Universidad Nacional de Córdoba
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

La transformada esférica asociada al par de Gelfand generalizado $(U(p,q), H_n)$

por Silvina M. Campos

Tesis presentada ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctora en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo, 2013

Dirigida por:
Linda V. Saal

Dedicado a
mis amores Lautaro y Nacho

Agradecimientos

En primer lugar quiero dar gracias a mi directora, Linda Saal, quien confió en mi y me dio las herramientas necesarias para lograr este trabajo. Fue un placer trabajar con ella, sin su ayuda y apoyo no podría haber terminado este doctorado. Siempre la recordaré con mucho cariño y admiración.

Muchas gracias a los miembros del jurado Fulvio Ricci, Roberto Miatello y Marta Urciuolo por las valiosas observaciones que hicieron a la mejora de este trabajo.

No puedo dejar de dar las gracias a Jorge Vargas, quien ha sido inmensamente generoso con nosotros.

Agradezco a SECyT, CONICET y FaMAF por el apoyo económico y por el lugar de trabajo.

Agradezco a los profesores que a lo largo de estos años me han enseñado.

Agradezco a mis compañeros de oficina, Yamile, Aure y Romi con quienes hemos compartido lindos momentos.

Finalmente, agradezco a mis padres por enseñarme a luchar frente a tantas adversidades, a mi esposo Nacho quien me acompaña incondicionalmente y a mi hijo Lautaro por regalarme felicidad cada día de mi vida.

Resumen

Denotemos por H_n el grupo de Heisenberg $2n+1$-dimensional. En este trabajo se estudia la transformada esférica asociada al par de Gelfand generalizado $(U(p,q), H_n)$, $p+q=n$, definida sobre el espacio de las funciones de clase Schwartz sobre H_n.

El espectro asociado a este par es identificado con un subconjunto Σ del plano.

En primer lugar, se prueba que la imagen por la transformada esférica de una función Schwartz, restringida a ciertos subconjuntos de Σ, está en la imagen de la transformada esférica asociada al par $(U(n), H_n)$.

Luego, se introduce el espacio $\mathcal{H}_n$ de funciones definidas sobre el plano mediante el cual caracterizamos la imagen, esto es, probamos que una función definida sobre el espectro Σ está en la imagen de la transformada esférica si y sólo si puede extenderse a una función en $\mathcal{H}_n$.

Finalmente, probamos que la caracterización anterior es óptima en el siguiente sentido: una función de decrecimiento rápido e infinitamente diferenciable sobre los semiplanos superior e inferior del plano (como son las funciones en $\mathcal{H}_n$) y de clase $C^k(\mathbb{R}^2)$ restringida a Σ es la transformada de una función Schwartz f sobre H_n si y sólo si la transformada de f restringida al eje vertical es de clase $C^{k+n-1}(\mathbb{R})$ si n es impar y de clase $C^{k+n-2}(\mathbb{R})$ si n es par.

En particular la transformada esférica de una función Schwartz f sobre H_n admite extensión Schwartz sobre el plano si y sólo si restringida al eje vertical está en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

MSC (2010): 43A80 Análisis sobre grupos de Lie específicos; 22E25 Grupos de Lie Nilpotentes y solubles.

Palabras claves: Grupo de Heisenberg, transformada esférica, espectro.

Abstract

We denote by H_n the Heisenberg group $2n+1$-dimensional. In this work we study the spherical transform associated to the generalized Gelfand pair $(U(p,q), H_n)$, $p+q=n$, that is defined on the space of Schwartz functions on H_n.

The spectrum associated to this pair is identified with a subset Σ of the plane.

First, we prove that the image of the spherical transform of a Schwartz function restricted to some subsets of Σ, lies in the image of the spherical transform associated to the pair $(U(n), H_n)$.

Then, we introduce the space $\mathcal{H}_n$ of functions defined on the plane and we use it in order to characterize the image, that is, we prove that a function defined on Σ is in the image of the spherical transform if and only if it extends to a function in $\mathcal{H}_n$.

Finally, we prove that the previous characterization is optimal in the following sense: the restriction to the spectrum of a function that is rapidly decreasing and infinitely differentiable on the lower and upper half planes (such as the functions in $\mathcal{H}_n$) and that is in $C^k(\mathbb{R}^2)$, is the spherical transform of a Schwartz function f on H_n if and only if the transform of f restricted to the vertical axis lies in $C^{k+n-1}(\mathbb{R})$ if n is odd and is in $C^{k+n-2}(\mathbb{R})$ if n is even.

In particular, the spherical transform of a Schwartz function f on H_n admits a Schwartz extension on the plane if and only if its restriction to the vertical axis lies in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

MSC (2010): 43A80 Analysis on other specific Lie groups; 22E25 Nilpotent and solvable Lie Groups.

Keys words: Heisenberg group, spherical transform, spectrum.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ de las funciones integrables sobre $\mathbb{R}^n$ es un álgebra de Banach conmutativa con el producto de convolución dado por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy,$$

y su espectro, esto es, el conjunto de funcionales lineales α no nulas tales que $\alpha(f * g) = \alpha(f)\alpha(g)$ para cualesquiera $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, está identificado via integración, con el conjunto de funciones

$$\{\chi_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \chi_\lambda(x) = e^{i\lambda\cdot x},\ \ \lambda \in \mathbb{R}^n\},$$

donde $\lambda \cdot x$ denota el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$(ver [13], pag. 207-208).

Luego la transformada de Gelfand de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ viene dada por

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ e^{-i\lambda\cdot x} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

y no es más que la transformada de Fourier. Un hecho fundamental del análisis armónico en $\mathbb{R}^n$ establece que la transformada de Fourier es un isomorfismo topológico del espacio de las funciones Schwartz sobre $\mathbb{R}^n$, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sobre sí mismo.

Si G es un grupo localmente compacto, $L^1(G)$ con el producto de convolución es un álgebra conmutativa si y sólo si G es conmutativo. Sin embargo, álgebras de Banach conmutativas modeladas sobre subálgebras de $L^1(G)$ aparecen naturalmente. En efecto, dada un subgrupo compacto K de G, decimos que (G, K) es un par de Gelfand si el álgebra de convolución

$$L^1(K\backslash G/K) := \{f \in L^1(G) : f(kxk') = f(x), \text{para todo } x \in G,\ k, k' \in K\}$$

es conmutativa.

Ejemplos relevantes de pares de Gelfand son los pares simétricos (G, K) de tipo no compacto, y pares del tipo $(K \ltimes N, K)$ donde N es un grupo de Lie nilpotente, K es cierto subgrupo de automorfismos de N y $K \ltimes N$ denota el producto semidirecto de K por N.

Si G es un grupo de Lie y K un subgrupo compacto de G tal que (G, K) es un par de Gelfand, entonces el espectro del algebra de convolución $L^1(K\backslash G/K)$ puede ser identificado, via integración, con el conjunto de las funciones esféricas acotadas dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos, y la transformada de Gelfand está definida por

$$\hat{f}(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})dx, \quad f \in L^1(K\backslash G/K).$$

Las funciones esféricas están caracterizadas como las funciones K-biinvariantes que son autofunciones simultáneas del álgebra $\mathcal{D}_K(G)$ de los operadores diferenciales G-invariantes sobre G/K, normalizadas por la condición $\varphi(e) = 1$.

En particular, si $G = \mathbb{R}^n$ y $K = \{0\}$ entonces el álgebra $\mathcal{D}_K(G)$ es el álgebra de los operadores diferenciales con coeficientes constantes y las funciones esféricas acotadas están dadas por $\chi_\lambda(x) = e^{i\lambda\cdot x}$ con $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Si G es semisimple, conexo, de centro finito, K es un subgrupo compacto maximal de G y $G = KAK$ es su descomposición polar, entonces la transformada de Gelfand es una biyección entre el espacio de Schwartz sobre G introducido por Harish-Chandra y el espacio de las funciones Schwartz sobre A invariantes por el grupo de Weyl (ver pag. 467 y 489 en [12]).

La clasificación de los pares $(K \ltimes H_n, K)$ donde H_n denota el grupo de Heisenberg, fue dada en [3] y descripciones de la imagen de la transformada esférica fueron obtenidas en [6] y [1]. Es fácil ver que $(K \ltimes H_n, K)$ es par de Gelfand, y usualmente lo denotaremos por (K, H_n), si y sólo si el álgebra de convolución $L^1_K(H_n) = \{f \in L^1(H_n) : f(kz) = f(z),\ \forall z \in H_n, k \in K\}$ es conmutativa y su espectro está dado, vía integración, por el conjunto de las funciones K-invariantes sobre H_n que son autofunciones simultáneas de los operadores diferenciales sobre H_n invariantes a izquierda y K-invariantes.

Denotaremos por $\mathcal{U}_K(\mathfrak{h}_n)$ esta álgebra, donde $\mathfrak{h}_n$ es el álgebra de Lie de H_n, y se tiene que $\mathcal{U}_K(\mathfrak{h}_n)$ es finitamente generada (ver [12]).

El siguiente resultado (ver [5]) permite identificar topológicamente el espectro del álgebra $L^1_K(H_n)$, que denotaremos por $\Delta(K, H_n)$, con un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^{d+1}$ para cierto número natural d.

Teorema 1.0.1. *Sea $\{L_1, ..., L_d, T\}$ un conjunto de generadores del álgebra $\mathcal{U}_K(h_n)$, donde T es la derivada en la dirección central de H_n. La asignación $E : \Delta(K, H(n)) \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+)^d$ definida por*

$$E(\varphi) = (i\hat{T}(\varphi), |\hat{L}_1(\varphi)|, ..., |\hat{L}_d(\varphi)|)$$

es un homeomorfismo sobre su imagen, donde $\hat{L}_j(\varphi)$ y $\hat{T}(\varphi)$ denotan los autovalores de L_j y T respectivamente asociados a φ.

En [2] se obtiene la siguiente caracterización de la imagen de la transformada esférica asociada al par de Gelfand (K, H_n).

Sea $\mathcal{S}(H_n)$ el espacio de las funciones Schwartz sobre H_n y $S_K(H_n)$ el subespacio de las funciones K invariantes. Sea

$$\mathcal{S}(\Delta(K, H_n)) = \{F : \Delta(K, H_n) \to \mathbb{C} : \exists\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}),\ \varphi|_{\Delta(K,H_n)} = F\}.$$

Dotamos a $\mathcal{S}(\Delta(K, H_n))$ de la topología cociente inducida por la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$.

Teorema 1.0.2. *La transformada de Gelfand $^\wedge : \mathcal{S}_K(H_n) \to \mathcal{S}(\Delta(K, H_n))$ es un isomorfismo topológico entre $\mathcal{S}_K(H_n)$ y $\mathcal{S}(\Delta(K, H_n))$.*

Más aún, sea (K,N) un par de Gelfand en la lista de Vinberg (ver [19]), $\mathcal{S}_K(N)$ el espacio de las funciones de clase Schwartz K-invariantes sobre N, Σ el espectro asociado al par (K,N), el cual está embebido en cierto $\mathbb{R}^d$ y $\mathcal{S}(\Sigma)$ el espacio de restricciones a Σ de funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, fue probado por Fischer, Ricci y Yakimova en [8] el siguiente

Teorema 1.0.3. *La transformada de Gelfand es un isomorfismo de $\mathcal{S}_K(N)$ sobre $\mathcal{S}(\Sigma)$.*

En este trabajo nos interesa desarrollar el análisis esférico asociado al par de Gelfand generalizado $(U(p,q)\ltimes H_n, U(p,q))$ donde

$$U(p,q)=\{g\in Gl(n,\mathbb{C}):\ B(gz,gw)=B(z,w)\ \forall(z,w)\in\mathbb{C}^n\}$$

y

$$B(z,w)=\sum_{j=1}^{p} z_j\bar{w}_j-\sum_{p+1}^{n} z_j\bar{w}_j.$$

El grupo de Heisenberg puede ser descripto como $H_n=\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ con el producto

$$(z,t)(w,s)=(z+w,t+s-\frac{1}{2}ImB(z,w)).$$

Entonces $U(p,q)$ actúa por automorfismos sobre H_n via

$$g.(z,t)=(gz,t) \text{ para } (z,t)\in H_n.$$

Luego $U(n,0)=U(n)$ donde $U(n)$ denota el grupo de las transformaciones unitarias sobre $\mathbb{C}^n$.

Con el fin de motivar la definición de la transformada esférica normalizada asociada a $(U(p,q),H_n)$ y describir su imagen, especificaremos para el par de Gelfand $(U(n),H_n)$ los resultados arriba mencionados.

Sea $\{T,X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n\}$ la base standard de h_n. Esto es, los corchetes $[X_i,Y_j]=\delta_{i,j}T$ y todos los otros son nulos. Sea $D=\sum_{j=0}^{n}X_j^2+Y_j^2$ el operador sub-Laplaciano. Entonces $\mathcal{U}_{U(n)}(h_n)$ está generada por D y T.

Las funciones esféricas acotadas están parametrizadas por $\lambda\neq 0$ y $k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ y por $\sigma\geq 0$, y satisfacen

$$iT(\Phi_{\lambda,k})=\lambda\ \Phi_{\lambda,k}, \qquad -D(\Phi_{\lambda,k})=(2k+n)|\lambda|\ \Phi_{\lambda,k}, \tag{1.0.1}$$

$$iT(\eta_\sigma)=0, \qquad -D(\eta_\sigma)=\sigma^2\ \eta_\sigma. \tag{1.0.2}$$

El teorema 1.0.1 identifica el espectro asociado al par de Gelfand $(U(n),H_n)$ con el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$

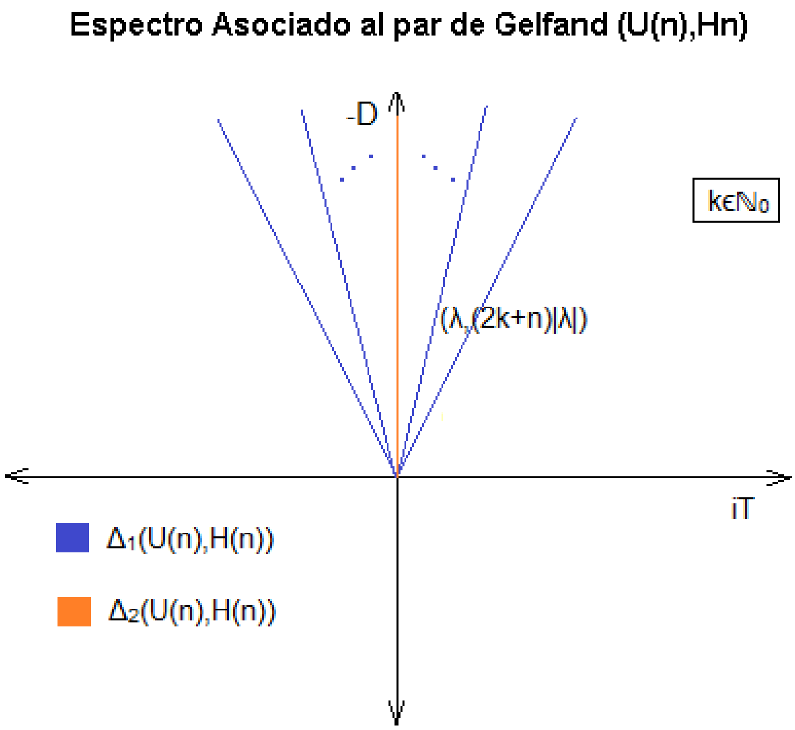
$$\Delta(U(n),H_n)=\Delta_1(U(n),H_n)\cup\Delta_2(U(n),H_n),$$

equipado de la topología relativa, donde

$$\Delta_1(U(n),H_n)=\{(\lambda,(2k+n)|\lambda|):\lambda\neq 0,\ k\in\mathbb{N}_0\}$$

y

$$\Delta_2(U(n), H_n) = \{(0, \sigma) : \sigma \geq 0\}.$$



Para F definida sobre $\Delta(U(n), H_n)$ escribiremos $F(\lambda, k) := F(\lambda, (2k+n)|\lambda|)$.

Con el fin de enunciar la caracterización de la imagen de la transformada esférica dada por Benson, Jenkins y Ratcliff en [6] para el caso particular $(U(n), H_n)$, introducimos la siguiente

Definición 1.0.4. *Sea F una función sobre $\Delta(U(n), H_n)$. Decimos que F es rápidamente decreciente sobre $\Delta(U(n), H_n)$ si*

(i) *F es continua sobre $\Delta(U(n), H_n)$,*

(ii) *la función F_0 definida por $F_0(r) = F(0, r^2)$ pertenece a $\mathcal{S}([0, +\infty))$,*

(iii) *la aplicación $\lambda \mapsto F(\lambda, k)$ es diferenciable sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ para todo k,*

(iv) *para cada $j, N \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $c_{j,N}$ tal que*

$$\left| \frac{\partial^j F}{\partial \lambda^j}(\lambda, k) \right| \leq \frac{c_{j,N}}{|\lambda|^{j+N}(2k+n)^N}.$$

Diremos que una función continua sobre $\Delta_1(U(n), H_n)$ es rápidamente decreciente si se extiende a una función rápidamente decreciente sobre $\Delta(U(n), H_n)$. Debido a que $\Delta_1(U(n), H_n)$ es denso en $\Delta(U(n), H_n)$, tal extensión si existe es única.

Definición 1.0.5. *Sea F una función sobre $\Delta_1(U(n), H_n)$ la cual es diferenciable en λ. Sean M_n^+F y M_n^-F las funciones definidas sobre $\Delta_1(U(n), H_n)$ por*

$$M_n^-F(\lambda, k) = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, k) - \frac{k}{\lambda}[F(\lambda, k) - F(\lambda, k-1)], & \text{para } \lambda > 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, k) - \frac{k+n}{\lambda}[F(\lambda, k+1) - F(\lambda, k)], & \text{para } \lambda < 0, \end{cases} \tag{1.0.3}$$

y

$$M_n^+F(\lambda, k) = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, k) - \frac{k+n}{\lambda}[F(\lambda, k+1) - F(\lambda, k)], & \text{para } \lambda > 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, k) - \frac{k}{\lambda}[F(\lambda, k) - F(\lambda, k-1)], & \text{para } \lambda < 0. \end{cases} \tag{1.0.4}$$

Definición 1.0.6. *$\hat{\mathcal{S}}(U(n), H_n)$ es el conjunto de las funciones $F : \Delta(U(n), H_n) \to \mathbb{C}$ para las cuales $(M_n^+)^i (M_n^-)^j F$ es rápidamente decreciente para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$.*

Denotamos por $\mathcal{S}_{U(n)}(H_n)$ al espacio de las funciones Schwartz y $U(n)$-invariantes sobre H_n. El siguiente teorema enuncia la caracterización probada en [6].

Teorema 1.0.7. *Si $f \in \mathcal{S}_{U(n)}(H_n)$ entonces $\hat{f} \in \hat{\mathcal{S}}(U(n), H_n)$. Recíprocamente, si $F \in \hat{\mathcal{S}}(U(n), H_n)$ entonces $F = \hat{f}$ para alguna $f \in \mathcal{S}_{U(n)}(H_n)$. Además, la aplicación $\wedge$: $\mathcal{S}_{U(n)}(H_n) \to \hat{\mathcal{S}}(U(n), H_n)$ es una biyección.*

Luego, en [18], Veneruso probó el siguiente

Teorema 1.0.8. *Sea F la restricción a $\Delta(U(n), H_n)$ de una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Entonces existe $f \in \mathcal{S}_{U(n)}(H_n)$ tal que $\hat{f} = F$.*

Más adelante, Astengo, Di Blasio y Ricci en [1] demostraron el siguiente

Teorema 1.0.9. *Para $f \in \mathcal{S}_{U(n)}(H_n)$ su transformada de Gelfand $\hat{f}$ admite una extensión Schwartz sobre $\mathbb{R}^2$. Más precisamente, para cualquier norma Schwartz $\| \ \|_N$, existe una constante C_N y una norma Schwartz $\| \ \|_{N'}$ tales que $\hat{f}$ se extiende a una función $\Phi_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ con $\|\Phi_N\|_N \leq C_N \|f\|_{N'}$.*

Corolario 1.0.10. *La transformada de Gelfand $\wedge : \mathcal{S}_{U(n)}(H_n) \to \mathcal{S}(\Delta(U(n), H_n))$ es un isomorfismo topológico entre $\mathcal{S}_{U(n)}(H_n)$ y $\mathcal{S}(\Delta(U(n), H_n))$.*

Supongamos ahora que $n \geq 2$, p y q números naturales tales que $p + q = n$. Como $(U(p,q) \ltimes H_n, U(p,q))$ es un par de Gelfand generalizado, el álgebra de los operadores diferenciales sobre H_n invariantes a izquierda que conmutan con la acción de $U(p,q)$ es conmutativa. Más precisamente está generada por

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{p} (X_j^2 + Y_j^2) - \sum_{j=p+1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2) \ \text{ y } \ T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Con el fin de introducir la noción de espectro asociado al par $(U(p,q), H_n)$ recordamos que si (K, H_n) es de Gelfand entonces toda función esférica es de tipo positivo (ver [4]), en contraste con el caso semisimple.

