. Como α es un subgrupo monoparamétrico de isometrías de M_κ , tenemos que h es una curva de curvatura y torsión constantes, con lo cual h es una hélice en M_κ .

Veamos que $\sigma(t) = [\gamma_{B(t)}]$, donde $B(t)$ es el campo binormal de h . Para cada $t \in \mathbb{R}$, la velocidad inicial de la geodésica $\alpha(t) \cdot \gamma_o$ es $d(\alpha(t))(e_1)$, por lo cual $\sigma(t) = [\gamma_{d(\alpha(t))(e_1)}]$. Entonces, tenemos que verificar que $B(t) = d(\alpha(t))(e_1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\alpha(t)$ es una isometría que preserva la hélice y lleva el marco de Frenet en $t = 0$ al marco de Frenet en t , es suficiente mostrar que $B(0) = e_1$.

Por las identificaciones usuales, como $\alpha(t)$ es una transformación lineal, podemos escribir $d(\alpha(t))(e_1) = \alpha(t)(e_1)$, luego

$$\dot{h}(t) = \alpha(t)((Z + A)e_0) \quad \text{y} \quad \dot{h}'(t) = [\alpha(t)((Z + A)^2 e_0)]^T,$$

donde T denota la proyección tangente. Evaluando en $t = 0$,

$$\dot{h}(0) = (Z + A)e_0 = ae_2,$$

$$\dot{h}'(0) = [(Z + A)^2 e_0]^T = [-\kappa a^2 e_0 + ae_3]^T = ae_3$$

y como $\alpha(t)$ es una isometría, se tiene que $|\dot{h}(t)| = a$ para todo t . Por los cálculos anteriores y (2.14) obtenemos que

$$B(0) = \frac{1}{a^2} \dot{h}(0) \times \dot{h}'(0) = e_1.$$

En consecuencia, $B(t) = \alpha(t)(e_1)$. Entonces $B'(t) = [\alpha(t)((Z + A)e_1)]^T$ y $B'(0) = be_3$. Además, usando (2.14) y los cálculos previos, se sigue que $N(0) = e_3$. Con lo cual, por (2.15) la curvatura y la torsión de h son iguales a

$$(2.16) \quad k = 1/a, \quad \tau = -b/a.$$

La afirmación sobre el signo de la torsión es inmediata a partir del Lema 2.13 b) y (2.16). Luego, el teorema queda probado en este caso particular.

Ahora, sea σ una geodésica magnética con $\sigma(0) = [\gamma]$ y velocidad inicial de norma no nula. Como G_κ actúa transitivamente sobre \mathcal{L}_κ , existe una isometría g tal que $g \cdot [\gamma] = [\gamma_o]$. Por lo cual, la geodésica magnética $g \cdot \sigma$ también tiene velocidad inicial de norma no nula y $g \cdot \sigma(0) = [\gamma_o]$. Por Lema 2.13 b), si $d(\phi \circ \pi)Z(x, y)$ es la velocidad inicial de $g \cdot \sigma$, tenemos que los vectores $\{x, y\}$ son linealmente independientes. Luego, por Lema 2.14 a), existe $h \in H_\kappa$ tal que $\text{Ad}(h)Z(x, y) = Z(a\epsilon_1, b\epsilon_2)$, con $a > 0$ y $b \neq 0$. Como

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 (h \circ g) \cdot \sigma(t) = d(\phi \circ \pi)(\text{Ad}(h)Z(x, y)),$$

la curva $(h \circ g) \cdot \sigma$ es una geodésica magnética del tipo estudiado arriba. Por lo tanto, σ tiene la forma (2.13).

Recíprocamente, sea h una hélice en M_κ de curvatura $k > 0$, torsión no nula τ y rapidez $1/k$. Sea $\{T, B, N\}$ el marco de Frenet de h . Al ser M_κ una variedad simplemente

conexa de curvatura constante, existe una isometría g de M_κ que preserva la orientación tal que $g(h(0)) = e_0$ y su diferencial en $h(0)$ lleva $B(0)$ a e_1 , $T(0)$ a e_2 y $N(0)$ a e_3 .

Sea $a = 1/k$ y $b = -\tau/k$. Tomemos, además, $Z = Z(a\epsilon_1, b\epsilon_2) \in \mathfrak{p}_\kappa$. Consideramos, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t) = \exp t(Z + A)$. Según los cálculos de la primera parte de la prueba, ambas hélices tienen posición inicial e_0 , curvatura k , torsión τ , rapidez $1/k$ y el mismo marco de Frenet en $t = 0$. Con lo cual $(g \circ h)(t) = \alpha(t)(e_0)$. Entonces, si llamamos \bar{B} al campo binormal de $g \circ h$, tenemos que $\bar{B}(t) = d(\alpha(t))e_1$, para todo t . Finalmente, como la curva $[\gamma_{\bar{B}(t)}]$ es una geodésica magnética en \mathcal{L}_κ y

$$[\gamma_{B(t)}] = [\gamma_{dg^{-1}\bar{B}(t)}] = g^{-1} \cdot [\gamma_{\bar{B}(t)}],$$

resulta que $[\gamma_{B(t)}]$ también lo es. \square

7. El borde asintótico del espacio hiperbólico y la distribución horosférica

Para estudiar las geodésicas nulas en \mathcal{L}_{-1} recordamos el concepto de borde imaginario del espacio hiperbólico y estudiamos la distribución horosférica en \mathcal{L}_{-1} y sus propiedades. La teoría de la primera parte de esta sección, y que presentamos sin demostración, fue extraída de [Ebe96].

Para simplificar la notación, en lo que sigue omitiremos el subíndice -1 cuando hablemos del espacio de geodésicas y del grupo de isometrías del espacio hiperbólico.

Definición 2.16. Dos geodésicas de rapidez unitaria γ y σ de \mathbb{H}^3 son asintóticas si existe una constante positiva C tal que $d(\gamma(s), \sigma(s)) \leq C$ para todo $s \geq 0$. Dos vectores unitarios $v, w \in T^1\mathbb{H}^3$ son asintóticos si sus correspondientes geodésicas γ_v y γ_w tienen esa propiedad.

La relación de asintoticidad es una relación de equivalencia en el conjunto de geodésicas de rapidez unitaria de \mathbb{H}^3 o en $T^1\mathbb{H}^3$.

Definición 2.17. Un punto en el infinito de \mathbb{H}^3 es una clase de equivalencia de geodésicas asintóticas de \mathbb{H}^3 .

El conjunto de todos los puntos en el infinito de \mathbb{H}^3 es denotado por $\mathbb{H}^3(\infty)$ y se denomina *borde asintótico de \mathbb{H}^3* . La clase de equivalencia de una geodésica γ es

denotada por $\gamma(\infty)$, y la clase de equivalencia de la geodésica orientada en forma opuesta a γ es denotada por $\gamma(-\infty)$.

Para cada $p \in \mathbb{H}^3$, sea $F_p : T_p^1\mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3(\infty)$ la aplicación dada por $F_p(v) = \gamma_v(\infty)$. Como F_p es una biyección, le damos a $\mathbb{H}^3(\infty)$ la topología copiada de $T_p^1\mathbb{H}^3$. Esta topología no depende del punto elegido en \mathbb{H}^3 . Además, como \mathbb{H}^3 es un espacio simétrico no compacto de rango 1 las estructuras diferenciables en $\mathbb{H}^3(\infty)$ inducidas por F_p no dependen de p . Es decir, $\mathbb{H}^3(\infty)$ admite una estructura diferenciable bien definida de esta manera.

Observación 2.18. Si g es una isometría de \mathbb{H}^3 , entonces g se extiende a un difeomorfismo de $\mathbb{H}^3(\infty)$: dado un punto $x \in \mathbb{H}^3(\infty)$ y una geodésica γ tal que $\gamma(\infty) = x$ se define $g(x)$ como la clase de asintoticidad de la geodésica $g \circ \gamma$. Como g preserva la distancia se tiene que la extensión asintótica de g está bien definida.

Proposición 2.19. *Sea γ una geodésica de \mathbb{H}^3 . Entonces para cada $p \in \mathbb{H}^3$ existe una única geodésica de rapidez unitaria α de \mathbb{H}^3 tal que $\alpha(0) = p$ y α es asintótica a γ .*

Si p es cualquier punto de \mathbb{H}^3 y v es cualquier vector unitario en el tangente de \mathbb{H}^3 , entonces $v(p)$ denota al único vector unitario en p que es asintótico a v .

Definición 2.20. Sea $v \in T^1\mathbb{H}^3$. La función de Busemann $f_v : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se define por

$$f_v(p) = \lim_{s \rightarrow +\infty} d(p, \gamma_v(s)) - s.$$

Listamos ciertas propiedades básicas de esta función.

Proposición 2.21. *Sea $v \in T^1\mathbb{H}^3$ y sea f_v su correspondiente función de Busemann.*

Entonces:

- a) f_v es una función C^∞ y convexa en \mathbb{H}^3 .
- b) $\text{grad } f_v(p) = -v(p)$.
- c) Si $w = v(p)$ para cierto $p \in \mathbb{H}^3$, entonces $f_v - f_w$ es una función constante en \mathbb{H}^3 .

Definición 2.22. Dado $v \in T_p^1\mathbb{H}^3$ se define

$$H(v) = \{q \in \mathbb{H}^3 : f_v(q) = 0\}.$$

Diremos que $H(v)$ es la *horosfera* determinada por v .

Geoméricamente, la horosfera $H(v)$ es el límite de esferas métricas $\{S_n\}$ en \mathbb{H}^3 que pasan por el punto pie de v cuando los centros $\{p_n\}$ de $\{S_n\}$ convergen a $x = \gamma_v(\infty)$.

Definición 2.23. Un campo de Jacobi Y a lo largo de una geodésica γ de \mathbb{H}^3 se dice *estable* (*inestable*) si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|Y(s)\| \leq c \quad \forall s \geq 0 \quad (\forall s \leq 0).$$

Los campos de Jacobi estables e inestables a lo largo de una geodésica γ están relacionados con las horosferas $H(v)$ y $H(-v)$, donde $v = \dot{\gamma}(0)$.

Proposición 2.24. Sea $v \in T_p^1\mathbb{H}^3$ un vector tangente unitario. Si $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T^1\mathbb{H}^3$ es una curva C^1 tal que $z(0) = v$ y los vectores $z(t)$ (respectivamente, $-z(t)$) son asintóticos para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces el campo de Jacobi a lo largo de γ_v determinado por la variación de geodésicas $(s, t) \mapsto \gamma_{z(t)}(s)$ es estable (respectivamente, inestable). Recíprocamente, todo campo de Jacobi a lo largo de γ_v estable (respectivamente, inestable) es de esta forma.

Los campos de Jacobi ortogonales a $\dot{\gamma}_o$ son de la forma

$$(2.17) \quad J(s) = e^s U(s) + e^{-s} V(s),$$

donde U y V son campos paralelos a lo largo de γ_o y ortogonales a $\dot{\gamma}_o$.

En lo que sigue, denotamos por $\hat{\pi}$ a la proyección canónica de $T\mathbb{H}^3$ sobre \mathbb{H}^3 .

Sean $\psi^\pm : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{H}^3(\infty)$ las funciones suaves definidas por $\psi^\pm[\gamma] = \gamma(\pm\infty)$ y sean \mathcal{D}^\pm las distribuciones en \mathcal{L} dadas por $\mathcal{D}_{[\gamma]}^\pm = \text{Ker}(d\psi_{[\gamma]}^\pm)$.

Necesitamos relacionar las distribuciones \mathcal{D}^\pm con distribuciones $\bar{\mathcal{E}}^\pm$ y \mathcal{E}^\pm en G y $T^1\mathbb{H}^3$, respectivamente.

Sean $\bar{\mathcal{E}}^\pm$ las distribuciones en G invariantes a izquierda que en $I \in G$ están definidas por

$$\bar{\mathcal{E}}_I^\pm = \{Z(u, \mp u) \in \mathfrak{p} \mid u \in \mathbb{R}^2\}.$$

Como la acción canónica de G en $T^1\mathbb{H}^3$ es transitiva, la proyección $\bar{p} : G \rightarrow T^1\mathbb{H}^3$ dada por $\bar{p}(g) = dg_{e_0}e_1$ es una submersión. Como dado $v \in T^1\mathbb{H}^3$ existe $g \in G$ tal que $\bar{p}(g) = v$, definimos:

$$\mathcal{E}^\pm(v) = (d\bar{p}\bar{\mathcal{E}}^\pm)(\bar{p}(g)) = d\bar{p}_g(\bar{\mathcal{E}}_g^\pm).$$

Se tiene que \mathcal{E}^\pm determinan distribuciones bien definidas en $T^1\mathbb{H}^3$ que se denominan *distribuciones horosféricas* en $T^1\mathbb{H}^3$. Estas distribuciones tienen la siguiente propiedad: si $t \mapsto v(t)$ es una curva en $T^1\mathbb{H}^3$ que es tangente a la distribución \mathcal{E}^\pm entonces $\hat{\pi}(v(t))$ está en una horosfera.