Si $\mathcal{P}$ denota el cono de funciones K-invariantes de tipo positivo, entonces $\Delta(K, H_n)$ es precisamente el conjunto de puntos extremales de $\mathcal{P}$. Si K no es compacto, $L_K^1(H_n)$ es trivial, pero es natural definir el espectro $\Delta(K, H_n)$ asociado al par (K, H_n) como el conjunto de distribuciones K-invariantes sobre H_n de tipo positivo extremales, las cuales están en correspondencia con las representaciones unitarias irreducibles de $K \ltimes H_n$. Además, toda distribución extremal es necesariamente esférica, es decir es autodistribucion simultánea de $\mathcal{U}_K(\mathfrak{h}_n)$ (ver [7]).

Si $K = U(p,q)$, las representaciones unitarias irreducibles fueron determinadas en [20] y están parametrizadas por $\{\pi_{\lambda,k} : \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{\pi_\sigma : \sigma \in \mathbb{R}\}$ y la representación trivial. Además, en este caso las distribuciones que las reproducen son temperadas (ver [10]).

Una familia de distribuciones esféricas fueron calculadas en [16], [9] y [11], y satisfacen

$$iT(S_{\lambda,k}) = \lambda\ S_{\lambda,k}, \qquad -\mathcal{D}(S_{\lambda,k}) = (2k+p-q)|\lambda|\ S_{\lambda,k}, \tag{1.0.5}$$
$$iT(S_\sigma) = 0, \qquad -\mathcal{D}(S_\sigma) = \sigma\ S_\sigma. \tag{1.0.6}$$

Más aún, el espacio de las distribuciones temperadas que satisfacen (1.0.5) y (1.0.6) es unidimensional excepto para $\sigma = 0$ en cuyo caso esta generado por S_0 y la trivial.

Teorema 1.0.11. *(ver [11]) La asignación $\mathcal{E} : \Delta(U(p,q), H(n)) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}^2$ definida por*

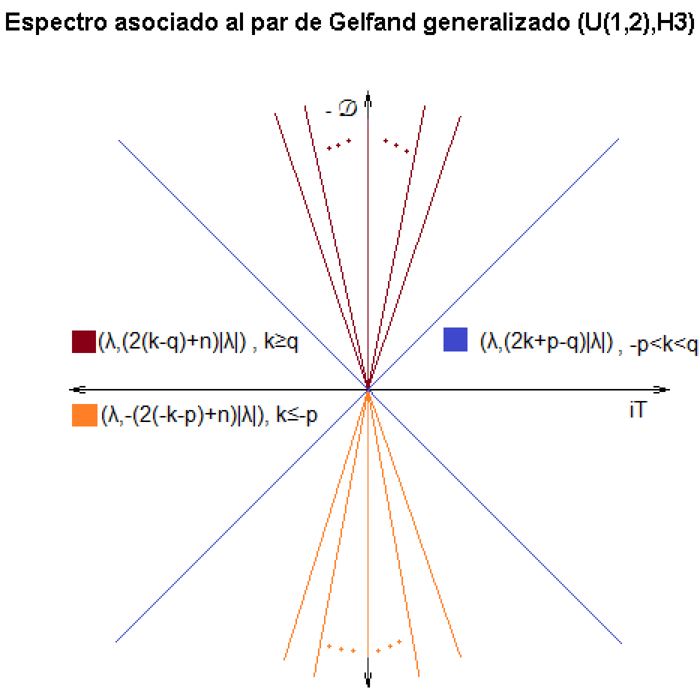
$$\mathcal{E}(\varphi) = (i\hat{T}(\varphi), -\hat{\mathcal{D}}(\varphi))$$

es un homeomorfismo sobre su imagen, donde $\hat{\mathcal{D}}(\varphi)$ y $\hat{T}(\varphi)$ denotan los autovalores de $\mathcal{D}$ y T asociados a φ respectivamente.

Así, de ahora en adelante identificamos el espectro asociado al par de Gelfand generalizado $(U(p,q), H_n)$ con

$$\Sigma = \{(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) : \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,\sigma) : \sigma \in \mathbb{R}\}$$

dotado de la topología relativa de $\mathbb{R}^2$.



Para probar el Teorema 1.0.11 los autores mostraron que

$$\lim_{\substack{(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\to(0,\sigma)\\ \sigma>0}} |\lambda|^{n-1}\langle S_{\lambda,k}, f\rangle = \langle S_\sigma, f\rangle, \tag{1.0.7}$$

$$\lim_{\substack{(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\to(0,\sigma)\\ \sigma<0}} (-1)^{n-2}|\lambda|^{n-1}\langle S_{\lambda,k}, f\rangle = \langle S_\sigma, f\rangle. \tag{1.0.8}$$

Este resultado motiva la noción de la transformada esférica normalizada asociada al par $(U(p,q), H_n)$ la cual, a diferencia del caso compacto, está definida sobre todo el espacio de las funciones Schwartz sobre H_n. Mas aún, en los Preliminares veremos que dos funciones Schwartz f, f' sobre H_n tienen la misma transformada si y sólo si $\int_{U(p,q)} f(gz,t)dg = \int_{U(p,q)} f'(gz,t)dg$ para todo $(z,t) \in H_n$.

Definición 1.0.12. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. La transformada esférica normalizada de f es la función $\mathcal{F}(f)$ definida sobre Σ por*

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) = \begin{cases} |\lambda|^{n-1}\langle S_{\lambda,k}, f\rangle, & k \geq 0, \\ (-1)^{n-2}|\lambda|^{n-1}\langle S_{\lambda,k}, f\rangle, & k < 0, \end{cases} \tag{1.0.9}$$

y por

$$\mathcal{F}(f)(0,\sigma) = \langle S_\sigma, f\rangle. \tag{1.0.10}$$

Observación 1.0.13. *Para $f \in \mathcal{S}(H_n)$, $\mathcal{F}(f) : \Sigma \to \mathbb{C}$ es una función continua, como consecuencia de* (1.0.7) *y* (1.0.8)*.*

El resultado principal probado en el primer capítulo de esta tesis es el siguiente

Teorema 1.0.14. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Sean F y G definidas sobre $\Delta(U(n), H_n)$ por*

$$F(\lambda,(2k+n)|\lambda|) = \mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+n)|\lambda|),\ k \geq 0$$

$$F(0,\sigma) = \mathcal{F}(f)(0,\sigma),\ \sigma \geq 0$$

y

$$G(\lambda,(2k+n)|\lambda|) = \mathcal{F}(f)(\lambda,-(2k+n)|\lambda|),\ k \geq 0$$

$$G(0,\sigma) = \mathcal{F}(f)(0,-\sigma),\ \sigma \geq 0.$$

Entonces existen $h, g \in \mathcal{S}_{U(n)}(H_n)$ tales que $\hat{h} = F$ y $\hat{g} = G$. Más aún, usando el Teorema de Inversión de la transformada esférica asociada al par de Gelfand $(U(n), H_n)$, tenemos que

$$h(z,t) = (\tfrac{1}{2\pi})^{n+1} \int_{\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \binom{k+n+1}{k}\ F(\lambda,(2k+n)|\lambda|)\ \Phi_{\lambda,k}(z,t)|\lambda|^n\ d\lambda$$

$$g(z,t) = (\tfrac{1}{2\pi})^{n+1} \int_{\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \binom{k+n+1}{k}\ G(\lambda,(2k+n)|\lambda|)\ \Phi_{\lambda,k}(z,t)|\lambda|^n\ d\lambda.$$

Observemos que F es la restricción a $\Delta(U(n), H_n)$ de $\mathcal{F}(f)$ y G es la restricción a $-\Delta(U(n), H_n)$ de $\mathcal{F}(f)$. Además, notamos que la unión de estos dos subconjuntos no cubre Σ.

La prueba esta basada en la caracterización de la imagen de la transformada esférica dada por Benson, Jenkins y Ratcliff en [6]. Este resultado enuncia la relación que existe entre la transformada esférica normalizada asociada al par generalizado $(U(p,q), H_n)$ y la transformada esférica asociada al par de Gelfand $(U(n), H_n)$. Además, por el resultado enunciado en [1] tenemos el siguiente

Corolario 1.0.15. *Para $f \in \mathcal{S}(H_n)$, las funciones F y G admiten extensión Schwartz sobre $\mathbb{R}^2$.*

Este corolario nos indica que $\mathcal{F}(f)$ restringida a ciertos subconjuntos del espectro Σ se puede extender a funciones de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Nos preguntamos entonces acerca de qué tipo de extensión admite $\mathcal{F}(f)$. En los preliminares veremos que si $f \in \mathcal{S}(H_n)$, entonces la aplicación $\sigma \mapsto \mathcal{F}(f)(0,\sigma)$ es de clase C^{n-2} en el origen, y por lo tanto sólo podemos esperar una extensión de clase $C^{n-2}(\mathbb{R}^2)$.

En la primera sección del último capítulo mostramos el siguiente resultado análogo al probado por Veneruso

Teorema 1.0.16. *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ entonces existe $f \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que $\mathcal{F}(f) = \varphi|_{\Sigma}$.*

En la segunda sección hallamos una primera caracterización de la imagen de la transformada esférica normalizada asociada al par generalizado $(U(p,q), H_n)$.

Definición 1.0.17. *Sea $\mathcal{H}_n$ el espacio de funciones φ definidas sobre $\mathbb{R}^2$ de la forma*

$$\varphi(\lambda, s) = \varphi_1(\lambda, s) + \left(\prod_{k=-p+1}^{q-1} (s - (2k + p - q)|\lambda|) \right) \varphi_2(\lambda, s)\ H(s),$$

donde $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $H(s) = \chi_{(0,\infty)}$ es la función de Heaviside.

Teorema 1.0.18. *Sea F definida sobre Σ. Entonces, existe $f \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que $\mathcal{F}(f) = F$ si y sólo si F admite una extensión en $\mathcal{H}_n$.*

Las pruebas de estos teoremas siguen las ideas usadas en [1] para encontrar una extensión Schwartz sobre $\mathbb{R}^2$ de la transformada esférica asociada al par $(U(n), H_n)$ de una función $f \in \mathcal{S}_{U(n)}(H_n)$. El cambio fundamental es que la transformada esférica $\mathcal{F}(f)$ de una función $f \in \mathcal{S}(H_n)$ restringida a $\{0\} \times \mathbb{R}$ se extiende a una función en $\mathcal{H}_n$ y no a una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

En la tercera sección de este capítulo obtuvimos una condición necesaria y suficiente para que, al igual que en el caso $q = 0$ estudiado por Astengo, Di Blasio y Ricci, la transformada esférica normalizada de una función $f \in \mathcal{S}(H_n)$ pueda extenderse a una función de clase Schwartz sobre $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.0.19. *Dada $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Entonces, $\mathcal{F}(f)$ admite extensión de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ si y sólo si $s \mapsto \mathcal{F}(f)(0,s)$ es de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

En la cuarta sección enunciamos una segunda caracterización de la imagen de la transformada esférica.

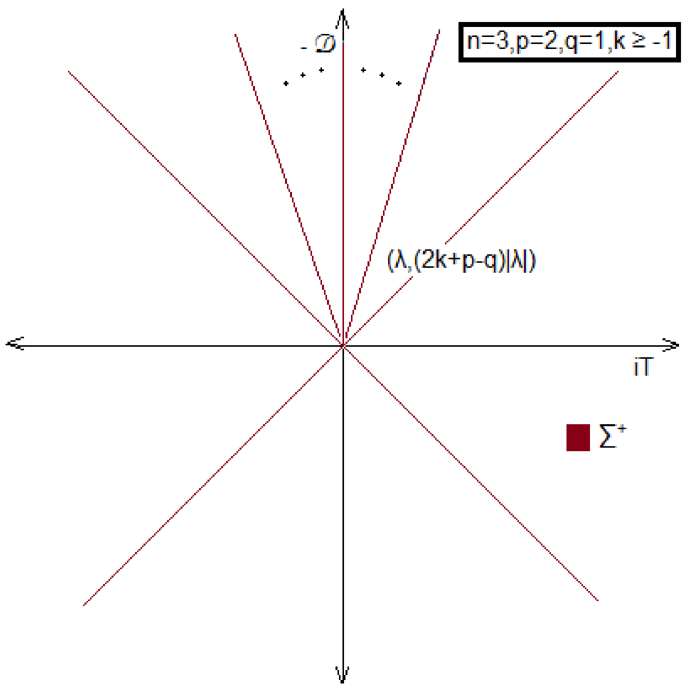
Sean

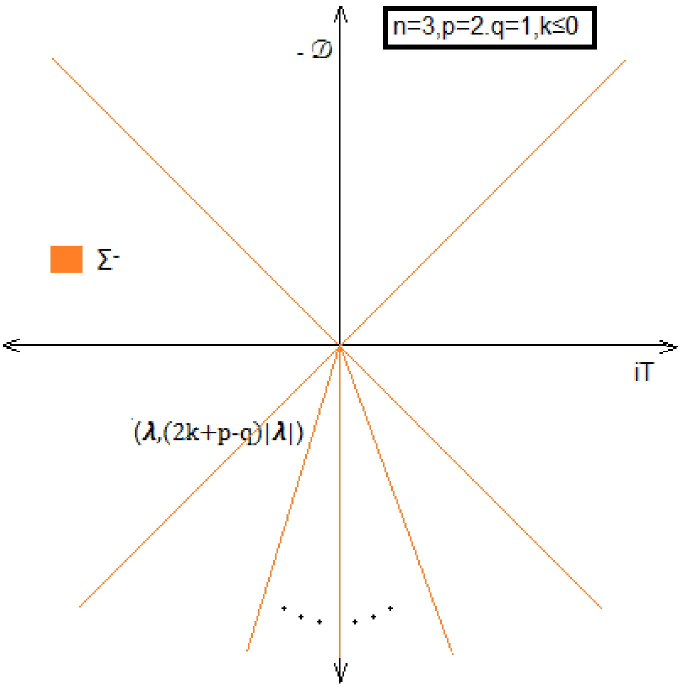
$$\Sigma^{+} = \{(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) : \lambda \neq 0,\ k \geq -p+1\} \cup \{(0,\sigma) : \sigma \geq 0\}$$

y

$$\Sigma^{-} = \{(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) : \lambda \neq 0, k \leq q-1\} \cup \{(0,\sigma) : \sigma \leq 0\},$$

subconjuntos de Σ.





Teorema 1.0.20. *Sea F definida sobre Σ. Entonces, F está en la imagen de la transformada esférica normalizada si y sólo si existen $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tales que $\varphi|_{\Sigma^+} = F|_{\Sigma^+}$ y $\psi|_{\Sigma^-} = F|_{\Sigma^-}$.*

Corolario 1.0.21. *Sea F definida sobre Σ, las siguientes sentencias son equivalentes*

(i) *existe $f \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que $F = \mathcal{F}(f)$,*

(ii) *existe $\varphi \in \mathcal{H}_n$ tal que $F = \varphi|_{\Sigma}$,*

(iii) *existen $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tales que $F|_{\Sigma^+} = \varphi|_{\Sigma^+}$ y $F|_{\Sigma^-} = \psi|_{\Sigma^-}$.*

Finalmente, en la última sección de este capítulo, encontramos la condición necesaria y suficiente para que la transformada esférica de una función $f \in \mathcal{S}(H_n)$ admita una extensión φ sobre $\mathbb{R}^2$ de decrecimiento rápido sobre los semiplanos inferior y superior del plano (como son las funciones de $\mathcal{H}_n$) y de clase $C^k(\mathbb{R}^2)$.

Proposición 1.0.22. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Si $s \mapsto \mathcal{F}(f)(0, s)$ es de clase C^{k+n-2} en el origen entonces $\mathcal{F}(f)$ admite extensión sobre $\mathbb{R}^2$ de la forma*

$$\varphi(\lambda, s) = \varphi_1(\lambda, s) + s^k \left(\prod_{k=-p+1}^{q-1} (s - (2k + p - q)|\lambda|) \right) \varphi_2(\lambda, s) H(s).$$

Teorema 1.0.23. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Supongamos que $\mathcal{F}(f)$ admite una extensión φ tal que satisface las siguientes condiciones*

(i) *φ es de clase C^∞ y de decrecimiento rápido sobre $\{(\lambda, s) : s > 0\}$,*

(ii) *es de clase C^∞ y de decrecimiento rápido sobre $\{(\lambda, s) : s < 0\}$ y*

(iii) *es de clase* $C^k(\mathbb{R}^2)$.

Entonces $s \mapsto \mathcal{F}(f)(0,s)$ *es de clase* $C^{k+n-1}(\mathbb{R})$ *si* n *es impar y de clase* $C^{k+n-2}(\mathbb{R})$ *si* n *es par. Más aún, cualquier extensión* φ *de* $\mathcal{F}(f)$ *que satisfaga (i), (ii) y (iii) es de la forma:*

$$\varphi(\lambda,s) = \varphi_1(\lambda,s) + s^{k+1} \prod_{\substack{k=-p+1 \\ 2k+p-q\neq 0}}^{q-1} (s-(2k+p-q)|\lambda|)\varphi_2(\lambda,s)\ H(s),$$

donde $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, *es decir* $\varphi \in \mathcal{H}_n$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Pares de Gelfand

Sean $n \geq 1$. Sea H_n el grupo de Heisenberg $2n+1$-dimensional definido por $H_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con el producto

$$(z,t)(w,s) = (z+w, t+s-\tfrac{1}{2}\langle z,w\rangle)$$

donde $\langle z,w\rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{C}^n$.

Sea $U(n) = \{k \in Gl(n,\mathbb{C}) : \ \langle kz, kw\rangle = \langle z,w\rangle \ \forall z,w \in \mathbb{C}^n\}$. Entonces $U(n)$ actúa por automorfismo sobre H_n via

$$k \cdot (z,t) = (kz,t) \text{ para } (z,t) \in H_n.$$

Sea $\mathfrak{h}_n$ el álgebra de Lie de H_n y sea $\{T, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$ la base standard de $\mathfrak{h}_n$. Esto es, los corchetes $[X_i, Y_j] = \delta_{ij}\, T$ y todos los otros son nulos.

Sea $G = K \ltimes H_n$ el producto semidirecto de K por H_n, donde K es una subálgebra de automorfismos de H_n que actúa trivialmente sobre el centro. El producto en G viene dado por

$$(k,z,t)(k',z',t') = (kk', (kz',t')(z,t)).$$

Observemos que si I es la identidad de $U(p,q)$ y $(0,0)$ la identidad de H_n, entonces

$$(k,z,t) = (I,z,t)(k,0,0)$$

y

$$(k,0)(I,z,t) = (k,(kz,t)) = (I,kz,t)(k,0,0).$$

Esto permite identificar funciones K-invariantes sobre H_n con funciones K-biinvariantes sobre G. En efecto, dada φ una función K-invariante sobre H_n le hacemos corresponder la función $\tilde{\varphi}$ definida sobre $K \ltimes H_n$ por

$$\tilde{\varphi}(k,z,t) = \varphi(z,t).$$

Luego identificamos $L^1_K(H_n)$ el espacio de las funciones integrables K-invariantes sobre H_n con $L^1(K\backslash G/K)$ el de las funciones integrables bi-K-invariantes sobre G.