Lema 2.25. *Sea $Z \in \bar{\mathcal{E}}_I^\pm$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea $\gamma_t^\pm(s) = \exp t(Z + A) \cdot \gamma_o(\pm s)$. Entonces las geodésicas γ_t^\pm son asintóticas entre sí para todo $t \in \mathbb{R}$.*

PRUEBA. Sea J el campo de Jacobi asociado a la variación por geodésicas $t \mapsto \gamma_t^\pm$. Por el Lema 2.13, $J(0) = -J'(0)$. Con lo cual, por (2.17) se tiene que $J(s) = e^{-s}U(s)$, donde U es un campo paralelo a lo largo de γ_o y ortogonal a $\dot{\gamma}_o$. Luego, J será un campo estable. Es decir, existirá $c > 0$ tal que $\|J(s)\| \leq c \forall s \geq 0$.

Debemos probar que dados $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ con $t_0 < t_1$, existe $N > 0$ tal que

$$d(\gamma_{t_0}^\pm(s), \gamma_{t_1}^\pm(s)) \leq N \quad \forall s \geq 0.$$

Por definición de distancia, tenemos que para s fijo,

$$d(\gamma_{t_0}^\pm(s), \gamma_{t_1}^\pm(s)) \leq \text{long}([t_0, t_1] \ni t \mapsto \gamma_t^\pm(s)) = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d}{dt} \gamma_t^\pm(s) \right\| dt.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea $J_t(s) = \frac{d}{dt} \gamma_t^\pm(s)$. Observemos que, para $t \neq t'$, $J_{t'+t}(s) = d(\exp t'Z) J_t(s)$ y como $\exp t'Z$ es una isometría tenemos que $\|J_t(s)\| = \|J(s)\|$. Luego,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|J_t(s)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|J(s)\| dt \leq c(t_1 - t_0)$$

para todo $s \geq 0$. Con lo cual, existe $N = c(t_1 - t_0) > 0$ que acota la distancia entre $\gamma_{t_0}^\pm(s)$ y $\gamma_{t_1}^\pm(s)$ para todo $s \geq 0$. Por lo tanto, $\gamma_{t_0}^\pm$ y $\gamma_{t_1}^\pm$ son asintóticas, como queríamos probar. \square

Consideramos la proyección $p : T^1\mathbb{H}^3 \rightarrow \mathcal{L}$, $p(v) = [\gamma_v]$. Sea $\bar{\mathcal{D}}^\pm$ la distribución en \mathcal{L} p -relacionada con \mathcal{E}^\pm (bien definida). Más específicamente, dada $[\gamma] \in \mathcal{L}$ y $v \in T^1\mathbb{H}^3$ tal que $p(v) = [\gamma]$ (existe $v \in T^1\mathbb{H}^3$ por Proposición 2.19),

$$\bar{\mathcal{D}}^\pm([\gamma]) = dp_v \mathcal{E}_v^\pm.$$

Recordemos que $\bar{p} : G \rightarrow T^1\mathbb{H}^3$ está definida por $\bar{p}(g) = dg_{e_0}e_1$ y observemos que $\bar{p}(I) = (e_0, e_1)$ y $p(e_0, e_1) = [\gamma_o]$. Omitiremos, para abreviar, el punto pie de los vectores tangentes de \mathbb{H}^3 y escribiremos e_1 en lugar de (e_0, e_1) .

Queremos verificar que $\mathcal{D}^\pm = \bar{\mathcal{D}}^\pm$. Un primer paso es la siguiente proposición.

Proposición 2.26. *Sean \mathcal{D}^\pm la distribuciones en \mathcal{L} definidas anteriormente. Entonces $\mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm = dp_{e_1}(\mathcal{E}_{e_1}^\pm)$.*

PRUEBA. Sea $Z \in \bar{\mathcal{E}}_I^\pm$. Consideramos la curva en \mathcal{L} dada por $\alpha(t) = \exp tZ \cdot [\gamma_o]$. Como $\alpha(t) = p \circ \bar{p}(\exp tZ)$, tenemos que $\alpha(0) = [\gamma_o]$ y $\dot{\alpha}(0) = d(p \circ \bar{p})_I Z$. Es decir, $\dot{\alpha}(0) \in dp_{e_1}(\mathcal{E}_{e_1}^\pm)$. Además,

$$(2.18) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp tZ \cdot \gamma_o(s) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp t(Z + A) \cdot \gamma_o(s),$$

pues ambos campos de Jacobi tienen las mismas condiciones iniciales. Luego, el Lema 2.25 puede aplicarse a las geodésicas $\gamma_t^\pm(s) = \exp tZ \cdot \gamma_o(\pm s)$. Con lo cual, $\psi^\pm \circ \alpha$ es constante. Entonces $(d\psi^\pm)_{[\gamma_o]}(\dot{\alpha}(0)) = 0$, es decir, $\dot{\alpha}(0) \in \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$.

Por otro lado, sea $\varphi : T_{e_0}^1\mathbb{H}^3 \rightarrow \mathcal{L}$, $\varphi(v) = [\gamma_v]$, la subvariedad cuya imagen \mathcal{L}_{e_0} consiste de todas las geodésicas orientadas en \mathbb{H}^3 que pasan por e_0 . Además, $\mathbb{H}^3(\infty)$ es una variedad con la estructura diferenciable (bien definida) tal que $F_{e_0} : T_{e_0}^1\mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3(\infty)$ dada por $F_{e_0}(v) = \gamma_v(\infty)$ es un difeomorfismo. Luego, como $\psi^+|_{\mathcal{L}_{e_0}} \circ \varphi = F_{e_0}$, tenemos que $(d\psi^+)_{[\gamma_o]}$ es suryectiva. Ahora, $(d\psi^-)_{[\gamma_o]}$ es también suryectiva pues ψ^- es la composición de ψ^+ con el difeomorfismo de \mathcal{L} dado por $[\gamma] \mapsto [\gamma^{-1}]$. Finalmente, como $\dim \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm = \dim \bar{\mathcal{D}}_{[\gamma_o]}^\pm$, se tiene la igualdad. \square

Proposición 2.27. *Las distribuciones \mathcal{D}^\pm y $\bar{\mathcal{D}}^\pm$ son G -invariantes.*

PRUEBA. Como la acción de G en \mathcal{L} es transitiva, para probar la proposición basta con verificar lo siguiente: dadas $[\gamma_o]$ y $[\gamma]$ en \mathcal{L} , si g es una isometría de \mathcal{L} tal que

$g \cdot [\gamma_o] = [\gamma]$ entonces

$$(2.19) \quad dg_{[\gamma_o]} \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm = \mathcal{D}_{[\gamma]}^\pm$$

y

$$(2.20) \quad dg_{[\gamma_o]} \bar{\mathcal{D}}_{[\gamma_o]}^\pm = \bar{\mathcal{D}}_{[\gamma]}^\pm,$$

Comencemos verificando (2.19). Para ello observemos que si $v \in \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$, por Proposición 2.26 existe $Z \in \bar{\mathcal{E}}_I^\pm$ tal que $v = d(p \circ \bar{p})_I Z$. Por el Lema 2.25 y (2.18) se tiene que las geodésicas $\gamma_t = \exp tZ \cdot \gamma_o$ o bien las geodésicas orientadas en forma opuesta a las γ_t son asintóticas para todo t . Como g es isometría de \mathbb{H}^3 , las curvas $g \cdot \gamma_t$ o las orientadas en forma opuesta a ellas también son geodésicas asintóticas para todo t . Con lo cual $\psi^\pm([g \cdot \gamma_t])$ es constante para todo t . Esto implica que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \psi^\pm([g \cdot \gamma_t]) = 0$$

y como $\left. \frac{d}{dt} \right|_0 [\gamma_t] = v$ se tiene que

$$d\psi^\pm(dg_{[\gamma_o]}v) = 0.$$

Es decir, $dg_{[\gamma_o]}v \in \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$. Con lo cual $dg_{[\gamma_o]} \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$ está contenido en $\mathcal{D}_{[\gamma]}^\pm$. Como $\mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$ y $\mathcal{D}_{[\gamma]}^\pm$ tienen la misma dimensión y $dg_{[\gamma_o]}$ es un isomorfismo, se tiene la validez de (2.19).

Para probar (2.20), consideramos, para cada $h \in G$, la aplicación $\mu_h : T^1\mathbb{H}^3 \rightarrow T^1\mathbb{H}^3$ dada por $\mu_h(w) = dh_{\bar{\pi}(w)}w$ y probemos las siguientes identidades:

1. $\bar{p} \circ l_h = \mu_h \circ \bar{p}$;
2. $p \circ \mu_h = h \circ p$,

donde l_h es la multiplicación a izquierda por h de G . Comencemos tomando $k \in G$, luego

$$\begin{aligned} \bar{p} \circ l_h(k) &= \bar{p}(hk) = d(hk)_{e_0} e_1 = (dh)_{k(e_0)}(dk)_{e_0} e_1 = \\ &= (dh)_{k(e_0)} \bar{p}(k) = \mu_h(\bar{p}(k)) = \mu_h \circ \bar{p}(k). \end{aligned}$$

Con esto se ve la primera identidad. Tomemos ahora $v \in T^1\mathbb{H}^3$, entonces

$$p \circ \mu_h(v) = p(h \cdot v) = [\gamma_{h \cdot v}] = [h \cdot \gamma_v] = h \cdot [\gamma_v] = h \circ p(v),$$

con lo cual se tiene la identidad 2.

Finalmente, como $g \cdot [\gamma_o] = [\gamma]$ se tiene $[\gamma] = p(g \cdot e_1)$, por lo que

$$\bar{\mathcal{D}}_{[\gamma]}^\pm = (dp)_{g \cdot e_1} d\bar{p}_g \bar{\mathcal{E}}_g^\pm = (dp)_{g \cdot e_1} d\bar{p}_g (dl_g)_I \bar{\mathcal{E}}_I^\pm,$$

ya que $\bar{\mathcal{E}}^\pm$ es invariante a izquierda. Usando la primera identidad, y luego la segunda, la última expresión es igual a

$$(dp)_{g \cdot e_1} (d\mu_g)_{e_1} (d\bar{p})_I \bar{\mathcal{E}}_I^\pm = (dg)_{[\gamma_o]} (dp)_{e_1} (d\bar{p})_I \bar{\mathcal{E}}_I^\pm = (dg)_{[\gamma_o]} \bar{\mathcal{D}}_{[\gamma_o]}^\pm,$$

como queríamos probar. \square

De las Proposiciones 2.26 y 2.27 se tiene lo siguiente:

Proposición 2.28. *Sean \mathcal{D}^\pm y $\bar{\mathcal{D}}^\pm$ las distribuciones en \mathcal{L} definidas anteriormente. Entonces $\mathcal{D}^\pm = \bar{\mathcal{D}}^\pm$.*

A las distribuciones \mathcal{D}^\pm las llamaremos *distribuciones horosféricas en \mathcal{L}* .

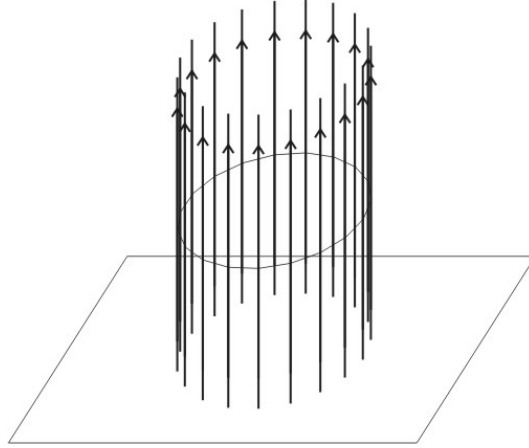
8. Geodésicas magnéticas nulas de \mathcal{L}_κ

Para la descripción de las superficies regladas determinadas por geodésicas magnéticas nulas de la variedad de geodésicas orientadas del espacio hiperbólico es necesario introducir la noción de cono con vértice en el infinito.