Sea K un subgrupo **compacto** del grupo de automorfismos de H_n. Entonces $(K \ltimes H_n, K)$ es un par de Gelfand si y sólo si $L^1_K(H_n)$ es un álgebra conmutativa con el producto de convolución. Usualmente escribimos (K, H_n) en vez de $(K \ltimes H_n, K)$.

Además son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) El álgebra $L^1_K(H_n)$ de las funciones integrables sobre H_n que son además K-invariantes, es conmutativa.

(ii) La subalgebra $\mathcal{U}_K(h_n)$ de los operadores diferenciales invariantes a izquierda sobre H_n que conmutan con la acción de K es conmutativa.

(iii) Para cada representación irreducible (π, V) de $K \ltimes H_n$, el espacio de vectores fijos por K es a lo sumo de dimensión 1.

Observemos que en este caso el álgebra de operadores diferenciales G-invariantes sobre G/K es isomorfo a $\mathcal{U}_K(\mathfrak{h}_n)$.

Si (K, H_n) es un par de Gelfand, su espectro, denotado por $\Delta(K, H_n)$, es el conjunto de funcionales lineales no nulos de $L^1_K(H_n)$ tales que

$$\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g), \quad \forall f, g \in L^1_K(H_n).$$

Via integración, puede ser identificado con el conjunto de las funciones esféricas acotadas, esto es, cualquier elemento del espectro viene dado por

$$f \mapsto \int_{H_n} f(x)\varphi(x^{-1})dx, \quad \forall f \in L^1_K(H_n),$$

donde φ es una función K-esférica. Una función K-esférica está caracterizada por las siguientes condiciones

(i) φ es K-invariante, esto es, $\varphi(kz, t) = \varphi(z, t)$ para todo $k \in K$ y $(z, t) \in H_n$.

(ii) φ es una autofunción simultánea de los operadores de $\mathcal{U}_K(\mathfrak{h}_n)$.

(iii) $\varphi(0, 0) = 1$.

Definición 2.1.1. *Sea (K, H_n) un par de Gelfand. La transformada K-esférica es la transformada de Gelfand asociada a $L^1_K(H_n)$, es decir, dada $f \in L^1_K(H_n)$ su transformada esférica $\hat{f}$ está definida sobre $\Delta(K, H_n)$ por*

$$\hat{f}(\psi) := \int_{H_n} f(z, t)\ \bar{\psi}(z, t)\ dz\ dt, \tag{2.1.1}$$

donde "dzdt"denota la medida de Haar para el grupo H_n, la cual es simplemente la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$.

Es bien sabido que $(U(n), H_n)$ es un par de Gelfand, y en este caso hay sólo dos tipos de funciones $U(n)$-esféricas acotadas

1. Las funciones esféricas de tipo I, i.e., aquéllas que restringidas al centro de H_n son caracteres no triviales, vienen dadas por

$$\Phi_{\lambda,k}(z, t) = e^{-i\lambda t}\mathcal{L}^{n-1}_k(\frac{|\lambda||z|^2}{2})e^{\frac{-|\lambda||z|^2}{4}}, \ \lambda \neq 0, k \geq 0,$$

donde $\mathcal{L}^{n-1}_k$ es el polinomio de Laguerre de orden $n-1$ y grado k normalizado por $\mathcal{L}^{n-1}_k(0) = 1$.

2. Las funciones esféricas de tipo II, i.e., aquéllas que son constantes sobre el centro, vienen dadas, para $r > 0$ por

$$\eta_r(z,t) = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(|z|r)^{n-1}} J_{n-1}(|z|r)$$

donde J_{n-1} es la función de Bessel de orden $n-1$ de primera clase, y para $\omega = 0$ por

$$\eta_0(z,t) = 1.$$

Además, se sabe que $\mathcal{U}_{U(n)}(\mathfrak{h}_n)$ está generada por D y T donde $D = \sum_{j=1}^{n}(X_j^2 + Y_j^2)$ es el operador sub-Laplaciano. Y las funciones $U(n)$-esféricas satisfacen

$$iT(\Phi_{\lambda,k}) = \lambda\ \Phi_{\lambda,k}, \qquad -D(\Phi_{\lambda,k}) = (2k+n)|\lambda|\ \Phi_{\lambda,k}, \tag{2.1.2}$$

$$iT(\eta_\sigma) = 0, \qquad -D(\eta_\sigma) = \sigma\ \eta_\sigma. \tag{2.1.3}$$

Luego, el Teorema 1.0.1 enunciado en la introducción identifica el espectro asociado al par de Gelfand $(U(n), H_n)$ con el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$\Delta(U(n), H_n) = \Delta_1(U(n), H_n) \cup \Delta_2(U(n), H_n),$$

equipado de la topología relativa, donde

$$\Delta_1(U(n), H_n) = \{(\lambda, (2k+n)|\lambda|) : \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{N}_0\}$$

y

$$\Delta_2(U(n), H_n) = \{(0,\sigma) : \sigma \geq 0\}.$$

Haciendo uso de esta identificación, la transformada de Gelfand de una función $f \in L^1_K(H_n)$ está definida por

$$\hat{f}(\lambda, (2k+n)|\lambda|) = \int_{H_n} f(z,t)\ \varphi_{\lambda,k}(z,t)\ dz\ dt$$

para $\lambda \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ y por

$$\hat{f}(0,\sigma) = \int_{H_n} f(z,t)\ \eta_\sigma(z,t)\ dz\ dt$$

para $\sigma \geq 0$, donde $\sigma = |w|^2$.

2.2. Pares de Gelfand generalizados

Sea G un grupo de Lie unimodular y $K \subset G$ un subgrupo unimodular cerrado, **no necesariamente compacto**. Dada una representación unitaria (π, V) de G, un vector $v \in V$ se dice un vector C^∞ si la aplicación $g \mapsto \pi(g)v$ es una aplicación C^∞ de G en V. Denotamos por V^∞ al espacio de los vectores C^∞ dotado de la topología natural de Sobolev que lo hace un espacio de Fréchet. Para X en el álgebra de Lie de G y $v \in V_\infty$, establecemos

$$\pi(X)v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp\ tX)v.$$

Las seminormas están definidas por

$$p_m(v) = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\pi(X_1)^{\alpha_1} \ldots \pi(X_k)^{\alpha_k}(v)\|$$

donde $X_1, \ldots, X_k$ es una base del álgebra de Lie de G, and $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$.

$V^{-\infty}$ denotará el espacio de los formas lineales conjugadas y continuas sobre V^{∞}. Así $V^{\infty} \subset V \subset V^{-\infty}$. Los elementos de $V^{-\infty}$ son llamados vectores distribución. La acción de G sobre V^{∞} nos da una acción correspondiente sobre $V^{-\infty}$:

$$\langle \pi_{-\infty}(g)\phi, v\rangle = \langle \phi, \pi(g)v\rangle, \quad \phi \in V^{-\infty}, v \in V^{\infty}.$$

Sea

$$V_1^{-\infty} = \{\phi \in V^{-\infty} : \pi_{-\infty}(k)\phi = \phi \text{ para todo } k \in K\},$$

el espacio de los vectores distribución fijados por K.

Definición 2.2.1. *Un par (G, K) es llamado un par de Gelfand generalizado si para cada representación unitaria irreducible (π, V) de G el espacio $V_1^{-\infty}$ es a lo sumo unidimensional.*

Es sabido que (ver [17]) si (G, K) es un par de Gelfand generalizado entonces el álgebra de los operadores diferenciales G-invariantes sobre G/K es conmutativo.

Sean $n \geq 2$ y p, q números naturales tales que $p + q = n$. Describiremos H_n el grupo de Heisenberg $2n + 1$-dimensional definido por $H_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con el producto

$$(z, t)(w, s) = (z + w, t + s - \frac{1}{2} ImB(z, w))$$

donde

$$B(z, w) = \sum_{j=1}^{p} z_j \bar{w}_j - \sum_{p+1}^{n} z_j \bar{w}_j.$$

Sea

$$U(p, q) = \{g \in Gl(n, \mathbb{C}) : \ B(gz, gw) = B(z, w) \ \forall (z, w) \in \mathbb{C}^n\},$$

entonces $U(p, q)$ actúa por automorfismo sobre H_n vía

$$g.(z, t) = (gz, t) \text{ para } (z, t) \in H_n.$$

Se sabe que $(U(p, q) \ltimes H_n, U(p, q))$ es un par de Gelfand generalizado (ver [16]), y es usualmente denotado por $(U(p, q), H_n)$. Por lo tanto, el álgebra de los operadores diferenciales invariantes a izquierda que conmutan con la acción de $U(p, q)$ sobre H_n es conmutativa y está generada por

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{p}(X_j^2 + Y_j^2) - \sum_{j=p+1}^{n}(X_j^2 + Y_j^2) \ \text{ y } \ T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Para poder introducir la definición del espectro asociado al par de Gelfand generalizado $(U(p, q), H_n)$, comenzamos recordando algunas definiciones.

Definición 2.2.2. *Una distribución T sobre $G = U(p,q) \ltimes H_n$ es de tipo positivo si la aplicación*

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{D}(G) \times \mathcal{D}(G) &\to \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto T(\tilde{\psi} * \varphi) \end{aligned}$$

es hermitiana, continua y satisface $\Theta(\varphi, \varphi) \geq 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, donde $\tilde{\psi}(g) = \overline{\psi(g^{-1})}$.

Sea $\mathcal{P}$ el cono de las distribuciones de tipo positiva, $U(p,q)$-bi invariantes sobre $U(p,q) \ltimes H_n$. Decimos que $T \in \mathcal{P}$ es extremal en $\mathcal{P}$ si y sólo si $S \in \mathcal{P}$ y $S - T \in \mathcal{P}$ implica $S = \alpha T$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $S, S' \in \mathcal{P}$ escribimos $S \sim S'$ si y sólo si $S = \alpha S'$ para algún $\alpha > 0$. Así $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}$. Para $S \in \mathcal{P}$ denotamos por $[S]$ su clase de equivalencia.

Por teoría general (ver [15] y pag. 374 de [7]) sabemos que hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las representaciones unitarias (π, V) de $U(p,q) \ltimes H_n$ que admiten un vector distribución cíclico fijado por $U(p,q)$ (representaciones esféricas), y el conjunto de las clases de equivalencia de las distribuciones de tipo positiva y $U(p,q)$-bi invariantes.

Más precisamente, para tales (π, V), $\xi_\pi \in V^{-\infty}$ y para $\varphi \in C^\infty(U(p,q) \ltimes H_n)$, es fácil ver que $\pi(\varphi)\xi_\pi$ es un vector C^∞ para π. Definimos $T_\pi \in \mathcal{D}'(U(p,q) \ltimes H_n)$ por

$$T_\pi(\varphi) = \langle \xi_\pi, \pi(\varphi)\xi_\pi \rangle.$$

Con estas notaciones, dicha correspondencia viene dada por $\pi \longrightarrow [T_\pi]$. Recordemos también que π es irreducible si y sólo si T_π es extremal en $\mathcal{P}$. Como es usual, identificamos las distribuciones $U(p,q)$-biinvariantes sobre $U(p,q) \ltimes H_n$ con las distribuciones $U(p,q)$-invariantes sobre H_n.

Definición 2.2.3. *Una distribución esférica sobre H_n es una distribución $U(p,q)$-invariante y autodistribución simultanea de los operadores de $\mathcal{U}_{U(p,q)}(\mathfrak{h}_n)$.*

Una distribución extremal de $\mathcal{P}$ es esférica, pero no es cierta la recíproca.

Es importante notar que en el caso compacto, es decir en el caso del par de Gelfand $(U(n), H_n)$, su espectro $\Delta(U(n), H_n)$ coincide con el conjunto de las funciones esféricas acotadas definidas positivas, esto es, es el conjunto de los puntos extremales en el cono de las funciones $U(p,q)$-invariantes y definidas positivas sobre H_n (ver [5]).

Sea E el conjunto de los puntos extremales en $\mathcal{P}$. Motivados por los resultados del caso compacto, definimos

Definición 2.2.4. $\Delta(U(p,q), H_n) = E/\sim$, *dotado de la topología de la convergencia puntal de $\mathcal{S}'(H_n)$.*

Sea

$$\{\pi_{\lambda,k} : \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi_\sigma : \sigma \in \mathbb{R}\} \cup \{\pi^1\}$$

el conjunto de todas las representaciones unitarias irreducibles de $U(p,q) \ltimes H_n$ que están dadas en [20] y sea

$$\{S_{\lambda,k} : \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{S_\sigma : \sigma \in \mathbb{R}\} \cup \{1\}$$

un conjunto de distribuciones que reproducen a las representaciones anteriores respectivamente. Es importante notar que por como están definidas estas distribuciones resultan temperadas.

Observemos que todo elemento de $\Delta(U(p,q),H_n)$ por ser extremal es esférica, esto es, es autodistribución simultanea de $\mathcal{D}$ y T (ver [7]). Mas aún,

$$iT(S_{\lambda,k}) = \lambda\ S_{\lambda,k}, \qquad -\mathcal{D}(S_{\lambda,k}) = (2k+p-q)|\lambda|\ S_{\lambda,k}, \tag{2.2.1}$$
$$iT(S_\sigma) = 0, \qquad -\mathcal{D}(S_\sigma) = \sigma\ S_\sigma, \tag{2.2.2}$$

ver [17] y [9].

Siguiendo [5], se define la aplicación $\mathcal{E} : \Delta(U(p,q),H_n) \to \mathbb{R}^2$ por

$$\mathcal{E}([\psi]) = (-\hat{\mathcal{D}}(\psi), i\hat{T}(\psi)),$$

donde $\hat{\mathcal{D}}(\psi)$ y $\hat{T}(\psi)$ denotan los autovalores de $\mathcal{D}$ y T respectivamente asociados a ψ. Sea

$$\Sigma = \{(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) : \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,\sigma) : \sigma \in \mathbb{R}\}$$

la imagen de la aplicación $\mathcal{E}$ que equipado con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$. Entonces

Teorema 2.2.5. *(ver [11]) La asignación $\mathcal{E} : \Delta(U(p,q),H(n)) \smallsetminus \{1\} \to \Sigma$ es un homeomorfismo.*

Con el propósito de presentar explícitamente las distribuciones esféricas $S_{\lambda,k}$ para $\lambda \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ y S_σ para $\sigma \in \mathbb{R}$, comenzamos describiendo el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{C}^n)^{U(p,q)}$ de las distribuciones temperadas que son $U(p,q)$ invariantes. Adaptamos los resultados probados por Tengstrand en [15], para pasar del caso real al complejo.

Con este fin, tomamos coordenadas bipolares sobre $\mathbb{C}^n$: para $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$, tomamos $\tau = \sum_{j=1}^p x_j^2 + y_j^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2 + y_j^2)$, $\rho = \sum_{j=0}^n x_j^2 + y_j^2$, $u = (x_1,y_1,\dots,x_p,y_p)$ y $v = (x_{p+1},y_{p+1},\dots,x_n,y_n)$. Así, $u = (\frac{\rho+\tau}{2})^{1/2}\omega_u$, $v = (\frac{\rho-\tau}{2})^{1/2}\omega_v$, donde ω_u está en la esféra $2p-1$ dimensional S^{2p-1} y $\omega_v \in S^{2q-1}$.

Por el teorema de cambio de variables, tenemos que

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(z)\ dz = \int_{\mathbb{R}}\int_{|\tau|<\rho}\int_{S^{2p-1}\times S^{2q-1}} f((\tfrac{\rho+\tau}{2})^{1/2}\omega_u,(\tfrac{\rho-\tau}{2})^{1/2}\omega_v)d\omega_u d\omega_v(\rho+\tau)^{p-1}(\rho-\tau)^{q-1}d\rho\ d\tau$$

Definimos la aplicación M sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ por

$$Mf(\rho,\tau) = \int_{S^{2p-1}\times S^{2q-1}} f((\tfrac{\rho+\tau}{2})^{1/2}\omega_u,(\tfrac{\rho-\tau}{2})^{1/2}\omega_v)\ d\omega_u\ d\omega_v$$

y

$$Nf(\tau) = \int_{|\tau|}^\infty Mf(\rho,\sigma)(\rho+\tau)^{p-1}(\rho-\tau)^{q-1}\ d\rho.$$

En otras palabras, Nf es la integral de f sobre la superficie $B(z,z) = \tau$ dotado de una medida adecuada.

Sea H la función de Heaviside (esto es, $H = \chi_{(0,\infty)}$) y sea $\mathcal{H}$ el espacio de las funciones $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que $\varphi(\tau) = \varphi_1(\tau) + \tau^{n-1}\varphi_2(\tau)H(\tau)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Se ha probado en [15] que $\mathcal{H}$, con una topología adecuada, es un espacio de Fréchet. Además, adaptando la prueba del Lema 4.2 y Lema 4.3 allí, obtenemos que $N : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n} \smallsetminus \{0\}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $N : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{H}$ son aplicaciones lineales, continuas y suryectivas. Ahora, sea $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})^{U(p,q)}$. Entonces, existe una única $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tal que

$$\langle \mu, f\rangle = \langle T, Nf\rangle \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n} \smallsetminus \{0\}).$$

En efecto, sea $\Phi(x_1, y_1, \ldots .x_n, y_n) = (\rho, \tau, \omega_u, \omega_v)$ el cambio de coordenadas y sea $J(\Phi^{-1})$ el determinante de Jacobi. Si $\mu \circ \Phi$ es la distribución definida por $\langle \mu \circ \Phi, f\rangle = \langle \mu, (f \circ \Phi^{-1})J(\Phi^{-1})\rangle$, entonces como $U(p, q)$ actúa transitivamente sobre la superficie $B(z, z) = \tau$, $\mu \circ \Phi$ es independiente de ρ, ω_u y ω_v. Así, T esta bien definida y la unicidad de T sigue de la suryectividad de N.

Además, la aplicación adjunta de N, $N' : \mathcal{H}' \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})^{U(p,q)}$, es inyectiva y las mismas lineas del Teorema 5.1 en [15] prueban que N' es un homeomorfismo.

Para $f \in \mathcal{S}(H_n)$ pondremos $Nf(\tau, t) := N(f(., t))(\tau)$. Sea $\mathcal{H}_n^{\#} = \{Nf : f \in \mathcal{S}(H_n)\}$, no es difícil ver que $\mathcal{H}_n^{\#}$ es el espacio de las funciones φ sobre $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\varphi(\tau, t) = \varphi_1(\tau, t) + \tau^{n-1}\varphi_2(\tau, t)\ H(\tau), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \tag{2.2.3}$$

donde H es la función de Heaviside.

Una adaptación conveniente de la asignación de Tengstrand en [15] muestra que la aplicación $N : \mathcal{S}(H_n) \to \mathcal{H}_n^{\#}$ definida por

$$Nf(\tau, t) = \int\limits_{\rho>|\tau|} \int\limits_{S^{2p-1}\times S^{2q-1}} f((\frac{\rho+\tau}{2})^{1/2}\omega_u, (\frac{\rho-\tau}{2})^{1/2}\omega_v, t)d\omega_u d\omega_v(\rho+\tau)^{p-1}(\rho-\tau)^{q-1}d\rho, \tag{2.2.4}$$

es lineal, continua y suryectiva, y su adjunta $N' : (\mathcal{H}_n^{\#})' \to \mathcal{S}'(H_n)^{U(p,q)}$ es un homeomorfismo.

Una consecuencia de la Proposición 2.4 probada [10] es que $\mathcal{F}(f) \equiv 0$ si y sólo si $Nf \equiv 0$. Por lo tanto, la transformada esférica $\mathcal{F}$ puede pensarse definida sobre el espacio de Tengstrand $\mathcal{H}_n^{\#}$.

Por otro lado, recordemos la definición de los polinomios de Laguerre

$$L_m^{(0)}(\tau) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}(-1)^j\frac{\tau^j}{j!}, \qquad L_{m-1}^{(\alpha+1)}(\tau) = -\frac{d}{d\tau}L_m^{(\alpha)}(\tau),$$

para $m, \alpha \in \mathbb{N}_0$, en [14]. Por lo tanto, $L_m^{(\alpha)}(0) = \binom{\alpha+m}{m}$.

Entonces, las distribuciones $S_{\lambda,k}$ calculadas en [9] están dadas por

$$S_{\lambda,k} = F_{\lambda,k} \otimes e^{-i\lambda t},$$

con $F_{\lambda,k} \in \mathcal{S}'(\mathbb{C}^n)$ definida por

$$\langle F_{\lambda,k}, f(\cdot, t)\rangle = \langle (L_{k-q+n-1}^{(0)}H)^{n-1}, \tau \mapsto 2|\lambda|^{-1}e^{-\tau/2}Nf(2|\lambda|^{-1}\tau, t)\rangle$$

para $k \geq 0$, $\lambda \neq 0$ y por

$$\langle F_{\lambda,k}, f(\cdot,t)\rangle = \langle (L^{(0)}_{-k-p+n-1}H)^{n-1}, \tau \mapsto 2|\lambda|^{-1}e^{-\tau/2}Nf(-2|\lambda|^{-1}\tau, t)\rangle$$

para $k < 0$, $\lambda \neq 0$. Por lo tanto,

$$\langle S_{\lambda,k}, f\rangle = \langle (L^{(0)}_{k-q+n-1}H)^{n-1}, \tau \mapsto 2|\lambda|^{-1}e^{-\tau/2}Nf(2|\lambda|^{-1}\tau, \hat{\lambda})\rangle \tag{2.2.5}$$

para $k \geq 0$, $\lambda \neq 0$ y por

$$\langle S_{\lambda,k}, f\rangle = \langle (L^{(0)}_{-k-p+n-1}H)^{n-1}, \tau \mapsto 2|\lambda|^{-1}e^{-\tau/2}Nf(-2|\lambda|^{-1}\tau, \hat{\lambda})\rangle \tag{2.2.6}$$

para $k < 0$ y $\lambda \neq 0$, donde $Nf(\tau, \hat{\lambda})$ denota la transformada de Fourier de $Nf(\tau, \cdot)$ en λ.

Además, las distribuciones S_σ calculadas en [10] vienen dadas por

$$\langle S_\sigma, f\rangle = (-1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty J_0((\sigma\tau)^{1/2})(Nf(\cdot,t))^{(n-1)}(\tau)\ d\tau\ dt \tag{2.2.7}$$

para $\sigma \geq 0$ y por

$$\langle S_\sigma, f\rangle = (-1)^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty J_0((-\sigma\tau)^{1/2})(Nf(\cdot,t))^{(n-1)}(-\tau)\ d\tau\ dt \tag{2.2.8}$$

para $\sigma < 0$, donde $J_m(\tau) = (\frac{\tau}{2})^m \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}(\frac{\tau}{2})^{2k}$ es la función de Bessel de orden m de primera clase.

Proposición 2.2.6. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Entonces*

$$\mathcal{F}(f)(0,\sigma) = \varphi_1(\sigma) + \sigma^{n-1}\ \varphi_2(\sigma)\ H(\sigma)$$

donde H es la función de Heaviside y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demostración. Podemos ver en [17] que para $f \in \mathcal{S}(H_n)$

$$\langle S_\sigma, f\rangle = \int_{B(u,u)=-\sigma}\int_{H_n} e^{iReB(u,z)}f(z,t)\ dz\ dt\ d\mu_\sigma(u)$$

donde $d\mu_\sigma$ denota una medida $U(p,q)$ invariante sobre la superficie $B(u,u) = \sigma$. Como $u \in \mathbb{C}^n$ entonces

$$u = (u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n).$$

Sea

$$w_1 = \frac{1}{\|(u_1,\dots,u_p)\|}(u_1,\dots,u_p) \in S^{2p-1},$$

$$w_2 = \frac{1}{\|(u_{p+1},\dots,u_n)\|}(u_{p+1},\dots,u_n) \in S^{2q-1},$$

$$\rho = |u_1|^2 + \cdots + |u_p|^2 + |u_{p+1}|^2 + \cdots + |u_n|^2,$$

$$\tau = |u_1|^2 + \cdots + |u_p|^2 - (|u_{p+1}|^2 + \cdots + |u_n|^2),$$

es claro que

$$\|(u_1,\dots,u_p)\| = (\frac{\rho+\tau}{2})^{1/2} \text{ and } \|(u_{p+1},\dots,u_n)\| = (\frac{\rho-\tau}{2})^{1/2}.$$

Así

$$\begin{aligned}&\{u\in\mathbb{C}^n : B(u,u) = -\sigma\}\\ &= \{((\tfrac{\rho+\tau}{2})^{1/2}w_1, (\tfrac{\rho-\tau}{2})^{1/2}w_2) : w_1\in S^{2p-1}, w_2\in S^{2q-1}, \rho\geq|\tau|, \tau=-\sigma\}\\ &= \{((\tfrac{\rho-\sigma}{2})^{1/2}w_1, (\tfrac{\rho+\sigma}{2})^{1/2}w_2) : w_1\in S^{2p-1}, w_2\in S^{2q-1}, \rho\geq|\sigma|\}.\end{aligned}$$

Un cálculo fácil muestra que

$$\begin{aligned}&\int_{B(u,u)=-\sigma}\int_{H_n} e^{iRe(u,z)} f(z,t)\ dz\ dt\ d\mu_\sigma(u)\\ &= \int\limits_{\rho>|\sigma|}\ \int\limits_{S^{2p-1}\times S^{2q-1}} \tilde{f}((\tfrac{\rho-\sigma}{2})^{1/2}w_1, (\tfrac{\rho+\sigma}{2})^{1/2}w_2, 0)(\rho-\sigma)^{p-1}(\rho+\sigma)^{q-1}\ dw_1\ dw_2\ d\rho\\ &= N\tilde{f}(\sigma,0)\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de (2.2.4) con

$$\tilde{f}(u,0) = \int_{H_n} e^{iReB(u,z)} f(z,t)\ dz\ dt.$$

Sabemos que $N\tilde{f}\in\mathcal{H}_n^{\#}$, luego por (2.2.3) la prueba esta completa. □

Como consecuencia del Teorema 3.1 probado en [10] y la definición de la transformada esférica normalizada obtenemos el siguiente resultado

Teorema 2.2.7. *Para $f\in\mathcal{S}(H_n)$ y $k\in\mathbb{Z}$, $\partial^j(\mathcal{F}(f)(\lambda,k))/\partial\lambda^j$ existe para todo $j\in\mathbb{N}$ y $\lambda\neq 0$. Además, para cada $j,N\in\mathbb{N}_0$ existe una constante positiva c independiente de λ y k tal que*

$$\left|\frac{\partial^j(\mathcal{F}(f)(\lambda,k))}{\partial\lambda^j}\right| \leq c\left(|k|^{n-1} + \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\right)\frac{1}{|\lambda|^{N+j}(|k|+1)^N}. \tag{2.2.9}$$

Definición 2.2.8. *Para $m : (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ y $(\lambda,k)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{Z}$ definimos*

$$m^*(\lambda,k) = \begin{cases} m(\lambda,k), & si\ k\geq 0,\\ (-1)^{n-2}m(\lambda,k), & si\ k<0.\end{cases}$$

$$m^{**}(\lambda,k) = \begin{cases} m(\lambda,k), & si\ k<0,\\ (-1)^{n-2}m(\lambda,k), & si\ k\geq 0.\end{cases}$$

Sean también

$$E(m)(\lambda,k) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}m(\lambda,k-l),$$

$$\tilde{E}(m)(\lambda,k) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}m(\lambda,k+l),$$

En el siguiente teorema, probado en [10], se caracteriza bajo qué condiciones sobre m existe una función $f \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que $m(\lambda, k) = \langle S_{\lambda,k}, f \rangle$.

Teorema 2.2.9. *Asumimos que $p, q \geq 1$ con $p + q = n$. Entonces para una función $m : (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ existe $f \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que $m(\lambda, k) = \langle S_{\lambda,k}, f \rangle$ si y sólo si m satisface las siguientes condiciones,*

(i) *para todo $N \in \mathbb{N}$ existe c_N tal que*

$$|m(\lambda, k)| \leq c_N \left(|k|^{n-1} + \frac{1}{|\lambda|^{n-1}} \right) \frac{1}{|\lambda|^N (|k| + 1)^N}, \; k \in \mathbb{Z} \tag{2.2.10}$$

(ii) *las funciones definidas sobre $(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{N}_0$ por*

$$(\lambda, k) \to E(m^*)(\lambda, k + q), \; (\lambda, k) \to \tilde{E}(m^{**})(\lambda, -k - p) \tag{2.2.11}$$

se extienden a funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Capítulo 3

Relación entre la transformada esférica asociada a $(U(p,q), H_n)$ y la asociada a $(U(n), H_n)$.

El principal objetivo de este Capitulo es dar la prueba del Teorema 1.0.14 enunciado en la Introducción.

Sean $n \geq 2$ y $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p + q = n$. En este capítulo denotaremos por $\mathcal{F}_n$ a la transformada esférica normalizada asociada al par de Gelfand generalizado $(U(p,q), H_n)$ y por

$$\Sigma = \{(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|) : \lambda \neq 0,\ \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0, \sigma) : \sigma \in \mathbb{R}\}$$

a su espectro.

Para H definida sobre Σ tomamos $H(\lambda, k) = H(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|)$.

Para $f \in \mathcal{S}(H_n)$, $\lambda \neq 0$ y $k \in \mathbb{N}_0$ sean F y G las funciones definidas sobre $\Delta(U(n), H_n)$ por

$$F(\lambda, k) = \mathcal{F}_n(f)(\lambda, (2k + n)|\lambda|)$$

$$G(\lambda, k) = \mathcal{F}_n(f)(\lambda, -(2k + n)|\lambda|)$$

y para $\sigma \geq 0$ por

$$F(0, \sigma) = \mathcal{F}_n(f)(0, \sigma)$$

$$G(0, \sigma) = \mathcal{F}_n(f)(0, -\sigma).$$

Nuestro trabajo consistirá en mostrar que F y G están en $\hat{\mathcal{S}}(U(n), H_n)$. Haremos esto probando que $(M_n^+)^i (M_n^-)^j F$ son rápidamente decrecientes para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$, en el sentido de la Definición 1.0.4.

Notemos de la Observación 1.0.13, el Teorema 2.2.7 y el Teorema 1.0.7 que F y G son funciones rápidamente decrecientes según la Definición 1.0.4.

Como en [10], podemos escribir

$$\langle S_{\lambda,k}, f\rangle = I(\lambda, k) + II(\lambda, k)$$

$$I(\lambda,k)=\begin{cases}(-1)^{n-1}\int\limits_{s>0}e^{-\frac{s|\lambda|}{4}}L_{k-q}^{(n-1)}(\frac{s|\lambda|}{2})\ Nf(s,\hat{\lambda})ds, & \text{si } k\geq q,\\ \\ (-1)^{n-1}\int\limits_{s>0}e^{-\frac{s|\lambda|}{4}}L_{-k-p}^{(n-1)}(\frac{s|\lambda|}{2})\ Nf(-s,\hat{\lambda})ds, & \text{si } k\leq -p,\\ \\ 0, & \text{si } -p+1\leq k\leq q-1,\end{cases}$$

$$II(\lambda,k)=\sum_{j=0}^{n-2}c_{j,k}^{n}|\lambda|^{-j-1}\langle\delta^{(j)},Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle$$

para $k\in\mathbb{Z}$, donde

$$c_{j,k}^{n}=\begin{cases}4^{j}\sum\limits_{i=j}^{n-2}\frac{1}{2^{i}}\binom{i}{j}(-1)^{n-i-2}L_{k-q+i+1}^{(n-i-2)}(0), & \text{para } k\geq 0,\\ \\ (-1)^{j}4^{j}\sum\limits_{i=j}^{n-2}\frac{1}{2^{i}}\binom{i}{j}(-1)^{n-i-2}L_{-k-p+i+1}^{(n-i-2)}(0), & \text{para } k<0.\end{cases}$$

Fue probado en [10], que $\langle S_{\lambda,k},f\rangle=0$ si y sólo si $Nf\equiv 0$. Así, si f y g están en $\mathcal{S}(H_n)$ y son tales que $Nf=Ng$ entonces, como $\mathcal{F}_n$ y N son aplicaciones lineales, tenemos que $\mathcal{F}_n(f)=\mathcal{F}_n(g)$. Por lo tanto, tomaremos

$$\mathcal{F}_n(Nf):=\mathcal{F}_n(f).$$

Entonces,

$$F(\lambda,k)=(-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{s>0}e^{-\frac{s|\lambda|}{4}}L_{k}^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2})Nf(s,\hat{\lambda})\ ds+\sum_{j=0}^{n-2}d_{j,k}^{n}|\lambda|^{n-j-2}\langle\delta^{(j)},Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle, \tag{3.0.1}$$

donde para simplificar escribimos

$$d_{j,k}^{n}=c_{j,k+q_n}^{n}=4^{j}\sum_{i=j}^{n-2}\frac{1}{2^{i}}\binom{i}{j}(-1)^{n-i-2}L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0) \tag{3.0.2}$$

y

$$G(\lambda,k)=(-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{s>0}e^{-\frac{s|\lambda|}{4}}L_{k}^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2})Nf(-s,\hat{\lambda})\ ds+\sum_{j=0}^{n-2}e_{j,k}^{n}|\lambda|^{n-j-2}\langle\delta^{(j)},Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle, \tag{3.0.3}$$

para $\lambda\neq 0$ y $k\in\mathbb{N}_0$, donde

$$e_{j,k}^{n}=c_{j,-k-p}^{n}=(-1)^{j}4^{j}\sum_{i=j}^{n-2}\frac{1}{2^{i}}\binom{i}{j}(-1)^{n-i-2}L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0). \tag{3.0.4}$$

Observación 3.0.10. *Notemos que* (3.0.1), (3.0.3) *y las expresiones de* $d_{j,k}^{n}$ *y* $e_{j,k}^{n}$ *no dependen de* q *y* p *tales que* $n=p+q$. *Por lo tanto,* F *y* G *no dependen de* q *y* p.

3.1. Cálculo de $(M_n^-)^jF$ y $(M_n^+)^jF$, $j \in \mathbb{N}$

Con el fin de encontrar las expresiones de $(M_n^-)^jF$ y $(M_n^+)^jF$ necesitamos introducir una notación conveniente. En efecto, sea D el operador lineal definido sobre el espacio de las funciones polinomiales sobre $\mathbb{R}$ por

$$DL_k^{(0)} = L_k^{(0)} - L_{k-1}^{(0)}$$

para $k \in \mathbb{N}$ y

$$D1 = 1.$$

Fue probado en [10] para $k, i \in \mathbb{N}_0$ la siguiente igualdad

$$D^i(L_k^{(0)}) = \sum_{l=0}^{\text{mín}\{k,i\}} (-1)^l \tbinom{i}{l} L_{k-l}^{(0)}, \tag{3.1.1}$$

y para $k \in \mathbb{N}_0$ e $i \in \mathbb{N}$

$$D^{i-1}(L_k^{(0)})(\tau) = (-1)^{i-1} \frac{1}{(i-1)!} \tau^{i-1} \mathcal{L}_{k-i+1}^{(i-1)}(\tau). \tag{3.1.2}$$

Definición 3.1.1. *Sea* $j \in \mathbb{Z}$ *y* $j \leq 1$*. Sea* f_{2-j} *la función de clase Schwartz radial sobre* H_{2-j} *definida por*

$$f_{2-j}(z,t) = \frac{1}{\pi(j-1)!} Nf(|z|^2, t), \ \forall (z,t) \in \mathbb{C}^{2-j} \times \mathbb{R}.$$

Además, sea $\mathcal{F}_j(Nf)$ *la transformada esférica de* f_{2-j} *asociada al par de Gelfand* $(U(2-j), H_{2-j})$*.*

Para $j \in \mathbb{Z}$ y $j \leq 1$, usando coordenadas polares y (3.1.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_j(Nf)(\lambda,k) &= \int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} \mathcal{L}_k^{(2-j-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) \ (\tfrac{s}{2})^{2-j-1} Nf(s,\hat{\lambda}) ds \\
&= \int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} \mathcal{L}_k^{(1-j)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) \ (\tfrac{s}{2})^{1-j} Nf(s,\hat{\lambda}) ds \\
&= (-1)^{1-j} |\lambda|^{j-1} \int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} D^{1-j}(L_{k-(j-1)}^{(0)})(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,\hat{\lambda}) ds.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $j \in \mathbb{Z}$ y $j \leq 1$ tenemos

$$\mathcal{F}_j(Nf)(\lambda,k) = (-1)^{j-1} |\lambda|^{j-1} \int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} D^{1-j}(L_{k-(j-1)}^{(0)})(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,\hat{\lambda}) ds. \tag{3.1.3}$$

Además, para $k, i \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$D^i(L_k^{(0)}) - D^i(L_{k-1}^{(0)}) = D^{i+1}(L_k^{(0)}) \tag{3.1.4}$$

(ver Lema 3.3.2) en analogía con la siguiente igualdad

$$L_k^{(i)} - L_{k-1}^{(i)} = L_k^{(i-1)} \tag{3.1.5}$$

que satisfacen los polinomios de Laguerre. También, es importante notar la similitud de (3.1.3) con el primer término en la expresión de $\mathcal{F}_j(Nf)$ para $j \geq 2$. Esto nos permitirá obtener una expresión amigable y uniforme para $(M_n^-)^i(M_n^+)^jF$ con $i, j \in \mathbb{N}_0$.

Observación 3.1.2. *En [6] fue probado que, para $l \in \mathbb{N}$ y una función Schwartz radial h sobre H_l, se satisface*

$$\overset{+}{\underset{-}{M}}_l(\hat{h}) = \left((-it \pm \tfrac{|z|^2}{4})h\right)^{\wedge}. \tag{3.1.6}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la notación usada en la definición previa para $j \leq 1$ obtenemos que

$$\overset{+}{\underset{-}{M}}_{2-j}\mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k) = \mathcal{F}_j\left((-it \pm \tfrac{s}{4})Nf\right)(\lambda, k), \tag{3.1.7}$$

donde hemos aplicado (3.1.6).