Aquí, como en la sección anterior, omitimos el subíndice -1 al referirnos a la variedad de geodésicas orientadas del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 .

Conos con vértices en el infinito: Sea $x \in \mathbb{H}^3(\infty)$ y sea $v_o \in T^1\mathbb{H}^3$ tal que $\gamma_{v_o}(\pm\infty) \in x$. Sea $t \mapsto v(t)$ una curva en $T^1\mathbb{H}^3$ tal que $v(0) = \pm v_o$, $v(t)$ es asintótico a $\pm v_o$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y los puntos pies de $v(t)$ recorren una circunferencia de curvatura geodésica $\pm k$ (con $k > 0$) y rapidez $1/k$ en la horosfera determinada por $\pm v_o$. Bajo estas condiciones decimos que la curva en \mathcal{L} dada por $t \mapsto [\gamma_{\pm v(t)}]$ describe un *cono con vértice delantero en x (para $+$)* o un *cono con vértice trasero en x (para $-$)*.

Estos conos pueden visualizarse mejor en el modelo del semi-espacio superior de \mathbb{H}^3 (en particular $\mathbb{H}^3(\infty) = \{z = 0\} \cup \{\infty\}$): Sea $\gamma_t^\pm(s) = (\frac{1}{k} \cos(t), \pm \frac{1}{k} \sin(t), e^{\pm s})$. Una curva σ en \mathcal{L} describe un cono con vértice delantero (respectivamente, trasero) en ∞ si es $Sl(2, \mathbb{C})$ -congruente a $t \mapsto [\gamma_t^+]$ (respectivamente, a $t \mapsto [\gamma_t^-]$).



Para el caso de las geodésicas nulas del espacio de rectas orientadas de \mathbb{R}^3 , B. Guilfoyle y W. Klingenberg encontraron que las superficies regladas de \mathbb{R}^3 asociadas a tales curvas son planos (ver [GK05]).

A continuación caracterizamos las superficies regladas determinadas por las geodésicas magnéticas nulas en \mathcal{L}_κ .

Teorema 2.29. *Sea \mathbb{H}^3 el espacio hiperbólico y sea \mathcal{D}^\pm la distribución horosférica en \mathcal{L} . Una geodésica magnética nula de \mathcal{L} describe en \mathbb{H}^3 un cilindro, un cono con vértice en $p \in \mathbb{H}^3$ o un cono con vértice en el infinito.*

Más precisamente, si σ es una curva de \mathcal{L} , entonces

- a) σ es una geodésica magnética nula con $\dot{\sigma}(0) \in \mathcal{D}_{\sigma(0)}^\pm$ si y sólo si σ describe un cono con vértice en $\sigma(0)(\pm\infty)$;
- b) σ es una geodésica magnética nula con $\dot{\sigma}(0) \notin \mathcal{D}_{\sigma(0)}^\pm$ si y sólo si σ es de la forma

$$(2.21) \quad \sigma(t) = [\gamma_{B(t)}],$$

donde B es el campo binormal de una hélice h de \mathbb{H}^3 de curvatura $k > 0$, rapidez $1/k$ y torsión cero (en particular, h está contenida en una superficie totalmente geodésica S y B es normal a S y paralelo a lo largo de h), o es de la forma

$$(2.22) \quad \sigma(t) = [\gamma_{v(t)}],$$

donde v es una curva de curvatura geodésica constante $k > 0$ y rapidez $1/k$ en $T_p^1\mathbb{H}^3$, para algún $p \in \mathbb{H}^3$, para cierto $k > 0$.

Teorema 2.30. *Las superficies regladas asociadas a geodésicas magnéticas nulas de \mathcal{L}_κ para $\kappa = 0, 1$ se describen de manera análoga al teorema previo, excepto que el caso a) es vacío. Además, para $\kappa = 1$, una geodésica magnética nula tiene simultáneamente las formas (2.21) y (2.22).*

La palabra *cilindro* en el enunciado del Teorema 2.29 se refiere a la superficie reglada determinada por un campo paralelo a lo largo de una curva c de curvatura geodésica constante k contenida en una superficie totalmente geodésica en M_κ (y normal a ella), como se explicó. Para $\kappa = -1$, esta superficie reglada es difeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}$ si $|k| > 1$; en caso contrario es difeomorfa a un plano.

PRUEBA DEL TEOREMA 2.29 a). Por el Lema 2.13 b), tenemos que todo elemento de $\mathcal{D}_{[\gamma]}^\pm$ es nulo. Como G actúa transitivamente sobre \mathcal{L} y por la G -invariancia de las distribuciones horosféricas, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma(0) = [\gamma_o]$, con lo cual $\dot{\sigma}(0) \in \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$. Por la Proposición 2.26, existe $Z \in \bar{\mathcal{E}}_I^\pm$ tal que $\dot{\sigma}(0) = (dp)_{e_1}(d\bar{p})_I Z$. Luego, por el Teorema 2.6, $\sigma(t) = [\exp t(Z + A) \cdot \gamma_o]$.

Asumimos que $Z \in \bar{\mathcal{E}}_I^+$. Mostremos que σ describe un cono con vértice delantero en $\gamma_o(+\infty)$. De manera similar se prueba que si $Z \in \bar{\mathcal{E}}_I^-$, entonces σ describe un cono con vértice trasero en $\gamma_o(-\infty)$.

Consideramos las geodésicas $\gamma_t(s) = \exp t(Z + A) \cdot \gamma_o(s)$ de \mathbb{H}^3 . Como $Z \in \bar{\mathcal{E}}_I^+$, por el Lema 2.25, tenemos que las geodésicas γ_t son asintóticas entre sí para todo t . Luego, $v(t) = \dot{\gamma}_t(0)$ es una curva en $T^1\mathbb{H}^3$ de vectores asintóticos a e_1 .

Sea $c(t) = \hat{\pi}(v(t)) = \exp t(Z + A)(e_0)$. Para ver que $c(t) \in H(e_1)$ para todo t , observamos que

$$(2.23) \quad \frac{d}{dt} f_{e_1}(c(t)) = (df_{e_1})_{c(t)} \dot{c}(t) = \langle \text{grad}_{c(t)}(f_{e_1}), \dot{c}(t) \rangle.$$

Como $\text{grad}_p(f_v) = -v(p)$ tenemos que

$$\text{grad}_{c(t)}(f_{e_1}) = -v(t) = -d(\exp t(Z + A))e_1.$$

Por otro lado,

$$\dot{c}(t) = d(\exp t(Z + A))(Z + A)e_0.$$

Como $\exp t(Z+A)$ es una isometría y observando que $(Z+A)e_0$ y e_1 son perpendiculares ($Z \in \bar{\mathcal{E}}_I^+$), se sigue que la expresión en (2.23) es igual a $-\langle e_1, (Z+A)(e_0) \rangle = 0$. Entonces, $f_{e_1}(c(t)) = f_{e_1}(e_0) = 0$ para todo t , es decir, $c(t) \in H(e_1)$ para todo t .

Ahora, como c es la órbita por e_0 de un subgrupo monoparamétrico de isometrías de G que preservan $H(e_1)$, su curvatura geodésica y rapidez son constantes. Si $Z = Z(u, -u)$ para cierto $0 \neq u \in \mathbb{R}^2$, obtenemos que la rapidez de c es $|u|$. Para cada $v \in T^1\mathbb{H}^3$ consideramos en $H(v)$ la orientación dada por $-\text{grad } f_v$. La curvatura geodésica de c es entonces

$$k = \langle -\text{grad}_{e_0}(f_{e_1}), \dot{c}(0) \times \dot{c}'(0) \rangle / |u|^3 = 1/|u|,$$

pues $\dot{c}(0) = (Z+A)e_0$ y $\dot{c}'(0) = ((Z+A)^2 e_0)^T$. Como para cada $v \in T^1\mathbb{H}^3$, $H(v)$, con la métrica inducida de \mathbb{H}^3 , es isométrico a \mathbb{R}^2 , tenemos que $c(t)$ recorre una circunferencia en $H(e_1)$ de curvatura geodésica $k = 1/|u| > 0$ y rapidez $1/k = |u|$.

Además, $\sigma(t) = [\gamma_{v(t)}]$. Así, se satisfacen todas las condiciones para asegurar que σ describe un cono con vértice en $\gamma_o(+\infty)$.

Recíprocamente, sea σ una curva en \mathcal{L} que describe un cono con vértice delantero en el infinito. Como G actúa transitivamente sobre el fibrado de marcos positivamente orientados y cada elemento de G lleva horosferas en horosferas, preservando su orientación, podemos suponer que $\sigma(t) = [\gamma_{v(t)}]$, donde $v(t)$ es una curva en $T^1\mathbb{H}^3$ de vectores asintóticos a $v(0) = e_1$ y $c(t) = \hat{\pi}(v(t))$ es una curva de curvatura geodésica k y rapidez $1/k$ en $H(e_1)$ con $\dot{c}(0) = \frac{1}{k}e_2$, para algún $k > 0$. Sea $Z = Z(\frac{1}{k}e_1, -\frac{1}{k}e_1) \in \bar{\mathcal{E}}_I^+$. Definimos

$$\bar{c}(t) = \exp t(Z+A)(e_0) \quad \text{y} \quad \bar{v}(t) = d(\exp t(Z+A))(e_1).$$

Arriba mostramos que $\bar{c}(t)$ es una curva de curvatura geodésica k y rapidez $\frac{1}{k}$ en $H(e_1)$. Más aún, $\bar{c}(0) = e_0$ y la velocidad inicial de \bar{c} es $\frac{1}{k}e_2$. Así, obtenemos que $\bar{c} = c$. Y como $\hat{\pi} \circ \bar{v} = \bar{c}$ y $\hat{\pi} \circ v = c$, entonces $\hat{\pi} \circ \bar{v} = \hat{\pi} \circ v$.

De acuerdo a lo probado en la primera parte de la demostración, \bar{v} y v son curvas de vectores asintóticos a e_1 . Con lo cual, $-\bar{v}(t) = \text{grad}_{\bar{c}(t)}(f_{e_1}) = -v(t)$. Por lo tanto, $[\gamma_{v(t)}]$ es una geodésica magnética nula con velocidad inicial en la distribución horosférica ya que $[\gamma_{v(t)}] = [\gamma_{\bar{v}(t)}] = [\exp t(Z+A) \cdot \gamma_o]$. \square

PRUEBA DEL TEOREMA 2.29 b). Primero supongamos que σ es una geodésica magnética nula tal que $\sigma(0) = [\gamma_o]$ y $\dot{\sigma}(0) = d(\phi \circ \pi)Z(a\epsilon_1, 0) \notin \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$, con $a > 0$. La expresión (2.21) y la relación entre la rapidez y la curvatura de h se obtienen de manera análoga a la de la prueba del Teorema 2.11. Por (2.16) sabemos que la torsión de h es $\tau = -b/a = 0$ (pues $b = 0$). Con lo cual, h está contenida en una superficie totalmente geodésica S de \mathbb{H}^3 y B es normal a S .

Ahora, supongamos que $\dot{\sigma}(0) = d(\phi \circ \pi)Z$, donde $Z = Z(0, b\epsilon_2)$ con $b \neq 0$. Claramente, $\dot{\sigma}(0) \notin \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$. Por el Teorema 2.6 tenemos que $\sigma(t) = [\alpha(t) \cdot \gamma_o]$, donde $\alpha(t) = \exp t(Z + A)$. Como $Z + A$ está en el álgebra de Lie del subgrupo de isotropía de G en $e_0 \in \mathbb{H}^3$, obtenemos que $\alpha(t)$ fija e_0 . Más aún, si v es la curva en $T_{e_0}^1 \mathbb{H}^3$ dada por $v(t) = d(\alpha(t))e_1$, entonces

$$\sigma(t) = [\alpha(t) \cdot \gamma_o] = [\gamma_{v(t)}],$$

ya que la velocidad inicial de la geodésica $\alpha(t) \cdot \gamma_o$ es $v(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Además, como v es la órbita por e_1 de un subgrupo monoparamétrico (respecto de la acción de G sobre $T_{e_0}^1 \mathbb{H}^3$ dada por la diferencial), entonces v tiene rapidez y curvatura geodésica constantes en $T_{e_0}^1 \mathbb{H}^3 \cong \mathbb{S}^2$. Simples cálculos muestran que

$$\dot{v}(0) = (0, 0, b)^t \quad \text{y} \quad \ddot{v}(0) = (-b^2, -b, 0)^t.$$

Así, la rapidez de v es $|b|$ y su curvatura geodésica es

$$k = \langle v(0), \dot{v}(0) \times \ddot{v}(0) \rangle / |b|^3 = 1/|b|$$

(consideramos la orientación de la esfera dada por el campo normal unitario que apunta hacia afuera). Luego, v es una curva en $T_{e_0}^1 \mathbb{H}^3$ de curvatura geodésica $k > 0$ y rapidez $1/k$. En consecuencia, σ tiene la forma (2.22).