Observación 3.1.3. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Sabemos que $Nf \in \mathcal{H}_n^{\#}$, y no es difícil probar que $\mathcal{H}_n^{\#} \subseteq \mathcal{H}_j^{\#}$ para todo $1 \leq j \leq n$. Ya que Nf está en la imagen de la aplicación $N : \mathcal{S}(H_j) \to \mathcal{H}_j^{\#}$, $\mathcal{F}_j(Nf)$ está bien definida.*

Lema 3.1.4. *Para todo $j \in \mathbb{Z}$ tenemos que*

$$\mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k + q_j) - \mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k - 1 + q_j) = (-1)|\lambda|\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda, k + q_{j-1})$$

Demostración. Si $j \geq 2$, usamos (3.1.5) y el Lema 3.3.1 en el apéndice para obtener

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k + q_j) - \mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k - 1 + q_j) \\
&= (-1)^{j-1}|\lambda|^{j-1} \int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} \left[L_k^{(j-1)} - L_{k-1}^{(j-1)}\right](\tfrac{s|\lambda|}{2})Nf(s, \hat{\lambda})\, ds \\
&\quad + \sum_{l=0}^{j-2} \left[d_{l,k}^n - d_{l,k-1}^n\right] |\lambda|^{n-l-2} \langle \delta^{(l)}, Nf(\cdot, \hat{\lambda})\rangle \\
&= -|\lambda|(-1)^{j-2}|\lambda|^{j-2} \int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(j-2)}(\tfrac{s|\lambda|}{2})Nf(s, \hat{\lambda})\, ds \\
&\quad + (-1) \sum_{l=0}^{j-3} d_{l,k}^{n-1} |\lambda|^{n-l-2} \langle \delta^{(l)}, Nf(\cdot, \hat{\lambda})\rangle \\
&= -|\lambda|\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda, k + q_{j-1}).
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $j \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k + q_j) - \mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k - 1 + q_j) \\
&= (-1)^{j-1}|\lambda|^{j-1} \int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} \left[D^{(j-1)}(L_k^{(0)}) - D^{(j-1)}(L_{k-1}^{(0)})\right](\tfrac{s|\lambda|}{2})Nf(s, \hat{\lambda})\, ds \\
&= -|\lambda|(-1)^{j-2}|\lambda|^{j-2} \int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} D^{(j-2)}(L_k^{(0)})(\tfrac{s|\lambda|}{2})Nf(s, \hat{\lambda})\, ds \\
&= -|\lambda|\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda, k + q_{j-1}),
\end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema 3.3.2 en el apéndice y (3.1.3). □

Proposición 3.1.5. *Sea* $n \geq 2$ *y* F *como en* (3.0.1). *Entonces*

$$M_n^- F(\lambda, k) = \begin{cases} -(n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it - \frac{s}{4})Nf)(\lambda, k+q_n), & si\ \lambda > 0, \\ \\ (k+n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it + \frac{s}{4})Nf)(\lambda, k+q_n) & \\ -(k+n)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+1+q_{n-1}), & si\ \lambda < 0. \end{cases}$$

$$M_n^+ F(\lambda, k) = \begin{cases} -(k+n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it - \frac{s}{4})Nf)(\lambda, k+q_n) & \\ +(k+n)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+1+q_{n-1}), & si\ \lambda > 0, \\ \\ (n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it + \frac{s}{4})Nf)(\lambda, k+q_n), & si\ \lambda < 0. \end{cases}$$

Demostración. Es inmediato de la Definición 1.0.5, el Lema 3.1.4 y la Proposición 3.3.5 en el apéndice. □

Con el propósito de estudiar la continuidad de la función $M_n^- F$, encontramos una relación entre sus expresiones para $\lambda > 0$ y para $\lambda < 0$. Obviamente, necesitamos hacer lo mismo para $M_n^+ F$. Con este objetivo, enunciamos la siguiente

Proposición 3.1.6. *Para* $\lambda \neq 0$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} &(k+n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it + \tfrac{s}{4})Nf)(\lambda, k+q_n) \\ &\quad - (k+n)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+1+q_{n-1}) \\ &= -(n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+1+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it - \tfrac{s}{4})Nf)(\lambda, k+q_n). \end{aligned}$$

Demostración. De la definición de $\mathcal{F}_{n-1}(Nf)$ y de los incisos (a) y (b) del Lema 3.3.6 en el apéndice, tenemos que

$$\begin{aligned} &(k+n-1)\ \mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+q_{n-1}) - (k+n)\ \mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+1+q_{n-1}) \\ &= (-1)^{n-2}|\lambda|^{n-2} \int_0^\infty e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} \left[(k+n-1)\ L_k^{(n-2)} - (k+n)\ L_{k+1}^{(n-2)}\right] (\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s, \hat{\lambda})\ ds \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-3} \left[(k+n-1)d_{j,k}^{n-1} - (k+n)d_{j,k+1}^{n-1}\right] |\lambda|^{n-j-3} \langle \delta^{(j)}, Nf(\cdot, \hat{\lambda})\rangle \\ &= -(-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1} \int_{s>0} e^{-s|\lambda|/4} L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) \frac{s}{2} Nf(s, \hat{\lambda})\ ds \\ &\quad - (n-1)(-1)^{n-2}|\lambda|^{n-2} \int_{s>0} e^{-s|\lambda|/4} L_{k+1}^{(n-2)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s, \hat{\lambda})\ ds \\ &\quad - (n-1) \sum_{j=0}^{n-3} d_{j,k+1}^{n-1} |\lambda|^{n-j-3} \langle \delta^{(j)}, Nf(\cdot, \hat{\lambda})\rangle \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-3} \frac{j+1}{2} d_{j+1,k}^{n} |\lambda|^{n-j-3} \langle \delta^{(j)}, Nf(\cdot, \hat{\lambda})\rangle. \end{aligned}$$

Entonces, reordenamos los términos para obtener

$$\begin{aligned}
&(k+n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+q_{n-1})-(k+n)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+1+q_{n-1})\\
&=-(n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+1+q_{n-1})\\
&\quad-(-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{s>0}e^{-s|\lambda|/4}L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2})\tfrac{s}{2}Nf(s,\hat{\lambda})\,ds\\
&\quad+\sum_{j=0}^{n-3}\frac{j+1}{2}\,d_{j+1,k}^{n}\,|\lambda|^{n-j-3}\,\langle\delta^{(j)},Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle\\
&=-(n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+1+q_{n-1})+\mathcal{F}_n((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n)\\
&\quad-\mathcal{F}_n((-it+\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos el Lema 3.3.7 en el apéndice. □

Ahora, estamos en condiciones de enunciar el siguiente

Teorema 3.1.7. *Sea $n\geq 2$ y F como en* (3.0.1)*, entonces*

$$M_n^-F(\lambda,k)=\begin{cases}-(n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+q_{n-1})+\mathcal{F}_n((-it-\frac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n), & \textit{if } \lambda>0,\\[2ex] -(n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+1+q_{n-1})+\mathcal{F}_n((-it-\frac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n), & \textit{if } \lambda<0,\end{cases} \tag{3.1.8}$$

y

$$M_n^+F(\lambda,k)=\begin{cases}(n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+1+q_{n-1})+\mathcal{F}_n((-it+\frac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n), & \textit{if } \lambda>0,\\[2ex] (n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+q_{n-1})+\mathcal{F}_n((-it+\frac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n), & \textit{if } \lambda<0.\end{cases} \tag{3.1.9}$$

Además, M_n^-F and M_n^+F son funciones rápidamente decrecientes en el sentido de la Definición 1.0.4.

Demostración. 3.1.8 y (3.1.9) se siguen de las Proposiciones 3.1.5 y 3.1.6.

Haremos la prueba solo para M_n^-F pues para M_n^+F es similar. Extendemos M_n^-F sobre $\Delta(U(n),H_n)$ por

$$M_n^-F(0,\sigma)=-(n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(0,\sigma)+\mathcal{F}_n((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(0,\sigma),\quad\forall\sigma\geq 0.$$

Esta extensión es continua como consecuencia de (3.1.8), y la continuidad de $\mathcal{F}_j(f)$ para todo $j\geq 1$ por la Observación 1.0.13 y el Teorema 1.0.7. Probaremos que esta extensión satisface los incisos de la Definición 1.0.4.

(i) La extensión de M_n^-F es continua sobre $(U(n),H_n)$.

(ii) La aplicación $\sigma\to M_n^-F(\sigma)$ esta definida por

$$M_n^-F(0,\sigma)=-(n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(0,\sigma)+\mathcal{F}_n((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(0,\sigma).$$

para $\sigma\geq 0$. Entonces, por la Proposición 2.2.6 existe $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $M_n^-F(0,\sigma)=\varphi(\sigma)$ para todo $\sigma\geq 0$. Así, la aplicación $\omega\mapsto M_n^-F(0,|\omega|^2)$ pertenece a $\mathcal{S}_{U(n)}(\mathbb{C}^n)$.

(iii) La aplicación $\lambda \mapsto M_n^- F(\lambda, k)$ es diferenciable sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ya que la aplicación $\lambda \mapsto \mathcal{F}_j(\lambda, k + q_j)$ lo es para todo $j \geq 1$, como consecuencia de los teoremas 1.0.7 y 2.2.7.

(iv) Para cada $j, N \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $c_{j,N}$ tal que

$$\left| \frac{\partial^j M_n^- F}{\partial \lambda^j}(\lambda, k) \right| \leq \frac{c_{j,N}}{|\lambda|^{j+N}(2k+n)^N},$$

también por el Teorema 2.2.7.

Consecuentemente, $M_n^- F$ es una función rápidamente decreciente. Hacemos lo mismo para $M_n^+ F$ y el teorema se sigue. □

Cuando intentamos calcular $(M_n^-)^i F$ y $(M_n^+)^i F$ para $i \geq 2$ necesitamos calcular

$$M_n^{\overset{+}{-}} \left(\, (\lambda, k) \mapsto \mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k + l + q_j) \, \right),$$

para todo $j \leq n$. Por lo tanto, probaremos el siguiente

Lema 3.1.8. *Sea* $j \leq n$, *y* R_j *la función definida sobre* $\Delta_1(U(n), H_n)$ *por*

$$R_j(\lambda, k) = \mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k + l + q_j).$$

Entonces,

$$M_n^- R_j(\lambda, k) = \begin{cases} -(j+l-1)R_{j-1}(\lambda, k) + \mathcal{F}_j((-it - \frac{s}{4})Nf)(\lambda, k+l+q_j), & si\ \lambda > 0, \\ \\ -(n-l-1)R_{j-1}(\lambda, k+1) + \mathcal{F}_j((-it - \frac{s}{4})Nf)(\lambda, k+l+q_j), & si\ \lambda < 0. \end{cases}$$

$$M_n^+ R_j(\lambda, k) = \begin{cases} (n-l-1)R_{j-1}(\lambda, k+1) + \mathcal{F}_j((-it + \frac{s}{4})Nf)(\lambda, k+l+q_j), & si\ \lambda > 0, \\ \\ (j+l-1)R_{j-1}(\lambda, k) + \mathcal{F}_j((-it + \frac{s}{4})Nf)(\lambda, k+l+q_j), & si\ \lambda < 0. \end{cases}$$

Demostración. Para $j \geq 2$ definimos

$$F_j(\lambda, k) = \mathcal{F}_j(Nf)(\lambda, k + q_j).$$

Si $j \geq 2$ y $\lambda > 0$ entonces por la Definición 1.0.5 de M_n^-, el Lema 3.1.4 y (3.1.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
&M_n^- R_j(\lambda, k) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} R_j(\lambda, k) - \frac{k}{\lambda}[R_j(\lambda, k) - R_j(\lambda, k-1)] \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(F_j(\lambda, k+l)\right) - \frac{k+l}{\lambda}\left[F_j(\lambda, k+l) - F_j(\lambda, k-1+l)\right] \\
&\quad + l|\lambda|^{-1}\left[F_j(\lambda, k+l) - F_j(\lambda, k-1+l)\right] \\
&= M_j^- F_j(\lambda, k+l) - l\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda, k+l+q_{j-1}) \\
&= -(j-1)\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda, k+l+q_{j-1}) + \mathcal{F}_j((-it - \tfrac{s}{4})Nf)(\lambda, k+l+q_j) \\
&\quad - l\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda, k+l+q_{j-1}) \\
&= -(j+l-1)\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda, k+l+q_{j-1}) + \mathcal{F}_j((-it - \tfrac{s}{4})Nf)(\lambda, k+l+q_j).
\end{aligned}$$

Si $j \leq 1$ y $\lambda > 0$ tenemos en mente M_{2-j}^- en vez de M_j^- en el argumento anterior. Usamos (3.1.7) y obtenemos

$$\begin{aligned}
&M_n^- R_j(\lambda,k)\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda} R_j(\lambda,k) - \frac{k}{\lambda}[R_j(\lambda,k) - R_j(\lambda,k-1)]\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\mathcal{F}_j(\lambda,k+l+q_j)\right) - \frac{k+l+q_j}{\lambda}\left[\mathcal{F}_j(\lambda,k+l+q_j) - \mathcal{F}_j(Nf)(\lambda,k-1+l+q_j)\right]\\
&\quad + (l+q_j)|\lambda|^{-1}\left[\mathcal{F}_j(\lambda,k+l+q_j) - \mathcal{F}_j(\lambda,k-1+l+q_j)\right]\\
&= M_{2-j}^-\left(\mathcal{F}_j(Nf)\right)(\lambda,k+l+q_j) - (l+q_j)\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda,k+l+q_{j-1})\\
&= \mathcal{F}_j((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+l+q_j)\\
&\quad - (l+j-1)\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda,k+l+q_{j-1})\\
&= -(j+l-1)\mathcal{F}_{j-1}(Nf)(\lambda,k+l+q_{j-1}) + \mathcal{F}_j((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+l+q_j).
\end{aligned}$$

Los cálculos para $\lambda > 0$ y M_n^+F son similares.

□

De ahora en adelante, para $l \leq i$ definimos $\alpha_{i,l}$ y $\beta_{i,l}$ del siguiente modo

$$\alpha_{i,l}^n := (-1)^l \binom{i}{l} \frac{(n-1)!}{(n-1-l)!} \quad \text{and} \quad \beta_{i,l}^n := \binom{i}{l}\frac{(n-1)!}{(n-1-l)!}.$$

Teorema 3.1.9. *Sea $n \geq 2$, $i \in \mathbb{N}_0$ y F como en* (3.0.1)*. Entonces,*

$$(M_n^-)^i F(\lambda,k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\min\{n-1,i\}} \alpha_{i,l}^n\ \mathcal{F}_{n-l}\left((-it-\tfrac{s}{4})^{i-l}Nf\right)(\lambda,k+q_{n-l}), & si\ \lambda > 0,\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\min\{n-1,i\}} \alpha_{i,l}^n\ \mathcal{F}_{n-l}\left((-it-\tfrac{s}{4})^{i-l}Nf\right)(\lambda,k+l+q_{n-l}), & si\ \lambda < 0, \end{cases} \tag{3.1.10}$$

$$(M_n^+)^i F(\lambda,k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\min\{n-1,i\}} \beta_{i,l}^n\ \mathcal{F}_{n-l}\left((-it+\tfrac{s}{4})^{i-l}Nf\right)(\lambda,k+l+q_{n-l}), & si\ \lambda > 0,\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\min\{n-1,i\}} \beta_{i,l}^n\ \mathcal{F}_{n-l}\left((-it+\tfrac{s}{4})^{i-l}Nf\right)(\lambda,k+q_{n-l}), & si\ \lambda < 0, \end{cases} \tag{3.1.11}$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción, pero solo para M_n^- porque es similar para M_n^+.

Por (3.1.8) sabemos que (3.1.10) se cumple para $i = 1$. Ahora, supongamos para $i \geq 1$ que (3.1.10) es cierto entonces probaremos esto para $i+1$.

Aunque, haremos los cálculos para $(M_n^-)^{i+1}F(\lambda,k)$ y $\lambda < 0$ porque es el menos obvio y los otros cálculos son similares. En efecto, por hipótesis inductiva, la linealidad de M_n^-

y el Lema 3.1.8 con $j = n - l$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
&(M_n^-)^{i+1}F(\lambda,k)\\
&= \sum_{l=0}^{\min\{n-1,i\}} (-1)^l \tbinom{i}{l} \frac{(n-1)!}{(n-1-l)!}\ M_n^- \left(\mathcal{F}_{n-l}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-l}Nf)(\lambda,k+l+q_{n-l})\right)\\
&= \sum_{l=0}^{\min\{n-2,i\}} (-1)^{l+1} \tbinom{i}{l} \frac{(n-1)!}{(n-2-l)!}\ \mathcal{F}_{n-l-1}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-l}Nf)(\lambda,k+l+1+q_{n-l-1})\\
&\quad + \sum_{l=0}^{\min\{n-1,i\}} (-1)^l \tbinom{i}{l} \frac{(n-1)!}{(n-1-l)!}\ \mathcal{F}_{n-l}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-l+1}Nf)(\lambda,k+l+q_{n-l})\\
&= \sum_{l=1}^{\min\{n-1,i+1\}} (-1)^l \tbinom{i}{l-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-l)!}\ \mathcal{F}_{n-l}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-l+1}Nf))(\lambda,k+l+q_{n-l})\\
&\quad + \sum_{l=0}^{\min\{n-1,i\}} (-1)^l \tbinom{i}{l} \frac{(n-1)!}{(n-1-l)!}\ \mathcal{F}_{n-l}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-l+1}Nf))(\lambda,k+l+q_{n-l}),
\end{aligned}
$$

donde en la última igualdad usamos $\min\{n-2,i\}+1 = \min\{n-1,i+1\}$. Entonces, si $\min\{n-1,i+1\} = \min\{n-1,i\}$, por $\binom{i}{l} + \binom{i}{l-1} = \binom{i+1}{l}$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&(M_n^-)^{i+1}F(\lambda,k)\\
&= \sum_{l=1}^{\min\{n-1,i+1\}} (-1)^l \left[\tbinom{i}{l} + \tbinom{i}{l-1}\right] \frac{(n-1)!}{(n-1-l)!}\mathcal{F}_{n-1}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-l+1}Nf))(\lambda,k+l+q_{n-l})\\
&\quad + (-1)^0 \tbinom{i}{0} \frac{(n-1)!}{(n-1-0)!}\mathcal{F}_{n-0}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-0+1}Nf))(\lambda,k+0+q_{n-0})\\
&= \sum_{l=0}^{\min\{n-1,i+1\}} (-1)^l \tbinom{i+1}{l} \frac{(n-1)!}{(n-1-l)!}\mathcal{F}_{n-l}((-it-\tfrac{s}{4})^{i+1-l}Nf))(\lambda,k+l+q_{n-l}).
\end{aligned}
$$

Si $\min\{n-1,i+1\} = \min\{n-1,i\}+1$ $(i < n-1)$ entonces

$$
\begin{aligned}
&(M_n^-)^{i+1}F(\lambda,k)\\
&= \sum_{l=1}^{i} (-1)^l \left[\tbinom{i}{l} + \tbinom{i}{l-1}\right] \frac{(n-1)!}{(n-1-l)!}\mathcal{F}_{n-l}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-l+1}Nf))(\lambda,k+l+q_{n-l})\\
&\quad + (-1)^{i+1} \frac{(n-1)!}{(n-1-i+1)!}\mathcal{F}_{n-i+1}(Nf)(\lambda,k+i+1+q_{n-l})\\
&\quad + (-1)^0 \frac{(n-1)!}{(n-1-0)!}\mathcal{F}_{n-0}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-0+1}Nf))(\lambda,k+0+q_{n-0})\\
&= \sum_{l=0}^{\min\{n-1,i+1\}} (-1)^l \tbinom{i+1}{l} \frac{(n-1)!}{(n-1-l)!}\mathcal{F}_{n-l}((-it-\tfrac{s}{4})^{i+1-l}Nf))(\lambda,k+l+q_{n-l}).
\end{aligned}
$$

Un argumento similar se aplica para $\lambda > 0$. □

3.2. Cálculo de $(M_n^+)^i(M_n^-)^jF$, $i, j \in \mathbb{N}_0$

Similarmente a lo hecho previamente ahora necesitamos calcular

$$(M_n^+)^i\ (\ (\lambda, k) \mapsto \mathcal{F}_{n-l}(Nf)(\lambda, k+l+q_{n-l})\ )\ \text{para}\ \lambda < 0,$$

y

$$(M_n^+)^i\ (\ (\lambda, k) \mapsto \mathcal{F}_{n-l}(Nf)(\lambda, k+q_{n-l})\ )\ \text{para}\ \lambda > 0.$$

Por lo tanto, probamos la siguiente

Proposición 3.2.1. *Sea $0 \leq l \leq n-1$ y R_{n-l}, F_{n-l} las funciones definidas sobre $\Delta_1(U(n), H_n)$ por*

$$R_{n-l}(\lambda, k) = \mathcal{F}_{n-l}(Nf)(\lambda, k+l+q_{n-l}),$$
$$F_{n-l}(\lambda, k) = \mathcal{F}_{n-l}(Nf)(\lambda, k+q_{n-l}).$$

Entonces, para $\lambda > 0$ tenemos que

$$(M_n^+)^iF_{n-l}(\lambda, k) = \sum_{r=0}^{i} \beta_{i,r}^n\ \mathcal{F}_{n-l-r}\big((-it+\tfrac{s}{4})^{i-r}Nf\big)\,(\lambda, k+r+q_{n-l-r}), \tag{3.2.1}$$

y para $\lambda < 0$

$$(M_n^+)^iR_{n-l}(\lambda, k) = \sum_{r=0}^{i} \beta_{i,r}^n\ \mathcal{F}_{n-l-r}\big((-it+\tfrac{s}{4})^{i-r}Nf\big)\,(\lambda, k+l+q_{n-l-r}). \tag{3.2.2}$$

Demostración. Haremos esta prueba por inducción y sólo para (3.2.2), los otros casos son similares. En efecto, por el Lema 3.1.8 con $j = n-l$, tenemos que (3.2.1) es cierto para $i = 1$.