Sea σ una geodésica magnética nula tal que $\sigma(0) = [\gamma]$ y $\dot{\sigma}(0) \notin \mathcal{D}_{[\gamma]}^\pm$. Como G actúa transitivamente sobre \mathcal{L} y por la G -invariancia de las distribuciones horosféricas, podemos asumir que $\sigma(0) = [\gamma_o]$ y $\dot{\sigma}(0) \notin \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$. Sea $Z = Z(x, y) \in \mathfrak{p}$ tal que $\dot{\sigma}(0) = d(\phi \circ \pi)Z$. Por el Lema 2.13 b), como la norma de la velocidad inicial de σ es cero, tenemos que x e y son linealmente dependientes, y como $d(\phi \circ \pi)Z \notin \mathcal{D}_{[\gamma_o]}^\pm$, tenemos también que $|x| \neq |y|$. Ahora, las isometrías en el Lema 2.14 b) llevan σ a geodésicas

magnéticas de los tipos particulares estudiados arriba. Luego, σ tiene la forma (2.21) o la forma (2.22), como queríamos.

Recíprocamente, dada una hélice h en \mathbb{H}^3 de curvatura k , rapidez $1/k$ y torsión $\tau = 0$, la prueba de que la expresión (2.21) es una geodésica magnética es idéntica a la prueba de la recíproca del Teorema 2.11. Como h tiene torsión cero, la velocidad inicial de la geodésica magnética en (2.21) no está en las distribuciones \mathcal{D}^\pm .

Ahora, sea v una curva en $T_p^1\mathbb{H}^3$ de curvatura geodésica $k > 0$ y rapidez $1/k$. Sea g la isometría de \mathbb{H}^3 que preserva la orientación tal que $g(p) = e_0$, $dg(v(0)) = e_1$ y $dg(\dot{v}(0)) = be_3$, para cierto $b > 0$. Luego, $g \cdot v$ es una curva en $T_{e_0}^1\mathbb{H}^3$ que tiene la misma curvatura geodésica y la misma rapidez que v , y además $b = 1/k$. Sean $Z = Z(0, b\epsilon_2)$, $\alpha(t) = \exp t(Z + A)$ y $\bar{v}(t) = d(\alpha(t))e_1$. Como mostramos arriba, \bar{v} es una curva en $T_{e_0}^1\mathbb{H}^3$ con $\bar{v}(0) = g \cdot v(0)$ y con la misma velocidad inicial y curvatura geodésica que $g \cdot v$. Por unicidad, tenemos que $\bar{v} = g \cdot v$. Para finalizar la prueba observamos que $g \cdot [\gamma_{v(t)}] = [\gamma_{g \cdot v(t)}] = [\gamma_{\bar{v}(t)}]$. \square

Concluimos esta sección con la demostración del Teorema 2.30.

PRUEBA DEL TEOREMA 2.30. El Lema 2.14 b) implica que el análogo del Teorema 2.29 a) es vacío para los casos $\kappa = 0, 1$. La prueba del hecho que toda curva σ en \mathcal{L}_κ es una geodésica magnética nula si y sólo si σ tiene la forma (2.21) o (2.22) es similar a la prueba del Teorema 2.29 b).

Verificamos la última afirmación del teorema. Sin pérdida de generalidad, consideremos sólo geodésicas magnéticas que pasen por $[\gamma_o]$ en $t = 0$. Observemos que si, en particular, σ es una geodésica magnética nula con velocidad inicial $d(\phi \circ \pi)Z(a\epsilon_1, 0)$, con $a > 0$, (es decir, σ tiene la forma (2.21)), entonces por el Lema 2.14 c) existe $h \in H_1$ tal que $\text{Ad}(h)Z(a\epsilon_1, 0) = Z(0, a\epsilon_2)$. Con lo cual, $h \cdot \sigma$ es una geodésica magnética nula con velocidad inicial $d(\phi \circ \pi)Z(0, a\epsilon_2)$, y por lo tanto tiene la forma (2.22). Así, σ también tiene esta forma. \square

Una versión más reducida de estos resultados se encontrará en [GS12b].

La estructura de contacto canónica en el espacio de geodésicas nulas orientadas de pseudoesferas y productos

Sea N una variedad pseudo-riemanniana tal que $\mathcal{L}^0(N)$, el espacio de todas sus geodésicas nulas orientadas, es una variedad. B. Khesin and S. Tabachnikov introducen una estructura de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(N)$ (generalizando la definición dada por R. Low en el caso lorentziano), y la estudian para el espacio pseudo-euclidiano. Continuamos en esa dirección para otros espacios.

Sea $S^{k,m}$ la pseudoesfera de signatura (k, m) . Probamos que $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$ es una variedad y describimos geoméricamente su distribución de contacto canónica en términos del espacio de geodésicas orientadas de una cierta hipersuperficie totalmente geodésica degenerada en $S^{k,m}$. Además, encontramos un contactomorfismo con una variedad de contacto estándar, más precisamente, el fibrado tangente unitario de una variedad pseudo-riemanniana. También, expresamos en operador billar nulo en $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$ asociado a algunas regiones simples en $S^{k,m}$ mediante el flujo geodésico de esferas.

Para N el producto pseudo-riemanniano de dos variedades riemannianas completas, damos condiciones geométricas en los factores para que $\mathcal{L}^0(N)$ sea una variedad y exhibimos un contactomorfismo con una variedad de contacto más concreta.

1. Variedades de contacto

En esta sección repasamos la definición de variedad de contacto, que usaremos a lo largo de este capítulo. Esta es una definición en un sentido más general que la dada en [Bla02] y fue extraída de [Gei06].

Definición 3.1. Sea M una variedad de dimensión $2n + 1$. Una *estructura de contacto* en M es una distribución $\mathcal{D} \subset TM$ de dimensión $2n$ tal que si localmente $\mathcal{D} = \text{Ker } \alpha$,

entonces la 1-forma α satisface

$$(3.1) \quad \alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

A \mathcal{D} se la denomina *distribución de contacto* y al par (M, \mathcal{D}) *variedad de contacto*.

Se tiene que la distribución \mathcal{D} es maximalmente no integrable, es decir, la máxima dimensión de una subvariedad integral de la distribución de contacto \mathcal{D} es n .

La condición (3.1) es independiente de la elección de α y es de hecho una propiedad de \mathcal{D} : Cualquier otra 1-forma local que determine la misma distribución de contacto en M sería de la forma $\lambda\alpha$ para una cierta función suave $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y se tiene que

$$(\lambda\alpha) \wedge (d(\lambda\alpha))^n = (\lambda\alpha) \wedge (\lambda d\alpha + d\lambda \wedge \alpha)^n = \lambda^{n+1} \alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

Si existe una 1-forma α definida en M tal que $\mathcal{D} = \text{Ker } \alpha$, entonces a dicha 1-forma la llamaremos *forma de contacto*. Se observa que en ese caso, $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ es una forma de volumen en M ; en particular, M es orientable.

Un primer ejemplo de variedad de contacto es el siguiente. En \mathbb{R}^{2n+1} con coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$, la 1-forma

$$\alpha = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i,$$

es una forma de contacto. En efecto, $\alpha \wedge (d\alpha)^n = n dz \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n \neq 0$.

De la bibliografía tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2 (Darboux). *Alrededor de cada punto de una variedad de contacto (M^{2n+1}, \mathcal{D}) existe un sistema de coordenadas $(U, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z))$ tal que $\mathcal{D} = \text{Ker } \alpha$ en U , para*

$$\alpha = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

Luego, dos variedades de contacto son indistinguibles localmente.

Definición 3.3. Dos variedades de contacto (M_1, \mathcal{D}_1) y (M_2, \mathcal{D}_2) se dicen *contactomorfas* si existe un difeomorfismo $F : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $dF(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$. Si $\mathcal{D}_i = \text{Ker } \alpha_i$, $i = 1, 2$, esto es equivalente a la existencia de una función nunca nula $\lambda : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F^* \alpha_2 = \lambda \alpha_1$.

Un ejemplo estándar de variedad de contacto es el fibrado tangente unitario de una variedad pseudo-riemanniana M^{n+1} . Por completitud de la exposición damos la demostración de este hecho.

Sea $\pi : T^1M \rightarrow M$ la proyección canónica. Consideramos la 1-forma ω en M definida por

$$(3.2) \quad \omega_u(\xi) = \langle u, d\pi_u \xi \rangle,$$

para $u \in T^1M$ y $\xi \in T_u T^1M$. Esta 1-forma determina una estructura de contacto en T^1M . En efecto, sea $u \in T^1M$ y sea $\{e_0 = u, e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $T_{\pi(u)}M$. Consideramos el isomorfismo lineal

$$(3.3) \quad \varphi_u : T_u T^1M \rightarrow T_{\pi(u)}M \times T_{\pi(u)}M, \quad \varphi_u(\xi) = (d\pi_u \xi, K_u \xi),$$

donde $K_u : T_u T^1M \rightarrow T_{\pi(u)}M$ es el operador de conexión.

Sean h_i y v_i en $T_u T^1M$ tales que

$$\begin{aligned} \varphi_u(h_i) &= (e_i, 0); \quad i = 0, \dots, n \\ \varphi_u(v_i) &= (0, e_i); \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Como $T_u T^1M = \{\xi \in T_u T^1M \mid \langle K_u \xi, u \rangle = 0\}$,

$$\mathcal{B} = \{h_i\}_{i=0}^n \cup \{v_i\}_{i=1}^n$$

es base de $T_u T^1M$. Además, para $X \in T_{\pi(u)}M$ e $Y \in u^\perp$, vía φ_u , se tiene que $\omega_u(\varphi_u^{-1}(X, Y)) = \langle u, X \rangle$. Así, en la base dual de \mathcal{B} , $\omega_u = h^0$.

Supongamos que M tiene signatura $(p, n+1-p)$. Se calcula

$$(d\omega)_u(\varphi_u^{-1}(X, Y), \varphi_u^{-1}(W, Z)) = \langle X, Z \rangle - \langle W, Y \rangle,$$

donde $X, Y \in T_{\pi(u)}M$ y $Z, W \in u^\perp$ (la prueba de dicha expresión sale tomando una superficie parametrizada $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow T^1M$ tal que $f(0, 0) = u$, $\frac{\partial f}{\partial s}\big|_{(0,0)} = \varphi_u^{-1}(X, Y)$ y $\frac{\partial f}{\partial t}\big|_{(0,0)} = \varphi_u^{-1}(W, Z)$). Luego, $(d\omega)_u$ respecto de la base dual de la base canónica de $\Lambda^2(T_u T^1M)$ asociada a \mathcal{B} queda expresada de la siguiente manera

$$(d\omega)_u = \sum_{i=1}^{p-1} h^i \wedge v^i - \sum_{i=p}^n h^i \wedge v^i.$$

Finalmente, se ve que

$$(d\omega_u)^n = \text{const. } h^1 \wedge v^1 \wedge \dots \wedge h^n \wedge v^n.$$

Entonces

$$\omega_u \wedge (d\omega_u)^n = \text{const. } h^0 \wedge h^1 \wedge v^1 \wedge \dots \wedge h^n \wedge v^n \neq 0,$$

como queríamos probar.

2. Espacios de geodésicas nulas orientadas

Sea N una variedad pseudo-riemanniana completa. Dos geodésicas nulas γ y σ de N son equivalentes si existen $\lambda > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que $\sigma(s) = \gamma(\lambda s + b)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Es decir, dos geodésicas nulas de N son equivalentes si tienen la misma trayectoria y orientación. Llamamos $\mathcal{L}^0(N)$ al conjunto de todas las clases de equivalencia de geodésicas nulas orientadas de N .

Para $u \in T_p N$ denotamos $\|u\| = \langle u, u \rangle$ y $|u| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$. Para $r = 0, 1$, sea $T^r N = \{u \in TN \mid \|u\| = r, u \neq 0\}$. Además, denotamos por γ_u a la única geodésica de N cuya velocidad inicial es u .