Asumiendo (3.2.2) para $i \geq 1$, lo probaremos para $i+1$. Primero, por la linealidad de M_n^- y el Lema 3.1.8 con $j = n-l-r$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&(M_n^+)(M_n^+)^iR_{n-l}(\lambda, k)\\
&= \sum_{r=0}^{i} \beta_{i,r}^n M_n^+\left(\mathcal{F}_{n-l-r}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-r}Nf)(\lambda, k+l+q_{n-l-r})\right)(\lambda, k)\\
&= \sum_{r=0}^{i} \beta_{i,r}^n(-1)(n-r-1)\ \mathcal{F}_{n-l-r-1}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-r}Nf)(\lambda, k+l+q_{n-l-r-1})\\
&+ \sum_{r=0}^{i} \beta_{i,r}^n\ \mathcal{F}_{n-l-r}((-it-\tfrac{s}{4})^{i-r+1}Nf)(\lambda, k+l+q_{n-l-r}).
\end{aligned}$$

Entonces, haciendo cálculos apropiados y usando la igualdad $\binom{i}{r}+\binom{i}{r-1} = \binom{i+1}{r}$ obtenemos

$$(M_n^+)^{i+1}R_{n-l}(\lambda, k) = \sum_{r=0}^{i+1} \beta_{i+1,r}^n\ \mathcal{F}_{n-l-r}\left((-it+\tfrac{s}{4})^{i+1-r}Nf\right)(\lambda, k+l+q_{n-l-r}).$$

$\square$

Finalmente, estamos en condiciones de enunciar el siguiente

Teorema 3.2.2. $(M_n^+)^i(M_n^-)^j F(\lambda,k) =$

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\min\{j,n-1\}} \alpha_{j,l}^n \sum_{r=0}^{i} \beta_{i,r}^n \ \mathcal{F}_{n-l-r}\Big((-it-\tfrac{s}{4})^{i-r}(-it+\tfrac{s}{4})^{j-l} Nf\Big)(\lambda, k+r+q_{n-l-r}), & si\ \lambda>0, \\ \sum_{l=0}^{\min\{j,n-1\}} \alpha_{j,l}^n \sum_{r=0}^{i} \beta_{i,r}^n \ \mathcal{F}_{n-l-r}\big((-it-\tfrac{s}{4})^{i-r}(-it+\tfrac{s}{4})^{j-l} Nf\big)(\lambda, k+l+q_{n-l-r}), & si\ \lambda<0. \end{cases}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.1.9 y la Proposición 3.2.1. □

Teorema 3.2.3. *Sean $i,j\in\mathbb{N}_0$ y F como en* (3.0.1)*. Entonces, $(M_n^+)^i(M_n^-)^j F$ es una función rápidamente decreciente en el sentido de la Definición 1.0.4.*

Demostración. Extendemos $(M_n^+)^i(M_n^-)^j F$ a $\Delta(U(n),H_n)$ por

$$(M_n^+)^i(M_n^-)^j F(0,\sigma) = \sum_{l=0}^{\min\{j,n-1\}} \alpha_{j,l}^n \sum_{r=0}^{i} \beta_{i,r}^n \ \mathcal{F}_{n-l-r}\big((-it-\tfrac{s}{4})^{i-r}(-it+\tfrac{s}{4})^{j-l} Nf\big)(0,\sigma),$$

para $\sigma\geq 0$. Esta extensión es una función continua ya que $\mathcal{F}_j(Nf)$ es continua para todo j debido a la Observación 1.0.13 y al Teorema 1.0.7.

Las pruebas de los otros incisos de la Definición 1.0.4 son similares a la prueba del Teorema 3.1.7. □

Ahora, estamos en condiciones de probar el resultado principal de este capítulo.

Demostración del Teorema 1.0.14. La afirmación para F se sigue del último teorema y del Teorema 1.0.7. Y el mismo argumento se aplica sobre G con el siguiente cambio, tomamos

$$g_{2-j}(z,t) = \frac{1}{\pi(j-1)!} Nf(-|z|^2,t),\ \forall (z,t)\in\mathbb{C}^{2-j}\times\mathbb{R},$$

en la Definición 3.1.1. □

3.3. Apéndice

De ahora en adelante, usaremos las siguientes igualdades que satisfacen los polinomios de Laguerre

$$L_k^{(\alpha-1)}(x) = L_k^{(\alpha)}(x) - L_{k-1}^{(\alpha)}(x) \tag{3.3.1}$$

$$\frac{d}{dx}L_k^{(\alpha)}(x) = x^{-1}[kL_k^{(\alpha)}(x) - (k+\alpha)L_{k-1}^{(\alpha)}(x)] \tag{3.3.2}$$

$$k\ L_k^{(\alpha)}(0) = (k+\alpha)\ L_{k-1}^{(\alpha)}(0) \tag{3.3.3}$$

$$(k+1)\ L_{k+1}^{(\alpha)}(x) = (-x+2(k+1)+\alpha-1)\ L_k^{(\alpha)}(x) - (k+\alpha)\ L_{k-1}^{(\alpha)}(x). \tag{3.3.4}$$

Lema 3.3.1. *Sea* $d^n_{j,k}$ *como en* (3.0.4). *Entonces*

$$d^n_{j,k} - d^n_{j,k-1} = -d^{n-1}_{j,k}.$$

Demostración. Por las identidades (3.3.3) y (3.3.1) tenemos que

$$\begin{aligned} d^n_{j,k} - d^n_{j,k-1} &= 4^j \sum_{i=j}^{n-2} \frac{1}{2^i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i-2} \left[L^{(n-i-2)}_{k+i+1}(0) - L^{(n-i-2)}_{k+i}(0) \right] \\ &= -4^j \sum_{i=j}^{n-3} \frac{1}{2^i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i-3} L^{(n-i-3)}_{k+i+1}(0) \\ &= -d^{n-1}_{j,k}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.3.2. *Sean* $i, k \in \mathbb{N}$. *Sea* D *el operador lineal sobre el espacio de la funciones polinomiales sobre* $\mathbb{R}$ *definido por*

$$DL^{(0)}_k = L^{(0)}_k - L^{(0)}_{k-1}.$$

Entonces

$$D^i(L^{(0)}_k) - D^i(L^{(0)}_{k-1}) = D^{i+1}(L^{(0)}_k).$$

Demostración. Por (3.1.1) y por la igualdad $\binom{i}{l} + \binom{i}{l-1} = \binom{i+1}{l}$ tenemos que

$$\begin{aligned} D^i(L^{(0)}_k) - D^i(L^{(0)}_{k-1}) &= \sum_{l=0}^{\min\{k,i\}} (-1)^l \binom{i}{l} L^{(0)}_{k-l} - \sum_{l=0}^{\min\{k-1,i\}} (-1)^l \binom{i}{l} L^{(0)}_{k-1-l} \\ &= \sum_{l=0}^{\min\{k,i\}} (-1)^l \binom{i}{l} L^{(0)}_{k-l} - \sum_{l=1}^{\min\{k-1,i\}+1} (-1)^l \binom{i}{l-1} L^{(0)}_{k-l} \\ &= \sum_{l=0}^{\min\{k,i\}} (-1)^l \binom{i}{l} L^{(0)}_{k-l} - \sum_{l=1}^{\min\{k,i+1\}} (-1)^l \binom{i}{l-1} L^{(0)}_{k-l}. \end{aligned}$$

Si $\min\{k, i\} = \min\{k, i+1\}$ entonces

$$\begin{aligned} D^i(L^{(0)}_k) - D^i(L^{(0)}_{k-1}) &= \sum_{l=1}^{\min\{k,i+1\}} (-1)^l (\binom{i}{l} - \binom{i}{l-1}) L^{(0)}_{k-l} + L^{(0)}_k \\ &= \sum_{l=0}^{\min\{k,i+1\}} (-1)^l \binom{i+1}{l} L^{(0)}_{k-l} \\ &= D^{i+1} L^{(0)}_k. \end{aligned}$$

Si $\text{mín}\{k,i\}+1 = i+1 = \text{mín}\{k,i+1\}$ $(i<k)$ entonces

$$\begin{aligned}
D^i(L_k^{(0)}) - D^i(L_{k-1}^{(0)}) &= L_k^{(0)} + \sum_{l=1}^{i}(-1)^l \left(\binom{i}{l} - \binom{i}{l-1}\right) L_{k-l}^{(0)} + (-1)^{i+1} L_{k-i+1}^{(0)} \\
&= L_k^{(0)} + \sum_{l=1}^{i}(-1)^l \binom{i+1}{l} L_{k-l}^{(0)} + (-1)^{i+1} L_{k-\text{mín}\{k,i+1\}}^{(0)} \\
&= \sum_{l=0}^{i+1}(-1)^l \binom{i+1}{l} L_{k-l}^{(0)} \\
&= \sum_{l=0}^{\text{mín}\{k,i+1\}} (-1)^l \binom{i+1}{l} L_{k-l}^{(0)} \\
&= D^{i+1} L_k^{(0)}.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.3.3. *Sea* $d_{j,k}^n$ *como en* (3.0.4). *Entonces*

$$(n-j-2)\ d_{j,k}^n + (k+n-1)\ d_{j,k}^{n-1} = \frac{j+1}{4}\ d_{j+1,k}^n.$$

Demostración. Por la Definición 3.0.4 y la igualdad (3.3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
&(n-j-2)\ d_{j,k}^n + (k+n-1)\ d_{j,k}^{n-1} \\
&\quad = 4^j \sum_{i=j}^{n-2} \frac{1}{2^i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i-2} (n-j-2)\ L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0) \\
&\quad + 4^j \sum_{i=j}^{n-3} \frac{1}{2^i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i-3} (k+n-1)\ L_{k+i+1}^{(n-i-3)}(0) \\
&\quad = 4^j \sum_{i=j}^{n-2} \frac{1}{2^i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i-2} (n-j-2)\ L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0) \\
&\quad - 4^j \sum_{i=j}^{n-2} \frac{1}{2^i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i-2} (k+n-1) [L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0) - L_{k+i}^{(n-i-2)}(0)].
\end{aligned}$$

Ya que $(k+n-1)\ L_{k+i}^{(n-i-2)}(0) = (k+i+1)\ L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0)$ como consecuencia de la igualdad (3.3.3), entonces

$$\begin{aligned}
&(n-j-2)\ L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0) - (k+n-1)\ [L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0) - L_{k+i}^{(n-i-2)}(0)] \\
&= (n-j-2)\ L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0) - (k+n-1)\ L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0) + (k+i+1)\ L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0) \\
&= (i-j)\ L_{k+i+1}^{(n-i-2)}(0).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
(n-j-2)\ d^n_{j,k} + (k+n-1)\ d^{n-1}_{j,k} &= 4^j \sum_{i=j}^{n-2} \frac{1}{2^i}(i-j)\tbinom{i}{j}(-1)^{n-i-2} L^{(n-i-2)}_{k+i+1}(0)\\
&= 4^j \sum_{i=j+1}^{n-2} \frac{1}{2^i}(j+1)\tbinom{i}{j+1}(-1)^{n-i-2} L^{(n-i-2)}_{k+i+1}(0)\\
&= \frac{j+1}{4}\ 4^{j+1} \sum_{i=j+1}^{n-2} \frac{1}{2^i}\tbinom{i}{j+1}(-1)^{n-i-2} L^{(n-i-2)}_{k+i+1}(0)\\
&= \frac{j+1}{4}\ d^n_{j+1,k}.
\end{aligned}$$

donde hemos usado $(j+1)\binom{i}{j+1} = (i-j)\binom{i}{j}$. □

Lema 3.3.4. *Sea $j \in \mathbb{N}$. Para $\varphi = \varphi(s)$, denotamos $\langle \delta^{(j)}, \varphi\rangle = (-1)^j \frac{d\varphi}{ds}|_{s=0}$. Entonces,*

$$\langle \delta^{(j)}, (-it - \tfrac{s}{4})Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle = \frac{\partial}{\partial\lambda}\langle \delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle + \frac{j}{4}\langle \delta^{(j-1)}, Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle, \tag{3.3.5}$$

y

$$\langle \delta^{(j)}, (-it + \tfrac{s}{4})Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle = \frac{\partial}{\partial\lambda}\langle \delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle - \frac{j}{4}\langle \delta^{(j-1)}, Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle. \tag{3.3.6}$$

Demostración. Por la definición de la distribución $\delta^{(j)}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \delta^{(j)}, (-it - \tfrac{s}{4})Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle &= (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial s^j}\Big((-\tfrac{s}{4} - it)Nf(s,\hat\lambda)\Big)|_{s=0}\\
&= (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\frac{\partial^j}{\partial s^j}\big((-\tfrac{s}{4} - it)Nf(s,t)\big)|_{s=0}\ dt\\
&= (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\left[(-it)\frac{\partial^j Nf}{\partial s^j}(0,t) - j\ \frac{1}{4}\frac{\partial^{j-1}Nf}{\partial s^{j-1}}(0,t)\right]\ dt\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\langle \delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle + \frac{j}{4}(-1)^{j-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\frac{\partial^{j-1}Nf}{\partial s^{j-1}}(0,t)\ dt\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\langle \delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle + \frac{j}{4}\langle \delta^{(j-1)}, Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle.
\end{aligned}$$

La prueba para (3.3.6) es completamente similar. □

Proposición 3.3.5. *Sean $n \geq 2$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Entonces*

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda}(\lambda,k) = \begin{cases} -(k+n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n), & si\ \lambda > 0,\\[2ex] (k+n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda, k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it+\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n), & si\ \lambda < 0. \end{cases}$$

Demostración. Ya que

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda}\left((-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\int_{s>0} e^{-it\lambda}\ e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,t)\ ds\ dt\right)\\
&= (-1)^{n-1}(n-1)sg(\lambda)|\lambda|^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\int_{s>0} e^{-it\lambda}e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,t)\ ds\ dt\\
&+ |\lambda|^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\int_{s>0}(-it)e^{-it\lambda}\ e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{n-1}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,t)\ ds\ dt\\
&+ |\lambda|^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\int_{s>0} e^{-it\lambda}\left(-sg(\lambda)\tfrac{s}{4}\right) e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,t)\ ds\ dt\\
&+ |\lambda|^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\int_{s>0} e^{-it\lambda}\ e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2})\right) Nf(s,t)\ ds\ dt\\
&= -(n-1)sg(\lambda)(-|\lambda|)^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\int_{s>0} e^{-it\lambda}\ e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,t)\ ds\ dt\\
&+ (-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\int_{s>0}\left(-sg(\lambda)\tfrac{s}{4}-it\right) e^{-it\lambda}\ e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-1)}(\frac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,t)\ ds\ dt\\
&- sg(\lambda)(-|\lambda|)^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\int_{s>0} e^{-it\lambda-\frac{s|\lambda|}{4}}\left[kL_k^{(n-1)}-(k+n-1)L_{k-1}^{(n-1)}\right]\left(\tfrac{s|\lambda|}{2}\right) Nf(s,t)\ ds\ dt\\
&= -sg(\lambda)(k+n-1)(-1)^{n-2}|\lambda|^{n-2}\int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-2)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,\hat{\lambda})\ ds\\
&+ (-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2})(-sg(\lambda)\tfrac{s}{4}-it) Nf(s,\hat{\lambda})\ ds,
\end{aligned}
$$

donde en la última igualdad hemos usado (3.3.1). Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial\lambda}(\lambda,k) =& -sg(\lambda)(k+n-1)(-1)^{n-2}|\lambda|^{n-2}\int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-2)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,\hat{\lambda})\ ds\\
&+ (-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2})(-sg(\lambda)\tfrac{s}{4}-it) Nf(s,\hat{\lambda})\ ds\\
&+ sg(\lambda)\sum_{j=0}^{n-3} d_{j,k}^n (n-j-2)|\lambda|^{n-j-3}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle\\
&+ \sum_{j=0}^{n-2} d_{j,k}^n |\lambda|^{n-j-2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle.
\end{aligned}
$$

Así, para $\lambda > 0$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial\lambda}(\lambda,k) =& -(k+n-1)(-1)^{n-2}|\lambda|^{n-2}\int_{s>0} e^{-s|\lambda|/4} L_k^{(n-2)}(\tfrac{s|\lambda|}{2}) Nf(s,\hat{\lambda})\ ds\\
&+ (-1)^{n-1}|\lambda|^{n-2}\int_{s>0} e^{-s|\lambda|/4} L_k^{(n-2)}(\tfrac{|\lambda|s}{2}) Nf(s,\hat{\lambda}) ds\\
&+ \sum_{j=0}^{n-3} d_{j,k}^n (n-j-2)|\lambda|^{n-j-3}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle\\
&+ \sum_{j=0}^{n-2} d_{j,k}^n |\lambda|^{n-j-2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle,
\end{aligned}
$$

luego sumamos y restamos las siguientes partes singulares

$$(k+n-1)\sum_{j=0}^{n-3} d_{j,k}^{n-1}|\lambda|^{n-j-3}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{n-2} d_{j,k}^{n}|\lambda|^{n-j-2}\langle\delta^{(j)}, ((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(\cdot,\hat{\lambda})\rangle$$

y por los Lemas 3.3.3 y 3.3.4 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial\lambda}(\lambda,k) &= -(k+n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-3}\left[(n-j-2)\ d_{j,k}^{n} + (k+n-1)\ d_{j,k}^{n-1}\right]|\lambda|^{n-j-3}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-2} d_{j,k}^{n}|\lambda|^{n-j-2}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle - \langle\delta^{(j)}, ((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(\cdot,\hat{\lambda})\rangle\right] \\
&= -(k+n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-3}|\lambda|^{n-j-3}\frac{j+1}{4}\ d_{j+1,k}^{n}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n-2}\ d_{j,k}^{n}|\lambda|^{n-j-2}\frac{j}{4}\langle\delta^{(j-1)}, Nf(s,\hat{\lambda})\rangle \\
&= -(k+n-1)\mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n).
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $\lambda < 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial\lambda}(\lambda,k) &= (k+n-1)(-1)^{n-2}|\lambda|^{n-2}\int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-2)}(\tfrac{s|\lambda|}{2})Nf(s,\hat{\lambda})\ ds \\
&\quad + (-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{s>0} e^{-\frac{s|\lambda|}{4}} L_k^{(n-1)}(\tfrac{s|\lambda|}{2})\left((-it+\tfrac{s}{4})Nf\right)(s,\hat{\lambda})\ ds \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-3} d_{j,k}^{n}(n-j-2)\ |\lambda|^{n-j-3}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-2} d_{j,k}^{n}\ |\lambda|^{n-j-2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle,
\end{aligned}$$

luego sumamos y restamos las partes singulares

$$(k+n-1)\sum_{j=0}^{n-3} d_{j,k}^{n-1}|\lambda|^{n-j-3}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{n-2} d_{j,k}^{n}|\lambda|^{n-j-2}\langle\delta^{(j)}, ((-it+\tfrac{s}{4})Nf)(\cdot,\hat{\lambda})\rangle,$$

y por los Lemas 3.3.3 y 3.3.4 obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,k) &= (k+n-1)\ \mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k+q_{n-1}) + \mathcal{F}_n((-it+\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k+q_n)\\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-3}[(n-j-2)\ d^n_{j,k} + (k+n-1)\ d^{n-1}_{j,k}]|\lambda|^{n-j-3}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle\\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-2} d^n_{j,k}|\lambda|^{n-j-2}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\delta^{(j)}, Nf(\cdot,\hat\lambda)\rangle - \langle\delta^{(j)}, ((-it+\tfrac{s}{4})Nf)(\cdot,\hat\lambda)\rangle\right]\\
&= (k+n-1)\ \mathcal{F}_{n-1}(Nf)(\lambda,k) + \mathcal{F}_{n-1}((-it+\tfrac{s}{4})Nf)(\lambda,k).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.3.6. *Sean $n \geq 2$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Entonces,*

(a) $(k+n-1)\ L_k^{(n-2)}(x) - (k+n)\ L_{k+1}^{(n-2)}(x) = x\ L_k^{(n-1)}(x) - (n-1)L_{k+1}^{(n-2)}(x)$,

(b) $(k+n-1)\ d^{n-1}_{j,k} - (k+n)\ d^{n-1}_{j,k+1} = -(n-1)\ d^{n-1}_{j,k+1} + \frac{j+1}{2}\ d^n_{j+1,k}$.

Demostración. **(a)** Por la igualdad (3.3.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
&(k+n-1)\ L_k^{(n-2)}(x) - (k+n)\ L_{k+1}^{(n-2)}(x)\\
&= (k+n-1)\ [L_k^{(n-1)}(x) - L_{k-1}^{(n-1)}(x)] - (k+n)\ [L_{k+1}^{(n-1)}(x) - L_k^{(n-1)}(x)]\\
&= -(k+n)\ L_{k+1}^{(n-1)}(x) + (2(k+n)-1)\ L_k^{(n-1)}(x) - (k+n-1)\ L_{k-1}^{(n-1)}(x)\\
&= -(k+1)\ L_{k+1}^{(n-1)}(x) - (n-1)\ L_{k+1}^{(n-1)}(x) + (2(k+n)-1)\ L_k^{(n-1)}(x)\\
&\quad - (k+n-1)\ L_{k-1}^{(n-1)}(x).
\end{aligned}$$

Entonces, por las igualdades (3.3.4) y (3.3.1) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&(k+n-1)\ L_k^{(n-2)}(x) - (k+n)\ L_{k+1}^{(n-2)}(x)\\
&= -(-x+2k+2+n-1-1)\ L_k^{(n-1)}(x) + (k+1+n-1-1)\ L_{k-1}^{(n-1)}(x)\\
&- (n-1)\ L_{k+1}^{(n-1)}(x) + (2(k+n)-1)\ L_k^{(n-1)}(x) - (k+n-1)\ L_{k-1}^{(n-1)}(x)\\
&= -(n-1)\ L_{k+1}^{(n-1)}(x) + (n-1)\ L_k^{(n-1)}(x) + x\ L_k^{(n-1)}(x)\\
&= -(n-1)\ L_{k+1}^{(n-2)}(x) + x\ L_k^{(n-1)}(x).
\end{aligned}$$

(b) Tomamos $\bar k = k+i+1$ y $\bar n = n-i-1$, por (a) tenemos que

$$(\bar k+\bar n-1)\ L_{\bar k}^{(\bar n-2)}(0) - (\bar k+\bar n)\ L_{\bar k+1}^{(\bar n-2)}(0) = -(\bar n-1)\ L_{\bar k+1}^{(\bar n-2)}(0).$$

Por lo tanto, si reemplazamos $\bar k$ y $\bar n$ obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
&(k+n-1)\ L_{k+i+1}^{(n-i-3)}(0) - (k+n)\ L_{k+i+2}^{(n-i-3)}(0) = -(n-i-2)\ L_{k+i+2}^{(n-i-3)}(0)\\
&= -(n-1)\ L_{k+i+2}^{(n-i-3)}(0) + (i+1)\ L_{k+i+2}^{(n-i-3)}(0).
\end{aligned}$$

Así, por la Definición 3.0.4, la última igualdad y $\binom{i}{j}(i+1)=\binom{i+1}{j+1}(j+1)$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&(k+n-1)\ d^{n-1}_{j,k}-(k+n)\ d^{n-1}_{j,k+1}\\
&=4^j\sum_{i=j}^{n-3}\frac{1}{2^i}\tbinom{i}{j}(-1)^{n-i-3}[(k+n-1)\ L^{(n-i-3)}_{k+i+1}(0)-(k+n)\ L^{(n-i-3)}_{k+i+2}(0)]\\
&=4^j\sum_{i=j}^{n-3}\frac{1}{2^i}\tbinom{i}{j}(-1)^{n-i-3}[-(n-1)\ L^{(n-i-3)}_{k+i+2}(0)+(i+1)\ L^{(n-i-3)}_{k+i+2}(0)]\\
&=-(n-1)\ d^{n-1}_{j,k+1}+4^j\sum_{i=j}^{n-3}\frac{1}{2^i}\tbinom{i}{j}(i+1)(-1)^{n-i-3}L^{(n-i-3)}_{k+i+2}(0)\\
&=-(n-1)\ d^{n-1}_{j,k+1}+4^j\sum_{i=j}^{n-3}\frac{1}{2^i}\tbinom{i+1}{j+1}(j+1)(-1)^{n-i-3}L^{(n-i-3)}_{k+i+2}(0)\\
&=-(n-1)\ d^{n-1}_{j,k+1}+2\ 4^j\sum_{i=j+1}^{n-2}\frac{1}{2^i}\tbinom{i}{j+1}(j+1)(-1)^{n-i-2}L^{(n-i-2)}_{k+i+1}(0)\\
&=-(n-1)\ d^{n-1}_{j,k+1}+\frac{j+1}{2}\ d^{n}_{j+1,k}.
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.3.7. *Sea $n\geq 2$ y $f\in\mathcal{S}(H_n)$. Entonces,*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_n((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(k,\lambda)-\mathcal{F}_n((-it+\tfrac{s}{4})Nf)(k,\lambda)\\
&=-(-|\lambda|)^{n-1}\int_{s>0}e^{-s|\lambda|/4}L^{(n-1)}_k(\tfrac{s|\lambda|}{2})\ \frac{s}{2}Nf(s,\hat{\lambda})ds+\sum_{j=0}^{n-3}\frac{j+1}{2}\ d^n_{j+1,k}|\lambda|^{n-j-3}\langle\delta^{(j)},Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle.
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_n((-it-\tfrac{s}{4})Nf)(s,\lambda)-\mathcal{F}_n((-it+\tfrac{s}{4})Nf)(s,\lambda)\\
&=(-|\lambda|)^{n-1}\int_{s>0}e^{-\frac{s|\lambda|}{4}}L^{(n-1)}_k(\tfrac{s|\lambda|}{2})\left[(-it-\tfrac{s}{4})Nf(s,\hat{\lambda})-(-it+\tfrac{s}{4})Nf(s,\hat{\lambda})\right]ds\\
&+\sum_{j=0}^{n-2}d^n_{j,k}|\lambda|^{n-j-2}\left[\langle\delta^{(j)},(-it-\tfrac{s}{4})Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle-\langle\delta^{(j)},(-it+\tfrac{s}{4})Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle\right]\\
&=(-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{s>0}e^{-\frac{s|\lambda|}{4}}L^{(n-1)}_k(\tfrac{s|\lambda|}{2})(-\frac{s}{2})Nf(s,\hat{\lambda})\ ds\\
&+\sum_{j=1}^{n-2}\frac{j}{2}\ d^n_{j,k}|\lambda|^{n-j-2}\langle\delta^{(j-1)},Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle\\
&=-(-1)^{n-1}|\lambda|^{n-1}\int_{s>0}e^{-s|\lambda|/4}L^{(n-1)}_k(\tfrac{s|\lambda|}{2})(\frac{s}{2})Nf(s,\hat{\lambda})\ ds\\
&+\sum_{j=0}^{n-3}\frac{j+1}{2}\ d^n_{j+1,k}|\lambda|^{n-j-3}\langle\delta^{(j)},Nf(\cdot,\hat{\lambda})\rangle,
\end{aligned}
$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el Lema 3.3.4. □

Capítulo 4

Caracterización de la imagen de la transformada esférica asociada a $(U(p,q), H_n)$.

En este cápitulo obtendremos la caracterización de la transformada de Gelfand o esférica normalizada asociada al par de Gelfand generalizado $(U(p,q), H_n)$. Los resultados principales se encuentran en los Teoremas .

Recordemos que el espectro asociado a este par es identificado con

$$\Sigma = \{(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) : \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,\sigma) : \sigma \in \mathbb{R}\}.$$

Además, para $f \in \mathcal{S}(H_n)$ hemos definido $\mathcal{F}(f)$ su transformada esférica normalizada sobre Σ por

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \begin{cases} |\lambda|^{n-1}\langle S_{\lambda,k}, f\rangle, & k \geq 0, \\ (-1)^{n-2}|\lambda|^{n-1}\langle S_{\lambda,k}, f\rangle, & k < 0, \end{cases}$$

y por

$$\mathcal{F}(0,\sigma) = \langle S_\sigma, f\rangle$$

donde $S_{\lambda,k}$ es la distribución definida en (2.2.5) y (2.2.6) y S_σ es la distribución definida en (2.2.7) y (2.2.8).

4.1. Las restricciones al espectro de funciones de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ están en la imágen

En esta sección probaremos el resultado análogo al mostrado por Veneruso en [18], el cual enuncia que la restricción al espectro $\Delta(U(n), H_n)$ de una función de clase Schwartz sobre $\mathbb{R}^2$ está en la imagen de la transformada esférica asociada al par de Gelfand $(U(n), H_n)$.

Sea $\mathcal{S}(\Sigma) = \{\varphi|_\Sigma : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\}$.

Sea $\Omega = \{(\lambda, s)/\lambda \neq 0\}$ introducimos la siguiente

Proposición 4.1.1. *Dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, la función*

$$\begin{array}{rcl} F_\varphi : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (\lambda, s) & \mapsto & \dfrac{\varphi(\lambda, s+|\lambda|) - \varphi(\lambda, s-|\lambda|)}{|\lambda|}, \end{array} \tag{4.1.1}$$

se extiende a una función de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. Notar que para $(\lambda, s) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} F_\varphi(\lambda, s) &= \frac{\varphi(\lambda, s+|\lambda|) - \varphi(\lambda, s-|\lambda|)}{|\lambda|} \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \int_{s-|\lambda|}^{s+|\lambda|} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\lambda, u)\, du \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(\lambda, |\lambda|t + s)\, dt, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

donde en la última igualdad hemos realizado el cambio de variables $u = |\lambda|t + s$.

Con el objeto de extender la F_φ a $\mathbb{R}^2$ observemos que por hipótesis, existe $C > 0$ tal que $\|\frac{\partial \varphi}{\partial s}\|_\infty \leq C$, y usando el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\lim_{(\lambda,s)\to(0,s_0)} F_\varphi(\lambda, s) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, s_0)\, dt.$$

para todo $s_0 \in \mathbb{R}$.

Sea $\bar{F}_\varphi$ la extensión continua de F_φ a $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\bar{F}_\varphi(\lambda, s) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(\lambda, |\lambda|t + s)\, dt, \quad \forall (\lambda, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos a mostrar que $\bar{F}_\varphi$ esta en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

(i) Es fácil mostrar para $i, j \in \mathbb{N}_0$ que

$$\frac{\partial^{i+j} F_\varphi}{\partial \lambda^i \partial s^j}(\lambda, s) = \sum_{l=0}^{i} \tbinom{i}{l} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^{i+j+1} \varphi}{\partial \lambda^{i-l} \partial s^{j+l+1}}(\lambda, |\lambda|t + s)(sg(\lambda)t)^l\, dt,\ \forall (\lambda, s) \in \Omega \tag{4.1.3}$$

pues usando el teorema de la convergencia dominada podemos derivar debajo del signo integral.

Del mismo modo que antes, dado $s_0 \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\lim_{\substack{(\lambda,s)\to(0,s_0) \\ (\lambda,s)\in\Omega}} \frac{\partial^{i+j} F_\varphi}{\partial \lambda^i \partial s^j}(\lambda, s) = \sum_{\substack{l=0 \\ l par}}^{i} \tbinom{i}{l} \frac{\partial^{i+j+1} \varphi}{\partial \lambda^{i-l} \partial s^{j+l+1}}(0, s_0) \int_{-1}^{1} t^l\, dt,$$

pues si l es impar,

$$\lim_{(\lambda,s)\to(0,s_0)} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^{i+j+1} \varphi}{\partial \lambda^{i-l} \partial s^{j+l+1}}(\lambda, |\lambda|t + s_0)(sg(\lambda)t)^l\, dt = \frac{\partial^{i+j+1} \varphi}{\partial \lambda^{i-l} \partial s^{j+l+1}}(0, s_0) sg(\lambda) \int_{-1}^{1} t^l\, dt = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^{i+j}\bar{F}_\varphi}{\partial\lambda^i\partial s^j}(0,s) = \sum_{\substack{l=0 \\ l par}}^{i} \binom{i}{l} \frac{\partial^{i+j+1}\varphi}{\partial\lambda^{i-l}\partial s^{j+l+1}}(0,s) \int_{-1}^{1} t^l \, dt, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.1.4}$$

Esta última igualdad y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ nos dice que $\bar{F}_\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(ii) Dados $i, j, N \in \mathbb{N}_0$ y $(\lambda, s) \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
&\left|(\lambda^2+s^2)^{2N}\frac{\partial^{i+j}\bar{F}_\varphi}{\partial\lambda^i\partial s^j}(\lambda,s)\right| \\
&= \left|\sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}\int_{-1}^{1}(\lambda^2+s^2)^{2N}\frac{\partial^{i+j+1}\varphi}{\partial\lambda^{i-l}\partial s^{j+l+1}}(\lambda,|\lambda|t+s)(sg(\lambda)t)^l \, dt\right| \\
&\leq \sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}\int_{-1}^{1}\left(\frac{(\lambda^2+s^2)}{\lambda^2+(|\lambda|t+s)^2}\right)^{2N}\left|(\lambda^2+(|\lambda|t+s)^2)^{2N}\frac{\partial^{i+j+1}\varphi}{\partial\lambda^{i-l}\partial s^{j+l+1}}(\lambda,|\lambda|t+s)\right| \, dt \\
&= \sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}C_{i+j,N}\int_{-1}^{1}\frac{(\lambda^2+s^2)^{2N}}{(\lambda^2+(|\lambda|t+s)^2)^{2N}} \, dt
\end{aligned}$$

donde $C_{i+j,N}$ es una constante positiva independiente de (λ, s).

Luego si $|s| \leq 4|\lambda|$ entonces,

$$\frac{\lambda^2+s^2}{\lambda^2+(|\lambda|t+s)^2} \leq \frac{\lambda^2+s^2}{\lambda^2} \leq 1+\frac{s^2}{\lambda^2} \leq 1+16. \tag{4.1.5}$$

Si $s > 4|\lambda|$ existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$ tal que

$$k|\lambda| < s \leq (k+1)|\lambda|$$

luego $(k-1)|\lambda| < s - |\lambda| \leq k|\lambda|$ y $0 < (k-1)|\lambda| \leq s - |\lambda| \leq |\lambda|t + s$ para todo $-1 < t < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2+s^2}{\lambda^2+(|\lambda|t+s)^2} &\leq \frac{\lambda^2+(k+1)^2\lambda^2}{\lambda^2+(k-1)^2\lambda^2} = \frac{2+k^2+2k}{2+k^2-2k} \\
&= \frac{\frac{2}{k^2}+1+\frac{2}{k}}{\frac{2}{k^2}+1-\frac{2}{k}} \leq \frac{1+1+1}{1-\frac{2}{k}} \leq 6.
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Si $s < -4|\lambda|$ entonces $-s > 4|\lambda|$ y por lo que hicimos antes

$$6 \geq \frac{\lambda^2+(-s)^2}{\lambda^2+(|\lambda|t-s)^2} = \frac{\lambda^2+s^2}{\lambda^2+(-|\lambda|t+s)^2} = \frac{\lambda^2+s^2}{\lambda^2+(|\lambda|t'+s)^2}. \tag{4.1.7}$$

Finalmente, de (4.1.5),(4.1.6) y (4.1.7) tenemos que

$$\sup_{(\lambda,s)\in\Omega}\left|(\lambda^2+s^2)^{2N}\frac{\partial^{i+j}\bar{F}_\varphi}{\partial\lambda^i\partial s^j}(\lambda,s)\right|\le C_N\sum_{l=0}^{i}\tbinom{i}{l}C_{i+j,N},$$

y además por (4.1.4) existe una constante positiva $\bar{C}_{i+j,N}$ tal que

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|s^N\frac{\partial^{i+j}\bar{F}_\varphi}{\partial\lambda^i\partial s^j}(0,s)\right|\le\bar{C}_{i+j,N}.$$

□

Lema 4.1.2. *Sea $n\ge 2$. Si $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ entonces, existe $\varphi_{n-2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-1-2l))=F_{\varphi_{n-2}}(\lambda,s)\tag{4.1.8}$$

para todo $(\lambda,s)\in\Omega$.

Demostración. Para $n=2$, es claro que $\varphi_0=\varphi$ satisface la tesis.

Supongamos por inducción para $n\ge 2$ que, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ implica la existencia de $\phi_{n-2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tal que la tesis es cierta.

Luego, para $n+1$ y $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ es cierto que

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\tbinom{n}{l}\frac{\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-2l))}{|\lambda|^n}=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}\frac{F_\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-1-2l))}{|\lambda|^{n-1}},$$

pues

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}F_\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-1-2l))\\
=\;&\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}\frac{[\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-1-2l)+|\lambda|)-\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-1-2l)-|\lambda|)]}{|\lambda|^{n-1}|\lambda|}\\
=\;&\frac{1}{|\lambda|^n}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}[\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-2l))-\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-2(l+1)))]\\
=\;&\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}\frac{\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-2l))}{|\lambda|^n}+\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+1}\tbinom{n-1}{l}\frac{\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-2(l+1)))}{|\lambda|^n}\\
=\;&\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}\frac{\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-2l))}{|\lambda|^n}+\sum_{l=1}^{n}(-1)^l\tbinom{n-1}{l-1}\frac{\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-2l))}{|\lambda|^n}\\
=\;&\frac{1}{|\lambda|^n}\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\tbinom{n}{l}\varphi(\lambda,s+|\lambda|(n-2l)),
\end{aligned}$$

donde esta última igualdad se deduce de $\binom{n-1}{l}+\binom{n-1}{l-1}=\binom{n}{l}$.

Por la Proposición 4.1.1 sabemos que F_φ definida en Ω se extiende a una función $\bar{F}_\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y, por hipótesis inductiva, existe $(\bar{F}_\varphi)_{n-2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\frac{F_\varphi(\lambda, s+|\lambda|(n-1-2l))}{|\lambda|^{n-1}} = \frac{(\bar{F}_\varphi)_{n-2}(\lambda, s+|\lambda|)-(\bar{F}_\varphi)_{n-2}(\lambda, s-|\lambda|)}{|\lambda|}$$

de donde tomando $\varphi_{n-1} = (\bar{F}_\varphi)_{n-2}$, la tesis es cierta. $\square$

Demostración del Teorema 1.0.16. Sea m la aplicación definida sobre $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{Z}$ por

$$m(\lambda,k) = \begin{cases} \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\varphi(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) & si\ k\geq 0, \\ (-1)^{n-2}\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\varphi(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) & si\ k<0. \end{cases} \tag{4.1.9}$$

Recordemos que

$$m^*(\lambda,k) = \begin{cases} m(\lambda,k), & \text{si } k\geq 0, \\ (-1)^{n-2}m(\lambda,k), & \text{si } k<0. \end{cases}$$

$$m^{**}(\lambda,k) = \begin{cases} m(\lambda,k), & \text{si } k< 0, \\ (-1)^{n-2}m(\lambda,k), & \text{si } k\geq 0. \end{cases}$$

Vamos a mostrar que m satisface las siguientes condiciones establecidas en el Teorema 2.2.9. Es decir,

(i) para todo $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ existe $C_N>0$ tal que

$$|\lambda|^N(|k|+1)^N|m(\lambda,k)| \leq C_N\left(|k|^{n-1}+\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\right),\ k\in\mathbb{Z} \tag{4.1.10}$$

(ii) las siguientes funciones definidas sobre $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}_0$ por

$$(\lambda,k)\mapsto E(m^*)(\lambda,k+q),\ (\lambda,k)\mapsto \tilde{E}(m^{**})(\lambda,-k-p) \tag{4.1.11}$$

se extienden a funciones que pertenecen a $\hat{\mathcal{S}}(U(1),H_1)$, lo que es equivalente por el Teorema 1.0.8 a probar que las aplicaciones

$$(\lambda,(2k+1)|\lambda|)\mapsto E(m^*)(\lambda,k+q)$$

y

$$(\lambda,(2k+1)|\lambda|)\mapsto E(m^{**})(\lambda,-k-p),$$

definidas para $\lambda\neq 0$ y $k\in\mathbb{N}_0$, admiten extensión Schwartz a $\mathbb{R}^2$.