Para dar a $\mathcal{L}^0(N)$ una estructura diferenciable, la identificamos con un cociente de $T^0 N$. Primero, observamos que dadas dos geodésicas nulas γ y σ de N

$$\gamma \sim \sigma \text{ si y sólo si existen } \lambda > 0 \text{ y } b \in \mathbb{R} \text{ tales que } \dot{\sigma}(0) = \lambda \dot{\gamma}(b).$$

Por otro lado, sea $\mathcal{A} = \text{Aff}_+(\mathbb{R})$ el grupo de Lie de transformaciones afines de \mathbb{R} que preservan orientación y consideremos la acción a derecha de \mathcal{A} en $T^0 N$ definida de la siguiente manera: si $u \in T^0 N$ y $g \in \mathcal{A}$,

$$(3.4) \quad u \cdot g := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_u(g(t)).$$

A partir de la observación anterior, podemos identificar al conjunto de geodésicas nulas orientadas de N con el espacio de órbitas de dicha acción, es decir, $\mathcal{L}^0(N) \simeq T^0 N / \mathcal{A}$.

Además, si esta acción es libre y propia, entonces $\mathcal{L}^0(N) \simeq T^0 N / \mathcal{A}$ es una variedad diferenciable de Hausdorff tal que la proyección canónica $\Pi : T^0 N \rightarrow \mathcal{L}^0(N)$ es una submersión (ver por ejemplo Proposición 2.3.8 de [OR04]).

Por abuso de notación, decimos que $\mathcal{L}^0(N)$ es una variedad si admite una estructura diferenciable (no necesariamente Hausdorff) tal que la proyección $\Pi : T^0N \rightarrow \mathcal{L}^0(N)$, $\Pi(u) = [\gamma_u]$, es una submersión suave.

3. La distribución de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(N)$

Presentamos la definición de la distribución de contacto canónica dada por Khesin y Tabachnikov en [KT09]. Sea N una variedad pseudo-riemanniana, sea $\pi : TN \rightarrow N$ la proyección canónica y para $r = 0, 1$ sea $i : T^rN \hookrightarrow TN$ la inclusión. Sean θ y α las 1-formas canónicas en TN y T^rN respectivamente, es decir, para $u \in TN$ y $\xi \in T_uTN$,

$$(3.5) \quad \theta_u(\xi) = \langle u, d\pi_u\xi \rangle \quad \text{y} \quad \alpha = i^*\theta.$$

Notar que, para el caso $r = 1$, la 1-forma α es exactamente la forma de contacto ω definida en (3.2).

Definición 3.4. [KT09, Low01] Sea N una variedad pseudo-riemanniana tal que $\mathcal{L}^0(N)$ es una variedad. La distribución de contacto canónica \mathcal{D} en $\mathcal{L}^0(N)$ está bien definida por

$$(3.6) \quad \mathcal{D}_{\Pi(u)} = d\Pi_u(\text{Ker } \alpha_u),$$

para cada $u \in T^0N$.

Observamos que la forma de contacto en T^0N no baja a $\mathcal{L}^0(N)$ pero sí lo hace la distribución de contacto $\text{Ker } \alpha$.

Aquí, la estructura de contacto canónica es presentada siguiendo el enfoque de [Low01], en una manera ligeramente diferente a la dada en el artículo [KT09] de Khesin y Tabachnikov (ellos la definen en dos pasos vía el espacio de geodésicas nulas escaladas, obteniendo al mismo tiempo una simplectificación de $\mathcal{L}^0(N)$).

Por completitud de la exposición damos una prueba de la buena definición de \mathcal{D} en el caso que nos interesa. Es decir, en el caso que N es una variedad pseudo-riemanniana completa tal que \mathcal{A} actúa en forma libre y propia sobre T^0N .

Con estas hipótesis extras, para verificar la buena definición de \mathcal{D} es suficiente mostrar que si $g = (b, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \cong \mathcal{A}$, entonces $\tilde{g}^* \alpha = \lambda \alpha$, donde $\tilde{g}(u) = u \cdot g$ para todo $u \in T^0 N$.

Sean $u \in T^0 N$ y $\xi \in T_u T^0 N$. Tomemos una curva $u(t)$ en $T^0 N$ tal que $u(0) = u$ y $u'(0) = \xi$. En particular,

$$\tilde{g}(u(t)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \gamma_{u(t)}(\lambda s + b) = \lambda \dot{\gamma}_{u(t)}(b).$$

Calculamos

$$(\tilde{g}^* \alpha)_u(\xi) = \langle \tilde{g}(u), d\pi_{\tilde{g}(u)}(d\tilde{g}_u \xi) \rangle = \langle \lambda \dot{\gamma}_u(b), \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_{u(t)}(b) \rangle = \lambda \langle \dot{\gamma}_u(b), J(b) \rangle,$$

donde J es el campo de Jacobi a lo largo de γ_u definido por

$$J(s) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_{u(t)}(s).$$

De la misma manera, $\alpha_u(\xi) = \langle \dot{\gamma}_u(0), J(0) \rangle$. Luego, es suficiente probar que $\langle \dot{\gamma}_u(s), J(s) \rangle$ no depende de s . En efecto, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$\langle \dot{\gamma}_{u(t)}(s), \dot{\gamma}_{u(t)}(s) \rangle = \langle u(t), u(t) \rangle = 0,$$

pues $u(t) \in T^0 N$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \left\langle \left. \frac{D}{dt} \right|_0 \dot{\gamma}_{u(t)}(s), \dot{\gamma}_u(s) \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{ds} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_{u(t)}(s), \dot{\gamma}_u(s) \right\rangle \\ &= 2 \langle J'(s), \dot{\gamma}_u(s) \rangle = 2 \frac{d}{ds} \langle J(s), \dot{\gamma}_u(s) \rangle. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que $\tilde{g}^* \alpha = \lambda \alpha$, como queríamos verificar.

4. La estructura de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$

Sea $\mathbb{R}^{k+1,m}$ el espacio pseudo-euclidiano de signatura $(k+1, m)$, es decir, $\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^m$ munido del producto interno cuya norma está dada por $\|(u, v)\| = |u|^2 - |v|^2$ (aquí, $|\cdot|$ denota la norma del producto interno canónico del espacio euclídeo). La pseudoesfera de radio 1 en $\mathbb{R}^{k+1,m}$ se define por

$$S^{k,m} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{k+1,m} \mid |u|^2 - |v|^2 = 1\},$$

la cual es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^{k+1,m}$ con métrica inducida de signatura (k, m) y difeomorfa a $S^k \times \mathbb{R}^m$. Las geodésicas nulas de $S^{k,m}$ son líneas rectas en $\mathbb{R}^{k+1,m}$ con velocidad inicial en $T^0 S^{k,m}$.

El siguiente resultado está motivado por el hecho que los fibrados tangentes unitarios de variedades pseudo-riemannianas están entre los ejemplos estándar de variedades de contacto (cuya forma de contacto es la dada en (3.2) como se vio en la Sección 1).

Sea $S_+^k \times S_-^{m-1}$ la variedad $S^k \times S^{m-1}$ con la métrica pseudo-riemanniana tal que para cada $(x, y) \in T_{(u,v)}(S^k \times S^{m-1})$, $\|(x, y)\| = |x|^2 - |y|^2$.

Teorema 3.5. *El conjunto $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$ es una variedad, y si se consideran en $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$ y $T^1(S_+^k \times S_-^{m-1})$ las estructuras de contacto canónicas, entonces la aplicación*

$$F : T^1(S_+^k \times S_-^{m-1}) \rightarrow \mathcal{L}^0(S^{k,m}), \quad F((u, v), (x, y)) = [\gamma],$$

con $\gamma(t) = (x, y) + t(u, v)$, es un contactomorfismo.

PRUEBA. Primero probemos que $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$ es una variedad. Por lo expuesto anteriormente, como un cálculo directo muestra que la acción de \mathcal{A} sobre $T^0 S^{k,m}$ es claramente libre, es suficiente verificar que la acción es propia. Entonces, sea (p_n, u_n) una sucesión que converge a (p, u) en $T^0 S^{k,m}$ y sea (s_n, λ_n) una sucesión en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \cong \mathcal{A}$ tal que $(p_n, u_n) \cdot (s_n, \lambda_n)$ converge a (q, v) en $T^0 S^{k,m}$. Tenemos que mostrar que existe una sub-sucesión convergente de (s_n, λ_n) en \mathcal{A} . Los puntos pie p_n convergen a p en $S^{k,m}$ y como las geodésicas nulas en $S^{k,m}$ son líneas rectas, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(p_n, u_n) \cdot (s_n, \lambda_n) = (p_n + s_n u_n, \lambda_n u_n)$. Con lo cual, por hipótesis, $\lambda_n u_n \rightarrow v$ y $p_n + s_n u_n \rightarrow q$. Considerando el producto interno canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathbb{R}^{k+1+m} , como $u \neq 0$, obtenemos que

$$\lambda_n \rightarrow \langle v, u \rangle / |u|^2 \quad \text{y} \quad s_n \rightarrow \langle q - p, u \rangle / |u|^2.$$

Ahora, verificamos que F es un difeomorfismo. La aplicación está bien definida pues dado $(x, y) \in T_{(u,v)}^1(S_+^k \times S_-^{m-1})$, tenemos que

$$(3.7) \quad |u|^2 = 1 = |v|^2, \quad \langle u, x \rangle = 0 = \langle v, y \rangle \quad \text{y} \quad |x|^2 - |y|^2 = 1.$$

Entonces, $(x, y) \in S^{k,m}$, $(u, v) \in (x, y)^\perp = T_{(x,y)} S^{k,m}$, $\|(u, v)\| = 0$ y $t \mapsto (x, y) + t(u, v)$ es una geodésica nula en $S^{k,m}$. Así, $F((u, v), (x, y)) \in \mathcal{L}^0(S^{k,m})$.

Se tiene que F es suave pues todos los espacios involucrados son (cocientes de) subvariedades embebidas de $E = \mathbb{R}^{k+1+m} \times \mathbb{R}^{k+1+m}$ y $g : E \rightarrow E$, $g((u, v), (x, y)) = ((x, y), (u, v))$, es obviamente suave y desciende a F .

Por otro lado, si γ es una geodésica nula en $S^{k,m}$, entonces $\gamma(t) = (x, y) + t(u, v)$ con $(x, y) \in S^{k,m}$, $0 \neq (u, v) \perp (x, y)$ en $\mathbb{R}^{k+1,m}$ y $|u|^2 - |v|^2 = 0$. Luego, tenemos que

$$(3.8) \quad F^{-1}([\gamma]) = (|u|^{-1}(u, v), (x, y) - |u|^{-2}\langle x, u \rangle(u, v)),$$

y además es una aplicación suave.

Finalmente, probemos que F es un contactomorfismo, es decir $dF(\text{Ker } \omega) = \mathcal{D}$, donde \mathcal{D} está definida en (3.6) y ω es la forma de contacto canónica en $T^1(S_+^k \times S_-^{m-1})$ como en (3.2).

Sea $p : T^1(S_+^k \times S_-^{m-1}) \rightarrow S_+^k \times S_-^{m-1}$ la proyección canónica y sea $f : T^1(S_+^k \times S_-^{m-1}) \rightarrow T^0 S^{k,m}$ la restricción de la aplicación g definida arriba. Sean $U = ((u, v), (x, y)) \in T^1(S_+^k \times S_-^{m-1})$ y $\xi \in \text{Ker } \omega_U$. Como el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^1(S_+^k \times S_-^{m-1}) & \xrightarrow{f} & T^0 S^{k,m} \\ & \searrow F & \downarrow \Pi \\ & & \mathcal{L}^0(S^{k,m}) \end{array}$$

conmuta, sólo tenemos que verificar que $df_U \xi \in \text{Ker } \alpha_{f(U)}$. Para ello, sea $t \mapsto (c(t), z(t))$ una curva en $T^1(S_+^k \times S_-^{m-1})$ tal que $c(0) = (u, v)$, $z(0) = (x, y)$ y de velocidad inicial ξ .

Por definición de ω , tenemos que

$$0 = \omega_U(\xi) = \langle dp_U \xi, z(0) \rangle = \langle c'(0), z(0) \rangle.$$

Como $(z(t), c(t)) = f(c(t), z(t)) \in T^0 S^{k,m}$, se sigue que $c(t) \perp z(t)$ en $\mathbb{R}^{k+1,m}$ para todo t . Con lo cual,

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \langle c(t), z(t) \rangle = \langle c'(0), z(0) \rangle + \langle c(0), z'(0) \rangle.$$

Entonces,

$$\alpha_{f(U)}(df_U \xi) = \langle d\pi_{f(U)}(df_U \xi), c(0) \rangle = \langle d(\pi \circ f)_U \xi, c(0) \rangle = \langle z'(0), c(0) \rangle = 0.$$

En consecuencia, $dF_U \xi \in \mathcal{D}_{F(U)}$ y como ambas distribuciones de contacto tienen la misma dimensión, resultan iguales. \square

La siguiente proposición es un análogo de la Proposición 2.6 (1) de [KT09] y en ella describimos geoméricamente la distribución de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$ en términos del espacio de geodésicas orientadas de una hipersuperficie totalmente geodésica degenerada en $S^{k,m}$.

Proposición 3.6. *Sea $\gamma(t) = p+tu$ una geodésica nula en $S^{k,m}$. Sea H la hipersuperficie degenerada totalmente geodésica de $S^{k,m}$ que contiene a la imagen de γ dada por $H = u^\perp \cap S^{k,m}$ y sea $\mathcal{L}(H)$ el espacio de geodésicas orientadas de H . Si \mathcal{D} es la distribución de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(S^{k,m})$, entonces, a nivel infinitesimal,*

$$\mathcal{D}_{[\gamma]} = T_{[\gamma]} \mathcal{L}(H).$$

PRUEBA. La afirmación se debe entender en el siguiente sentido (no aborda la cuestión si $\mathcal{L}(H)$ es una variedad): Dado $X = d\Pi_{[\gamma]}(\xi) \in \mathcal{D}_{[\gamma]}$ (recordamos que \mathcal{D} está definida en (3.6)), existe una variación por geodésicas *contenidas en H* cuyo campo de Jacobi a lo largo de γ satisface $J(0) = d\pi_u \xi$ y $J'(0) = K_u \xi$ (aquí $K_u : T_u T^0 S^{k,m} \rightarrow T_{\pi(u)} S^{k,m}$ es el operador de conexión).

Específicamente, como $\xi \in \text{Ker } \alpha_u \subset T_u T^0 S^{k,m}$ tenemos que $\langle d\pi_u \xi, u \rangle = 0 = \langle K_u \xi, u \rangle$ y esto implica que $d\pi_u \xi, K_u \xi \in T_{\pi(u)} H$. Sea c una curva en H tal que $c(0) = \pi(u)$ y $c'(0) = d\pi_u \xi$ y consideremos

$$s \mapsto v(s) = \tau_0^s(u + sK_u \xi),$$

donde τ_0^s denota el transporte paralelo a lo largo de c desde 0 a s . Como H es totalmente geodésica y $u + sK_u \xi \in T_{\pi(u)} H$ para todo $s \in \mathbb{R}$, obtenemos que $v(s) \in T_{c(s)} H$ y la imagen de $\gamma_{v(s)}$ está contenida en H para cada s (ver por ejemplo [O'N83, pág. 125]).

Además, como

$$v(0) = u \quad \text{and} \quad \left. \frac{D}{ds} \right|_0 v(s) = K_u \xi,$$

entonces el campo de Jacobi $J(t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \gamma_{v(s)}(t)$ a lo largo de γ tiene las propiedades requeridas. \square

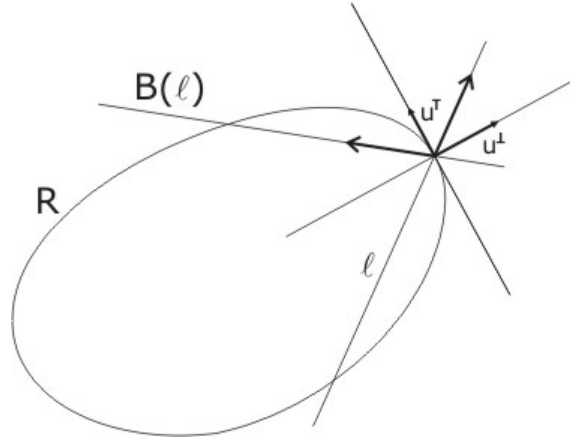
5. Billares

Recordemos la definición del operador billar nulo (ver Sección 3 de [KT09]) en un caso especial. Sea N una variedad pseudo-riemanniana completa y sea R una región en N con borde suave y no degenerado M . Adicionalmente requerimos que toda geodésica nula γ que interseque el interior de R satisfaga que $\gamma(\mathbb{R}) \cap R = \gamma([t_0, t_1])$. Llamamos $\mathfrak{L} \subset \mathcal{L}^0(N)$ al conjunto de todas las geodésicas nulas orientadas que intersecan el interior de R .

Sea γ una geodésica nula de N tal que $[\gamma] \in \mathfrak{L}$. Descomponemos $\dot{\gamma}(t_1)$ en sus componentes tangencial y normal, es decir, $\dot{\gamma}(t_1) = u^T + u^\perp$ con $u^T \in T_{\gamma(t_1)}M$ y $u^\perp \in (T_{\gamma(t_1)}M)^\perp$. El operador billar nulo B está bien definido de la siguiente manera:

$$B : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}, \quad B([\gamma]) = [\gamma_w], \quad \text{con } w = u^T - u^\perp.$$

Una representación gráfica del billar riemanniano es la siguiente:



Como en el caso pseudo-euclidiano [KT09], el operador billar nulo preserva la estructura de contacto en $\mathcal{L}^0(N)$. Por completitud, incluimos este hecho como proposición.

Proposición 3.7. *Si N es una variedad pseudo-riemanniana completa tal que $\mathcal{L}^0(N)$ es una variedad y R es una región en N como arriba, entonces la estructura de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(N)$ es preservada por B .*

PRUEBA. Sean $\ell \in \mathfrak{L}$ y $X \in \mathcal{D}_\ell$. Por definición de $\mathcal{L}^0(N)$ podemos tomar $u \in T^0N$ tal que $\Pi(u) = \ell$ y $\pi(u) \in M$. Por otro lado, existe $\eta \in \text{Ker } \alpha_u$ tal que $d\Pi_u \eta = X$.

Como $T_{\pi(u)}N = \mathbb{R}u + T_{\pi(u)}M$, entonces $d\pi_u\eta = \lambda u + v$, con $v \in T_{\pi(u)}M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea φ_u el isomorfismo lineal dado en (3.3). Luego, $\xi = \varphi_u^{-1}(v, K_u\eta) \in \text{Ker } \alpha_u$ y es tal que $d\Pi_u\xi = X$ y $d\pi_u\xi \in T_{\pi(u)}M$. Sea c una curva en M con velocidad inicial $d\pi_u\xi$. Como $\pi|_{T^0N}$ es una submersión, existe una curva $t \mapsto u(t)$ en T^0N tal que $u(0) = u$, $u'(0) = \xi$ y $\pi(u(t)) = c(t)$. Así,

$$(3.9) \quad 0 = \alpha_u(\xi) = \langle u(0), d\pi_{u(0)}u'(0) \rangle = \langle u(0), c'(0) \rangle.$$

Descomponemos $u(t) = u^T(t) + u^\perp(t)$, donde $u^T(t) \in T_{c(t)}M$ y $u^\perp(t) \in (T_{c(t)}M)^\perp$ (recordamos que se supone que M es no degenerada). Tomando $\ell(t) = \Pi(u(t))$, tenemos

$$dB_\ell X = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 B(\ell(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Pi(u^T(t) - u^\perp(t)).$$

Observamos que $\pi(u^T(t) - u^\perp(t)) = c(t)$. Entonces, para ver que $dB_\ell X \in \mathcal{D}_{B(\ell)}$, sólo tenemos que verificar que

$$(3.10) \quad \langle u^T(0) - u^\perp(0), c'(0) \rangle = 0.$$

Pero, por (3.9) y el hecho que $c'(0) \in T_{c(0)}M$, obtenemos que $\langle u^T(0), c'(0) \rangle = 0$, y esto implica que (3.10) se cumple.

Finalmente, como \mathcal{D} tiene dimensión constante y dB_ℓ es no singular, se sigue que $dB_\ell \mathcal{D}_\ell = \mathcal{D}_{B(\ell)}$. \square

Khesin y Tabachnikov en [KT09] estudian la dinámica del operar billar nulo para el espacio pseudo-euclidiano. Nosotros estudiamos el operador billar nulo asociado a las siguientes regiones sencillas en la pseudoesfera.

Para $c > 0$, sea R_c la región en $S^{k,m}$ dada por

$$R_c = \{(u, v) \in S^{k,m} \mid |v| \leq c\},$$

con borde $M_c = \{(u, v) \in S^{k,m} \mid |v| = c\}$, el cual es no degenerado pues $V(u, v) = (c^2u, (1 + c^2)v)$ es un campo normal de tipo temporal que apunta hacia afuera.

Consideramos la aplicación

$$i : T^1(S_+^k \times S_-^{m-1}) \rightarrow TS^k \times TS^{m-1}, \quad i((u, v), (x, y)) = ((u, x), (v, y)).$$

Como antes, llamamos \mathfrak{L} al conjunto de todas las geodésicas nulas orientadas en $S^{k,m}$ que intersecan el interior de R_c y denotamos $L = i \circ F^{-1}(\mathfrak{L}) \subset TS^k \times TS^{m-1}$, donde F es el contactomorfismo del Teorema 3.5. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{L} & \subset & \mathcal{L}^0(S^{k,m}) & \xrightarrow{F^{-1}} & F^{-1}(\mathfrak{L}) \subset T^1(S_+^k \times S_-^{m-1}) & \xrightarrow{i} & L \\ B \downarrow & & & & & & \downarrow \tilde{B} \\ \mathfrak{L} & \subset & \mathcal{L}^0(S^{k,m}) & \xrightarrow{F^{-1}} & F^{-1}(\mathfrak{L}) \subset T^1(S_+^k \times S_-^{m-1}) & \xrightarrow{i} & L \end{array}$$

A continuación expresamos el operador \tilde{B} en términos de flujos geodésicos de esferas.

Sean φ y ψ los flujos geodésicos de S^k y S^{m-1} , respectivamente.

Proposición 3.8. *Sea $\tilde{B} : L \rightarrow L$ el conjugado del operador billar nulo en \mathfrak{L} por la aplicación $i \circ F^{-1}$. Entonces,*

$$(3.11) \quad \tilde{B}((u, x), (v, y)) = (|x| \varphi_{2\theta_x}(u, x/|x|), |y| \psi_{2\theta_y}(v, y/|y|)),$$

donde $\theta_x, \theta_y \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$ son tales que $|x| \tan \theta_x = -\sqrt{c^2 - |y|^2} = |y| \tan \theta_y$.

PRUEBA. Sea $((u, x), (v, y)) \in L$. Usando (3.7), encontramos que $t_1 = \sqrt{c^2 - |y|^2}$ es como en la definición del operador billar nulo. Luego, tenemos que $F((u, v), (x, y)) = [\gamma]$ con $\gamma(t) = (x, y) + t(u, v)$ y podemos descomponer el vector (u, v) en sus partes tangencial y normal en $\gamma(t_1)$. En efecto,

$$(u, v)^T = \left(\frac{1}{1+c^2}(|x|^2 u - t_1 x), \frac{1}{c^2}(|y|^2 v - t_1 y) \right)$$

$$\text{y} \quad (u, v)^\perp = \left(\frac{t_1}{1+c^2}(t_1 u + x), \frac{t_1}{c^2}(t_1 v + y) \right).$$

Entonces, por definición de B y usando la expresión para la inversa de F dada en (3.8), obtenemos que $\tilde{B}((u, x), (v, y)) = ((u', x'), (v', y'))$, donde

$$\begin{aligned} (u', x') &= \left(\frac{|x|^2 - t_1^2}{1+c^2} u - \frac{2t_1|x|}{1+c^2} \frac{x}{|x|}, |x| \left(\frac{2t_1|x|}{1+c^2} u + \frac{|x|^2 - t_1^2}{1+c^2} \frac{x}{|x|} \right) \right) \\ &= |x| \varphi_{2\theta_x}(u, x/|x|), \end{aligned}$$

con θ_x tal que $\tan \theta_x = -t_1/|x|$, y

$$\begin{aligned} (v', y') &= \left(\frac{|y|^2 - t_1^2}{c^2} v - \frac{2t_1|y|}{c^2} \frac{y}{|y|}, |y| \left(\frac{2t_1|y|}{c^2} v + \frac{|y|^2 - t_1^2}{c^2} \frac{y}{|y|} \right) \right) \\ &= |y| \psi_{2\theta_y}(v, y/|y|), \end{aligned}$$

con θ_y tal que $\tan \theta_y = -t_1/|y|$. □

Corolario 3.9. (Caso lorentziano) *Sea \tilde{B} el conjugado del operador billar nulo en $\mathcal{L}^0(S^{k,1})$ por las identificaciones $\mathcal{L}^0(S^{k,1}) \simeq T^1(S_+^k \times S_-^0) \simeq T^1 S^k \times \{-1, 1\}$, entonces*

$$\tilde{B}((u, x), \varepsilon) = (\varphi_{-2 \arctan(c)}(u, x), -\varepsilon),$$

donde $u \in S^k$, $x \perp u$ y $\varepsilon = \pm 1$.

6. La estructura de contacto canónica en $\mathcal{L}^0(M_+ \times N_-)$

Sean M y N variedades riemannianas completas. Sea $M_+ \times N_-$ la variedad $M \times N$ con la métrica pseudo-riemanniana cuya norma está definida por $\|(u, v)\| = |u|_M^2 - |v|_N^2$, para cada $(u, v) \in T_{(p,q)}(M \times N)$ y $(p, q) \in M \times N$.

Sea $\mathcal{L}(M)$ el espacio de geodésicas orientadas de M , es decir, el cociente de $T^1 M$ por la acción de \mathbb{R} en él determinada por el flujo geodésico de M .

Llamamos p_1, p_2 a las proyecciones de $\mathcal{L}(M) \times T^1 N$ sobre el primer y segundo factor, respectivamente, y sean α_1 y α_2 las 1-formas canónicas en $T^1 M$ y $T^1 N$, respectivamente, definidas como en (3.5).

Determinamos condiciones sobre M y N para que el conjunto de geodésicas nulas orientadas de $M_+ \times N_-$ sea una variedad. Además, encontramos un contactomorfismo entre $\mathcal{L}^0(M_+ \times N_-)$ munida de su estructura de contacto canónica y una variedad de contacto más concreta.

Teorema 3.10. *Sean M y N variedades riemannianas completas tales que el flujo geodésico de M es libre y propio. Entonces, $\mathcal{L}^0(M_+ \times N_-)$ es una variedad. Supongamos adicionalmente que existe una sección global suave $S : \mathcal{L}(M) \rightarrow T^1 M$. Entonces $\theta_S = p_1^* S^* \alpha_1 - p_2^* \alpha_2$ es una forma de contacto en $\mathcal{L}(M) \times T^1 N$ y la aplicación*

$$G : \mathcal{L}(M) \times T^1 N \rightarrow \mathcal{L}^0(M_+ \times N_-), \quad G(\ell, v) = [(\gamma_{S(\ell)}, \gamma_v)]$$

es un contactomorfismo, donde $\mathcal{L}^0(M_+ \times N_-)$ está munida de su estructura de contacto canónica.

PRUEBA. En primer lugar, notemos que $\mathcal{L}(M) = T^1M/\mathbb{R}$ es una variedad pues el flujo geodésico de M es libre y propio. Ahora, $\mathcal{L}^0(M_+ \times N_-)$ es también una variedad pues la acción a derecha de \mathcal{A} en $T^0(M_+ \times N_-)$ definida en (3.4) resulta ser libre y propia. En efecto, la acción es libre debido a que las geodésicas tienen rapidez constante y el flujo geodésico de M es libre. Por otro lado, dada una sucesión (u_n, v_n) que converge a (u, v) en $T^0(M_+ \times N_-)$ y una sucesión (s_n, λ_n) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \cong \mathcal{A}$ tal que la sucesión $(u_n, v_n) \cdot (s_n, \lambda_n) = (\lambda_n \dot{\gamma}_{u_n}(s_n), \lambda_n \dot{\gamma}_{v_n}(s_n))$ converge a (z, w) en $T^0(M_+ \times N_-)$, entonces tenemos que

$$\lambda_n \dot{\gamma}_{u_n}(s_n) \rightarrow z \quad \text{y} \quad u_n \rightarrow u$$

en TM . Por lo tanto,

$$\lambda_n |\dot{\gamma}_{u_n}(s_n)| \rightarrow |z| \quad \text{y} \quad |\dot{\gamma}_{u_n}(s_n)| \rightarrow |u| \neq 0,$$

con lo cual $\lambda_n \rightarrow |z|/|u|$. Además,

$$\dot{\gamma}_{u_n/|u_n|}(|u_n|s_n) = |u_n|^{-1} \dot{\gamma}_{u_n}(s_n) \quad \text{y} \quad \dot{\gamma}_{u_n}(s_n) = \lambda_n^{-1} (\lambda_n \dot{\gamma}_{u_n}(s_n)) \rightarrow |u|z/|z|.$$

Entonces

$$\dot{\gamma}_{u_n/|u_n|}(|u_n|s_n) \rightarrow z/|z|$$

en T^1M . Como la sucesión $u_n/|u_n|$ converge a $u/|u|$ en T^1M y el flujo geodésico de M es propio, existe una subsucesión $|u_{n_j}|s_{n_j}$ que converge a algún s en \mathbb{R} . Entonces, $(s_{n_j}, \lambda_{n_j}) \rightarrow (s/|u|, |z|/|u|)$ en \mathcal{A} , y así la acción es propia.

Para verificar que $(\mathcal{L}(M) \times T^1N, \text{Ker } \theta_S)$ es una variedad de contacto veamos que G es un difeomorfismo tal que $dG(\text{Ker } \theta_S) = \mathcal{D}$, donde \mathcal{D} es la distribución de contacto definida en (3.6).

Sea $h : T^1M \times T^1N \rightarrow T^0(M_+ \times N_-)$ la inclusión canónica. Como $G = \Pi \circ h \circ (S \times \text{id})$ y cada una de estas aplicaciones es suave, obtenemos que G es suave.

Sea $\pi_M : T^1M \rightarrow \mathcal{L}(M)$ la proyección canónica. Bajo las hipótesis en el flujo geodésico de M , $(T^1M, \pi_M, \mathcal{L}(M))$ es un \mathbb{R} -fibrado principal (ver por ejemplo [OR04, Proposition 2.3.8 (iii)]). Con lo cual, existe una aplicación suave $x : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$S(\pi_M(u)) = \dot{\gamma}_u(x(u))$. Entonces, si γ y σ son geodésicas en M y N , respectivamente, tales que $[(\gamma, \sigma)] \in \mathcal{L}^0(M_+ \times N_-)$, tenemos que

$$G^{-1} : \mathcal{L}^0(M_+ \times N_-) \rightarrow \mathcal{L}(M) \times T^1N, \quad G^{-1}([(\gamma, \sigma)]) = ([\gamma_u], \dot{\gamma}_v(x(u))),$$

donde $u = \dot{\gamma}(0)/|\dot{\gamma}(0)| \in T^1M$ y $v = \dot{\sigma}(0)/|\dot{\sigma}(0)| \in T^1N$. Como $G^{-1} \circ \pi_M$ es suave y π_M es una submersión, se sigue que G^{-1} es una aplicación suave. Por lo tanto, G es un difeomorfismo.

Finalmente, comprobamos que $dG(\text{Ker } \theta_S) = \mathcal{D}$. Para ello, sea $p = (\ell, v) \in \mathcal{L}(M) \times T^1N$ y tomemos $(\xi, \eta) \in \text{Ker } (\theta_S)_p$. Sea $t \mapsto (\ell_t, v_t)$ una curva en $\mathcal{L}(M) \times T^1N$ tal que $(\ell_0, v_0) = p$ y $(\ell'_0, v'_0) = (\xi, \eta)$. Como $G(\ell_t, v_t) = \Pi(S(\ell_t), v_t)$, entonces

$$dG_p(\xi, \eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 G(\ell_t, v_t) = d\Pi_{(S(\ell), v)} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (S(\ell_t), v_t).$$

Por definición de \mathcal{D} , sólo tenemos que verificar que $X = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (S(\ell_t), v_t) \in \text{Ker } \alpha_{(S(\ell), v)}$. Si llamamos $\pi^1 : T^1M \rightarrow M$ y $\pi^2 : T^1N \rightarrow N$ a las proyecciones canónicas, tenemos que

$$d\pi_{(S(\ell), v)} X = (d\pi_{S(\ell)}^1(dS_\ell \xi), d\pi_v^2(\eta)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha_{(S(\ell), v)}(X) &= \langle (S(\ell), v), d\pi_{(S(\ell), v)} X \rangle \\ &= \langle S(\ell), d\pi_{S(\ell)}^1(dS_\ell \xi) \rangle_M - \langle v, d\pi_v^2(\eta) \rangle_N \\ &= (S^* \alpha_1)_\ell(\xi) - (\alpha_2)_v(\eta) \\ &= (p_1^* S^* \alpha_1 - p_2^* \alpha_2)_{(S(\ell), v)}(\xi, \eta) \\ &= (\theta_S)_p(\xi, \eta) = 0. \end{aligned}$$

Con lo cual, $dG_p(\xi, \eta) \in \mathcal{D}_{G(p)}$. Al tener ambas distribuciones la misma dimensión, obtenemos su igualdad. En consecuencia, como \mathcal{D} es una distribución de contacto, θ_S es una forma de contacto en $\mathcal{L}(M) \times T^1N$ y G es un contactomorfismo. \square

Ejemplo 3.11. Escribiendo a $\mathbb{R}^{n,k} = \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_-^k$ se tiene que $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^{n,k}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times T^1\mathbb{R}^k \simeq TS^{n-1} \times \mathbb{R}^k \times S^{k-1}$. La Proposición 2.6 (2) en [KT09] da otra presentación de $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^{n,k})$, en términos de 1-jets, la cual tiene la ventaja de ser natural.

Ejemplo 3.12. Si M es o bien una variedad de Hadamard o el paraboloides de revolución $\{(x, y, x^2 + y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, entonces $\mathcal{L}(M)$ es una variedad y tiene una sección suave en T^1M . Luego, se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.10.

Supongamos primero que M es una variedad de Hadamard. El flujo geodésico de M es libre pues la exponencial es un difeomorfismo en cada punto. Además, dada una sucesión (p_n, v_n) que converge a (p, v) en T^1M y una sucesión t_n en \mathbb{R} tal que $(\gamma_{v_n}(t_n), \dot{\gamma}_{v_n}(t_n))$ converge a (q, u) , tenemos que $d(p_n, \gamma_{v_n}(t_n)) = |t_n|$, pues las geodésicas en M minimizan la distancia. Como la distancia es una función continua, se sigue que $|t_n| \rightarrow d(p, q)$. Entonces la sucesión t_n tiene una subsucesión convergente y el flujo geodésico de M es propio. Luego, $\mathcal{L}(M)$ es una variedad.

Fijado $p \in M$, sea $H : T(T_p^1M) \rightarrow \mathcal{L}(M)$ la aplicación definida como sigue: Sean $u \in T_p^1M$ y $x \in T_pM$ con $u \perp x$, entonces $H(u, x)$ es la geodésica orientada con punto inicial $\exp_p(x)$ y velocidad inicial igual al transporte paralelo de u a lo largo de la geodésica $t \mapsto \exp_p(tx)$ entre $t = 0$ y $t = 1$. La Proposición 4.14 de [BLP96] afirma que H es un difeomorfismo. Con lo cual, existe una sección global $S : \mathcal{L}(M) \rightarrow T^1M$ que asigna a cada geodésica orientada de rapidez unitaria de M su velocidad en el punto más cercano a p .

El caso en que M es el paraboloides de revolución está probado en [GS12a].

Ejemplo 3.13. No existe una sección $S : \mathcal{L}(S^2) \rightarrow T^1S^2$, de lo contrario existiría un campo de vectores nunca nulo en la 2-esfera ya que $\mathcal{L}(S^2) \cong S^2$.

En el artículo [BLP96] no se incluyó la prueba del hecho que la aplicación H considerada en el ejemplo 3.12 es un difeomorfismo. Finalmente, por completitud de la exposición, damos la prueba para el caso en que la variedad de Hadamard es de dimensión 3.

Sea M una tal variedad. Fijemos un punto $p \in M$ y llamemos $S_p = T_p^1M$. Se tiene que

$$TS_p = \{(u, x) \in S_p \times T_pM \mid \langle u, x \rangle = 0\}.$$

Sea

$$\bar{H} : TS_p \rightarrow T^1M, \quad \bar{H}(u, x) = \tau_{\gamma_x}|_0^1(u),$$

donde $\tau_{\gamma_x}|_0^1$ denota el transporte paralelo a lo largo de γ_x entre 0 y 1. Si $\pi_M : T^1M \rightarrow \mathcal{L}(M)$ es la proyección canónica, $H = \pi_M \circ \bar{H}$ y claramente es una aplicación suave. Veamos que H es una biyección. Observemos que, como M es una variedad de Hadamard, dada una geodésica γ de rapidez unitaria de M existe $t_o \in \mathbb{R}$ en el cual se alcanza el valor mínimo de la distancia entre $\gamma(t)$ y p (ver por ejemplo [Ebe96]). Sea d el valor de dicha distancia mínima. Además, existe una única geodésica σ en M tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma(d) = \gamma(t_o)$. Se cumple que $\langle \dot{\sigma}(d), \dot{\gamma}(t_o) \rangle = 0$ (ver [dC92, pág. 209, ejercicio 6]). Luego, $u = \tau_{\sigma}|_d^0(\dot{\gamma}(t_o))$ y $x = \dot{\sigma}(0)$ son tales que $(u, x) \in TS_p$ y $H^{-1}([\gamma]) = (u, x)$, con H^{-1} bien definida en $\mathcal{L}(M)$.

Como TS_p y el espacio de geodésicas orientadas de M tienen la misma dimensión y H es biyectiva, para probar que H es un difeomorfismo es suficiente verificar que su diferencial en cada punto es inyectiva. Pero esto último es equivalente a mostrar que $d\bar{H}_{(u,x)}$ es 1 : 1 e $\text{Im } d\bar{H}_{(u,x)} \cap \text{Ker } (d\pi_M)_{\bar{H}(u,x)} = \{0\}$.

El caso $x = 0$ es sencillo de probar. Supongamos que $x \neq 0$. Sea $\hat{x} = x/|x|$ y sea $v \in T_pM$ tal que $\{u, \hat{x}, v\}$ es una base ortonormal de T_pM . Tenemos que

$$\{(0, |x|v), (0, \hat{x}), (v, 0), (-\hat{x}, |x|u)\}$$

es una base de $T_{(u,x)}(TS_p)$ y son velocidades iniciales de las siguientes curvas en TS_p :

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (u, (\cos t)x + (\sin t)|x|v) \\ c_2(t) &= (u, x + t\hat{x}) \\ c_3(t) &= ((\cos t)u + (\sin t)v, x) \\ c_4(t) &= ((\cos t)u - (\sin t)\hat{x}, (\cos t)x + (\sin t)|x|u). \end{aligned}$$

Sean $q = \gamma_x(1)$, $U = \bar{H}(u, x)$, $V = \tau_{\gamma_x}|_0^1(v)$ y $X = \tau_{\gamma_x}|_0^1(\hat{x})$. Como U , V y X son el transporte paralelo de una base ortonormal a lo largo de γ_x , se tiene que $\{U, V, X\}$ es una base ortonormal de T_qM .

Sea $\pi : TM \rightarrow M$ la proyección canónica y sea $p_2 : TS_p \times T_pM \rightarrow T_pM$ la proyección sobre la segunda coordenada. Como $\pi \circ \bar{H} = \exp_p \circ p_2$, si

$$(d\bar{H})_{(u,x)}(a(0, |x|v) + b(0, \hat{x}) + c(v, 0) + d(-\hat{x}, |x|u)) = 0,$$

aplicando $d\pi$ a ambos miembros, se tiene que

$$(d\exp_p)_x(a|x|v + b\hat{x} + d|x|u) = 0.$$

Y como $(d\exp_p)_x$ es un isomorfismo y $\{u, \hat{x}, v\}$ es un conjunto linealmente independiente, $a = b = d = 0$. Por último, un cálculo muestra que $\varphi_U((d\bar{H})_{(u,x)}(v, 0)) = (0, V)$, donde φ_U es el isomorfismo lineal definido en (3.3). Luego, $c(d\bar{H})_{(u,x)}(v, 0) = 0$ implica que $c = 0$. Por lo tanto, $(d\bar{H})_{(u,x)}$ es inyectiva.

Para verificar que $\text{Im } d\bar{H}_{(u,x)} \cap \text{Ker } (d\pi_M)_U = \{0\}$, comencemos por observar que $\text{Ker } (d\pi_M)_U = \text{span}\{\frac{d}{dt}|_0 \dot{\gamma}_U(t)\}$ y que $\varphi_U(\frac{d}{dt}|_0 \dot{\gamma}_U(t)) = (U, 0)$. Supongamos que $(U, Y) \in \varphi_U(\text{Im } d\bar{H}_{(u,x)})$. Entonces existirán números reales a, b, c y d tales que

$$\varphi_U^{-1}(U, Y) = a(d\bar{H})_{(u,x)}(0, |x|v) + b(d\bar{H})_{(u,x)}(0, \hat{x}) + c(d\bar{H})_{(u,x)}(v, 0) + d(d\bar{H})_{(u,x)}(-\hat{x}, |x|u).$$

Calculando cada uno de esos términos, por un lado, tenemos que

$$U = a|x|(d\exp_p)_x(v) + bX + d|x|(d\exp_p)_x(u).$$

Como $X = (d\exp_p)_x(\hat{x})$, por el Lema de Gauss se tiene que $(d\exp_p)_x(v)$ y $(d\exp_p)_x(u)$ no poseen componente en la dirección de X . Y al ser U y X ortogonales, se tiene que $b = 0$, con lo cual $U = (d\exp_p)_x(a|x|v + d|x|u)$. Por otro lado, sean $r_1(t) = (\cos t)x + (\sin t)|x|v$ y $r_4(t) = (\cos t)x + (\sin t)|x|u$. Es decir, las segundas componentes de c_1 y c_4 , respectivamente. Ambas curvas están en la esfera $S_{|x|} \subset T_pM$ de radio $|x|$. Tomando $Y_1 = \frac{D}{dt}|_0 \tau_{\gamma_{r_1(t)}}|_0^1(u)$ e $Y_2 = \frac{D}{dt}|_0 \tau_{\gamma_{r_4(t)}}|_0^1(u)$, tenemos que

$$Y = aY_1 + cV + d(Y_2 - X).$$

Consideremos las superficies parametrizadas en T_pM definidas de la siguiente manera,

$$f(s, t) = |x|(\cos t)((\cos s)\hat{x} + (\sin s)v) + |x|(\sin t)u,$$

y

$$u(s, t) = u - (\tan t)((\sin s)v - (\cos s)\hat{x})$$

para $s \in [0, 2\pi)$ y $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Se tiene que $u(s, t)$ y $f(s, t)$ son ortogonales y que $f(s, t) \in S_{|x|}$, para todo s y t .

Además, sea \mathcal{U} el campo que en los puntos $\exp_p(f(s, t))$ de la esfera geodésica $\exp_p(S_{|x|})$ está definido por el transporte paralelo de $u(s, t)$ a lo largo de $\gamma_{f(s, t)}$ desde 0 a 1. Como $r_1(t) = f(0, t)$ y $r_4(t) = f(s, 0)$, tenemos que

$$Y_1 = \left. \frac{D}{ds} \right|_0 \mathcal{U}(\exp_p(f(s, 0))) = \nabla_{(d\exp_p)_x(|x|v)} \mathcal{U},$$

$$Y_2 = \left. \frac{D}{dt} \right|_0 (\mathcal{U}(\exp_p(f(0, t))) + \tan(t)\tau_{\gamma_{r_4(t)}}|_0^1(\hat{x})) = \nabla_{(d\exp_p)_x(|x|u)} \mathcal{U} + X.$$

Con lo cual, $Y = \nabla_U \mathcal{U} + cV$. Se tiene que $\langle \nabla_U \mathcal{U}, X \rangle \neq 0$, pues es bien conocido que la segunda forma fundamental de las esferas geodésicas en una variedad de Hadamard es no degenerada. Luego, $Y \neq 0$ y $(U, 0) \notin \varphi_U(\text{Im } d\bar{H}_{(u, x)})$. Finalmente, como φ_U es un isomorfismo, se tiene que sólo el vector nulo está en la mencionada intersección.

Bibliografía

- [AGK11] D. Alekseevsky, B. Guilfoyle, and W. Klingenberg, *On the geometry of spaces of oriented geodesics*, Ann. Global Anal. Geom. **40** (2011), 389–409.
- [AMU00] T. Adachi, S. Maeda, and S. Udagawa, *Simpleness and closedness of circles in compact Hermitian symmetric spaces*, Tsukuba J. Math. **24** (2000), 1–13.
- [Anc] H. Anciaux, *Spaces of geodesics of pseudo-riemannian space forms and normal congruences of hypersurfaces*, to appear in Trans. of the AMS.
- [BJ08] A. Bolsinov and B. Jovanovic, *Magnetic flows on homogeneous spaces*, Comment. Math. Helv. **3** (2008), 679–700.
- [Bla02] D. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Birkhäuser, 2002.
- [BLP96] J. Beem, R. Low, and P. Parker, *Spaces of geodesics: products, coverings, connectedness*, Geom. Dedicata **59** (1996), 51–64.
- [dC92] M. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [Ebe96] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics, 1996.
- [Gei06] H. Geiges, *Handbook of differential geometry*, vol. 2, Elsevier, 2006.
- [GG10a] N. Georgiou and B. Guilfoyle, *A characterization of weingarten surfaces in hyperbolic 3-space*, Abh. Math. Semin. Univ. **80** (2010), 233–253.
- [GG10b] ———, *On the space of oriented geodesics of Hyperbolic 3-space*, Rocky Mountain J. Math. **40** (2010), 1183–1219.
- [GK05] B. Guilfoyle and W. Klingenberg, *An indefinite k ahler metric on the space of oriented lines*, J. London Math. Soc. **72** (2005), 497–509.
- [GS12a] Y. Godoy and M. Salvai, *The canonical contact structure on the space of oriented null geodesics of pseudospheres and products*, to appear in Adv. Geom. (2012).
- [GS12b] ———, *The magnetic flow on the manifold of oriented geodesics of a three dimensional space form*, to appear in Osaka J. Math (2012).
- [GW83] H. Gluck and F. Warner, *Great circle fibrations of the three-sphere*, Duke Math. J. **50** (1983), 107–132.
- [Har90] F. Harvey, *Spinors and Calibrations*, Academic Press, Inc., 1990.

- [Hon12] A. Honda, *Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space*, Tohoku Math. J. **64** (2012), 171–193.
- [Ika03] O. Ikawa, *Motion of charged particles in homogeneous spaces*, Proceedings of The Seventh International Workshop on Diff. Geom. **7** (2003), 29–40.
- [KM96] M. Kapovich and J. Millson, *The symplectic geometry of polygons in Euclidean space*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 479–513.
- [KT09] B. Khesin and S. Tabachnikov, *Pseudo-Riemannian geodesics and billiards*, Adv. Math. **221** (2009), 1364–1396.
- [LO10] R. Langevin and J. O’Hara, *Conformal arc-length as $\frac{1}{2}$ dimensional length of the set of osculating circles*, Comment. Math. Helv. **85** (2010), 273–312.
- [LOS11] R. Langevin, J. O’Hara, and S. Sakata, *Space of subspheres and conformal invariants of curves*, arXiv:1102.0344 (2011).
- [Low01] R. Low, *The space of null geodesics*, Nonlinear Anal. **47** (2001), 3005–3017.
- [LS11] R. Langevin and G. Solanes, *The geometry of canal surfaces and the length of curves in de sitter space*, Adv. Geom. **11** (2011), 585601.
- [O’N67] B. O’Neill, *Submersions and geodesics*, Duke Math. J. **34** (1967), 363–373.
- [O’N83] ———, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, 1983.
- [OR04] J. Ortega and T. Ratiu, *Momentum maps and Hamiltonian reduction*, Progress in Mathematics, vol. 222, Springer, 2004.
- [Sal02] M. Salvai, *Affine maximal torus fibrations of a compact lie group*, International J. Math. **13** (2002), 217–226.
- [Sal05] ———, *On the geometry of the space of oriented lines of Euclidean space*, Manuscr. Math. **118** (2005), 181–189.
- [Sal07] ———, *On the geometry of the space of oriented lines of Hyperbolic space*, Glasgow Math. J. **49** (2007), 357–366.
- [Sal09] ———, *Global smooth fibrations of \mathbb{R}^3 by oriented lines*, Bull. London Math. Soc. **41** (2009), 155–163.