En efecto, dado $N\in\mathbb{N}_0$

$$
\begin{aligned}
&\big||\lambda|^N(|k|+1)^N m(\lambda,k)\big| \\
&= \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\big||\lambda|^N(|k|+1)^N\varphi(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\big| \\
&= \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\left(\frac{|k|+1}{|2k+p-q|+1}\right)^N\big||\lambda|^N(|2k+p-q|+1)^N\varphi(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\big| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\frac{(|k|+1)^N}{(|2k+p-q|+1)^N}C_{0,N} \\
&\leq C_N\left(|k-1|^{n-1}+\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\right),
\end{aligned}
$$

la tercera desigualdad sale del hecho de que $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, luego tenemos **(i)**.

Para mostrar **(ii)** es suficiente notar de la definición de $E(m)$ y m^* dada en 2.2.8 que

$$
\begin{aligned}
E(m^*)(\lambda,k+q) &= \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}m^*(\lambda,k+q-l) \\
&= \sum_{l=0}^{\text{mín}\{k+q,n-l\}}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}m(\lambda,k+q-l) \\
&\quad+\sum_{l=k+q+1}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}(-1)^{n-2}m(\lambda,k+q-l) \\
&= \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\varphi(\lambda,|\lambda|(2(k+q-l)+p-q)) \\
&= \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}\varphi(\lambda,|\lambda|(2(k-l)+n)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la primera aplicación de (4.1.11) coincide sobre $\Delta_1(U(1),H_1)$ con la aplicación definida por

$$(\lambda,s)\mapsto F_{\varphi_{n-2}}(\lambda,s),\quad \forall(\lambda,s)\in\Omega$$

donde $\varphi_{n-2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ viene dada por el Lema 4.1.2. Luego, por la Proposición 4.1.1, esta aplicación se extiende a una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Análogamente, para la segunda aplicación de (4.1.11) se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(m^{**})(\lambda,-k-p) &= \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}m^{**}(\lambda,-k-p+l)\\
&= \sum_{l=0}^{\text{mín}\{k+p-1,n-1\}}(-1)^l\binom{n-1}{l}m(\lambda,-k-p+l)\\
&\quad+\sum_{l=k+p}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}(-1)^{n-2}m(\lambda,-k-p+l)\\
&= (-1)^{n-2}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\varphi(\lambda,|\lambda|(2(-k-p+l)+p-q))\\
&= (-1)^{n-2}\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\varphi(\lambda,|\lambda|(-2(k-l)-n)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{E}(m^{**})$ coincide sobre $\Delta_1(U(1),H_1)$ con la aplicación definida por

$$(\lambda,s)\mapsto\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\psi(\lambda,s+|\lambda|(2(k-l)+n))$$

sobre Ω, donde $\psi(\lambda,s)=(-1)^{n-2}\varphi(\lambda,-s)$. Obviamente $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ pues $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Luego, por el Lema 4.1.2 y la Proposición 4.1.1, esta última aplicación se extiende a una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Finalmente, como se verifica **(i)** y **(ii)** para m usamos el Teorema 2.2.9 y la tesis es cierta. $\square$

4.2. Primera caracterización de la imagen de la transformada esférica asociada a $(U(p,q),H_n)$

Nuestro objetivo es encontrar un espacio de funciones definidas sobre $\mathbb{R}^2$ cuyas restricciones al espectro Σ estén en la imagen de la transformada esférica normalizada asociada a $(U(p,q),H_n)$ y tal que, dada cualquier $f\in\mathcal{S}(H_n)$ podamos extender su transformada esférica $\mathcal{F}(f)$ a una función de este espacio.

Hasta ahora, sabemos que las restricciones a Σ de funciones de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ están en la imagen de la transformada. Es claro que, no podemos esperar que dada cualquier función $f\in\mathcal{S}(H_n)$ su transformada esférica $\mathcal{F}(f)$ se extienda a una función de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, debido a la Proposición 2.2.6 probada en los preliminares.

Comenzamos recordando el espacio de funciones $\mathcal{H}_n$ de la Definición 1.0.17.

Sea $\mathcal{H}_n$ el espacio de las funciones definidas sobre $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\varphi(\lambda,s)=\varphi_1(\lambda,s)+\prod_{k=-p+1}^{q-1}(s-(2k+p-q)|\lambda|)\ \varphi_2(\lambda,s)\ H(s),$$

donde $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Observar que

$$\{2k+p-q : -p+1 \leq k \leq q+1\} = \{-(n-2)+2k : k=0,\dots,n-2\},$$

y en consecuencia

$$\prod_{k=-p+1}^{q-1}(s-(2k+p-q)|\lambda|) = \begin{cases} s\prod_{k=0}^{\frac{n-4}{2}}(s^2-(n-2-2k)^2\lambda^2), & \text{si } n \text{ es par} \\ \prod_{k=0}^{\frac{n-3}{2}}(s^2-(n-2-2k)^2\lambda^2), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Esta observación permite concluir que la aplicación

$$(\lambda,s) \mapsto \prod_{k=-p+1}^{q-1}(s-(2k+p-q)|\lambda|)\ \varphi_2(\lambda,s)$$

es de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Observación 4.2.1. *Si $n=2$ entonces*

$$\mathcal{H}_2 = \{\varphi_1(\lambda,s) + s\ \varphi_2(\lambda,s)\ H(s) : \varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\},$$

pues $p=1=q$.

Sean Σ^+ y Σ^- los siguientes subconjuntos de Σ

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \{(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) : k \geq -p+1\} = \{(\lambda,(2k-n+2)|\lambda|) : k \geq 0\}, \\ \Sigma^- &= \{((\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)) : k \leq q-1\} = \{(\lambda,(-2k+n-2)|\lambda|) : k \geq 0\}. \end{aligned}$$

Demostración del Teorema 1.0.20: condición suficiente. Sea m la aplicación definida sobre $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$ por

$$m(\lambda,k) = \begin{cases} \frac{1}{|\lambda|^{n-1}} F(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|), & k \geq 0 \\ (-1)^{n-2}\frac{1}{|\lambda|^{n-1}} F(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|), & k < 0. \end{cases}$$

Vamos a mostrar que m satisface las condiciones **(i)** y **(ii)** del Teorema 2.2.9. En efecto, dado $N \in \mathbb{N}_0$ si $2k+p-q \geq -n+2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left||\lambda|^N(|k|+1)^N m(\lambda,k)\right| &= \frac{1}{|\lambda|}\left||\lambda|^N(|k|+1)^N\varphi(\lambda,|\lambda|2k)\right| \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{|k|+1}{|2k|+1}\right)^N \left||\lambda|^N(|2k|+1)^N\varphi(\lambda,|\lambda|2k)\right| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\frac{(|k|+1)^N}{(|2k|+1)^N}C_{0,0,N} \\ &\leq C_N\left(|k-1|+\frac{1}{|\lambda|}\right), \end{aligned}$$

donde la tercera desigualdad sale del hecho de que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, luego tenemos **(i)**. Para $2k+p-q \leq n-2$ la demostración es análoga con ψ en lugar de φ.

Para mostrar **(ii)** es suficiente notar de la Definición 2.2.8 que

$$\begin{aligned}
E(m^*)(\lambda, k+q) &= \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}m^*(\lambda, k+q-l) \\
&= \sum_{l=0}^{\text{mín}\{k+q,n-l\}}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}m(\lambda, k+q-l) \\
&\quad + \sum_{l=k+q+1}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}(-1)^{n-2}m(\lambda, k+q-l) \\
&= \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}F(\lambda, |\lambda|(2(k+q-l)+p-q)) \\
&= \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}F(\lambda, |\lambda|(2(k-l)+n)) \\
&= \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\tbinom{n-1}{l}\varphi(\lambda, |\lambda|(2(k-l)+n)),
\end{aligned}$$

pues $2(k-l)+n \geq -n+2$ y por hipótesis $F|_{\Sigma^+} = \varphi|_{\Sigma^+}$. Por lo tanto, la primera aplicación de (2.2.11) coincide sobre $\Delta_1(U(1), H_1)$ con la aplicación definida por

$$(\lambda, s) \longmapsto F_{\varphi_{n-2}}(\lambda, s), \quad \forall (\lambda, s) \in \Omega,$$

donde $\varphi_{n-2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ viene dada por el Lema 4.1.2. Luego, por la Proposición 4.1.1, esta aplicación se extiende a una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Entonces, usando el Teorema 1.0.8 probado por Veneruso en [18], **(ii)** es cierto para la primera aplicación de (2.2.11).

Análogamente, para la segunda aplicación de (2.2.11) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}(m^{**})(\lambda,-k-p) &= \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}m^{**}(\lambda,-k-p+l)\\
&= \sum_{l=0}^{\text{mín}\{k+p-1,n-1\}}(-1)^l\binom{n-1}{l}m(\lambda,-k-p+l)\\
&\quad+\sum_{l=k+p}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}(-1)^{n-2}m(\lambda,-k-p+l)\\
&= (-1)^{n-2}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}F(\lambda,|\lambda|(2(-k-p+l)+p-q))\\
&= (-1)^{n-2}\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}F(\lambda,|\lambda|(-2(k-l)-n))\\
&= (-1)^{n-2}\frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\psi(\lambda,|\lambda|(-2(k-l)-n)),
\end{aligned}
$$

pues $-2(k-l)-n \leq n-2$ y por hipótesis $F|_{\Sigma^-} = \psi|_{\Sigma^-}$. Por lo tanto, $\tilde{E}(m^{**})$ coincide sobre $\Delta_1(U(1),H_1)$ con la aplicación definida sobre Ω por

$$
(\lambda,s)\longmapsto \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\bar{\psi}(\lambda,s+|\lambda|(n-1-2l)),
$$

donde $\bar{\psi}(\lambda,s) = (-1)^{n-2}\psi(\lambda,-s)$. Obviamente $\bar{\psi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ pues $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Luego, por el Lema 4.1.2 y la Proposición 4.1.1, esta última aplicación se extiende a una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. □

Demostración del Teorema 1.0.18: condición suficiente. Dada $\varphi\in\mathcal{H}_n$ existen $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tales que

$$
\varphi(\lambda,s) = \varphi_1(\lambda,s) + \prod_{\bar{k}=-p+1}^{q-1}(s-(2\bar{k}+p-q)|\lambda|)\ \varphi_2(\lambda,s)\ H(s).
$$

La aplicación $\overline{\varphi}_2$ definida por $\overline{\varphi}_2(\lambda,s) = \varphi_1(\lambda,s) + \prod_{\bar{k}=-p+1}^{q-1}(s-(2\bar{k}+p-q)|\lambda|)\ \varphi_2(\lambda,s)$ es de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y

$$
\begin{aligned}
\varphi(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) &= \varphi_1(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\\
&\quad+\left(\prod_{k=-p+1}^{q-1}2(k-\bar{k})|\lambda|\right)\varphi_2(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\\
&= \overline{\varphi}_2(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)
\end{aligned}
$$

para todo $k \geq -p+1$, usando el hecho $\prod_{\bar{k}=-p+1}^{q-1} (s-(2\bar{k}+p-q)|\lambda|)\ \varphi_2(\lambda,s) = 0$ para $s = (2k+p-q)|\lambda|$ con $q-1 \geq k \geq -p+1$. Entonces, $\overline{\varphi}_2|_{\Sigma^+} = \varphi|_{\Sigma^+}$.

Por otro lado,

$$\varphi(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) = \varphi_1(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)$$

para todo $k \leq q-1$, usando de nuevo que $\prod_{\bar{k}=-p+1}^{q-1} (s-(2\bar{k}+p-q)|\lambda|)\ \varphi_2(\lambda,s) = 0$ para $s = (2k+p-q)|\lambda|$ con $q-1 \geq k \geq -p+1$. Entonces $\varphi_1|_{\Sigma^-} = \varphi|_{\Sigma^-}$. Luego, por el Teorema 1.0.20 sabemos que $\varphi|_\Sigma$ está en la imagen de la transformada esférica asociada al par $(U(p,q),H_n)$. □

A partir de ahora nos ocuparemos de probar la recíproca del teorema anterior.

Definición 4.2.2. *Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\phi(\lambda) = 1\ \forall|\lambda| < 1$ y $\phi(\lambda) = 0\ \forall|\lambda| \geq 2$.*

Lema 4.2.3. *Dada $f \in \mathcal{S}(H_n)$, por Proposición 2.2.6 existen $\theta_1,\theta_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que*

$$\mathcal{F}(f)(0,s) = \theta_1(s) + s^{n-1}\ \theta_2(s)\ H(s).$$

Entonces, la aplicación

$$\varphi(\lambda,s) = \theta_1(s)\ \phi(\lambda) + \prod_{k=-p+1}^{q-1} (s-(2k+p-q)|\lambda|)\ \theta_2(s)\ \phi(\lambda)\ H(s)$$

está en $\mathcal{H}_n$ y $\varphi(0,s) = \mathcal{F}(f)(0,s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$ y sean $\theta_1,\theta_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que

$$\mathcal{F}(f)(0,s) = \theta_1(s) + s^{n-1}\ \theta_2(s)\ H(s).$$

Entonces, basta tomar

$$\varphi_1(\lambda,s) = \theta_1(s)\ \phi(\lambda)$$

y

$$\varphi_2(\lambda,s) = \theta_2(s)\ \phi(\lambda).$$

□

Las siguientes dos proposiciones nos permiten escribir la transformada $\mathcal{F}(f)$ mediante un desarrollo de Taylor análogo al Lema de Geller probado por Astengo, Di Blasio y Ricci en [1].

Proposición 4.2.4. *Si $f \in \mathcal{S}(H_n)$ es tal que $\mathcal{F}(f)(0,s) = 0\ \forall s \in \mathbb{R}$ entonces, existe $h \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que*

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) = \lambda\ \mathcal{F}(h)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),\ \forall\lambda \neq 0, k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Por hipótesis y por la definicion de S_σ, dada por (2.2.7) y (2.2.8), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle S_\sigma, f\rangle = (-1)^{n-1}\int_0^\infty J_0((\sigma\tau)^{1/2})(Nf)^{(n-1)}(\tau,\hat{0})\,d\tau,\ \forall\sigma\geq 0, && (4.2.1)\\ 0 &= \langle S_\sigma, f\rangle = (-1)^{n-2}\int_0^\infty J_0((-\sigma\tau)^{1/2})(Nf)^{(n-1)}(-\tau,\hat{0})\,d\tau,\ \forall\sigma< 0. && (4.2.2)\end{aligned}$$

Definiendo $f_1(z,t) = (Nf)^{(n-1)}(|z|^2,t)$ para todo $(z,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, es inmediato que $f_1\in\mathcal{S}_{U(1)}(H_1)$. Si $\widehat{f_1}$ denota la transformada esférica de f_1 asociada al par de Gelfand $(U(1),H_1)$, vamos a mostrar que $\widehat{f_1}(0,\sigma)=0$ para todo $\sigma\geq 0$, lo que nos dirá que $f_1(x,\widehat{0})=0\ \forall x\in\mathbb{R}^2$ (ver [1] pag. 789). En efecto, para $\sigma\geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{f_1}(0,\sigma) &= \int_{\mathbb{C}} J_0(\sigma|z|)f_1(z,\widehat{0})\,dz\\ &= \int_{\mathbb{C}} J_0(\sigma|z|)(Nf)^{(n-1)}(|z|^2,\widehat{0})\,dz\\ &= 2\pi\int_0^\infty J_0(\sigma r)(Nf)^{(n-1)}(r^2,\widehat{0})r\,dr\\ &= \pi\int_0^\infty J_0(\sigma\tau^{1/2})(Nf)^{(n-1)}(\tau,\widehat{0})\,d\tau\\ &= (-1)^{n-1}\pi\langle S_{\sigma^2},f\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

donde la última igualdad sale de (4.2.1). Entonces $(Nf)^{(n-1)}(|z|^2,\widehat{0})=0\ \forall z\in\mathbb{C}$, es decir,

$$(Nf)^{(n-1)}(\tau,\widehat{0}) = 0\quad\forall\tau\geq 0. \tag{4.2.3}$$

Ahora, definiendo $f_2(z,t)=(Nf)^{(n-1)}(-|z|^2,t)$ para todo $(z,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ es inmediato que $f_2\in\mathcal{S}_{U(1)}(H_1)$. Y como antes, para $\sigma>0$ tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(0,\sigma) &= \int_{\mathbb{C}} J_0(\sigma|z|)f_2(z,\widehat{0})\,dz\\ &= \int_{\mathbb{C}} J_0(\sigma|z|)(Nf)^{(n-1)}(-|z|^2,\widehat{0})\,dz\\ &= 2\pi\int_0^\infty J_0(\sigma r)(Nf)^{(n-1)}(-r^2,\widehat{0})r\,dr\\ &= \pi\int_0^\infty J_0((-(-\sigma^2)\tau)^{1/2})(Nf)^{(n-1)}(-\tau,\widehat{0})\,d\tau\\ &= (-1)^{n-2}\pi\langle S_{-\sigma^2},Nf\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

donde la última igualdad sale de (4.2.2). Entonces $(Nf)^{(n-1)}(-|z|^2,\widehat{0})=0\ \forall z\in\mathbb{C}$, es decir,

$$(Nf)^{(n-1)}(\tau,\widehat{0}) = 0\quad\forall\tau\leq 0. \tag{4.2.4}$$

De (4.2.3) y (4.2.4) tenemos

$$(Nf)^{(n-1)}(\tau,\widehat{0}) = 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $Nf(\tau,\widehat{0})$ es un polinomio de grado $n-2$ en τ pero además es de decrecimiento rápido, por lo tanto $Nf(\tau,\widehat{0}) = 0$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Nf(\tau,t)\; dt = 0. \tag{4.2.5}$$

Sea φ definida por

$$\varphi(\tau,x) = \int_{-\infty}^{x} Nf(\tau,t)\; dt. \tag{4.2.6}$$

Es claro que $x \mapsto \varphi(\tau,x)$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y mostraremos además que es de decrecimiento rápido. En efecto, dado $N \in \mathbb{N}_0$ si $x > R >> 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|x^N\varphi(\tau,x)| &= |\int_{-\infty}^{x} x^N Nf(\tau,t)\; dt| \\
&= |\int_{-\infty}^{x} x^N Nf(\tau,t)\; dt + \int_{x}^{\infty} x^N Nf(\tau,t)\; dt - \int_{x}^{\infty} x^N Nf(\tau,t)\; dt| \\
&= |0 - \int_{x}^{\infty} x^N Nf(\tau,t)\; dt| \\
&= |\int_{x}^{\infty} x^N Nf(\tau,t)\; dt| \\
&\leq \int_{x}^{\infty} |\frac{x^N}{t^N}||t^{2+N}Nf(\tau,t)|\frac{1}{t^2}\; dt \\
&\leq \tilde{C}_N \int_{R}^{\infty} |\frac{x^N}{t^N}|\frac{1}{t^2}\; dt \\
&\leq \tilde{C}_N \int_{R}^{\infty} \frac{1}{t^2}\; dt \\
&\leq C_N,
\end{aligned}$$

donde hemos usado (4.2.5) y el hecho que la aplicación $t \mapsto Nf(\tau,t)$ es de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si $x < -R$,

$$\begin{aligned}
|x^N\varphi(\tau,x)| &= |-\int_{-x}^{\infty} x^N Nf(\tau,-t)\; dt| \\
&\leq \int_{-x}^{\infty} |\frac{x^N}{t^N}||(-t)^{2+N}Nf(\tau,-t)|\frac{1}{t^2}\; dt \\
&\leq \tilde{C}_N \int_{R}^{\infty} |\frac{x^N}{t^N}|\frac{1}{t^2}\; dt \\
&\leq \tilde{C}_N \int_{R}^{\infty} \frac{1}{t^2}\; dt \\
&\leq C_N.
\end{aligned}$$

Esto y el hecho de que $x \mapsto \varphi(\tau, x)$ es continua en $[-R, R]$ muestra que, existe $C_N > 0$ tal que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^N \varphi(\tau, x)| \leq C_N.$$

Por (4.2.6) tenemos

$$Nf(\tau, \widehat{x}) = (\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau, \widehat{x}) = ix \quad \varphi(\tau, \widehat{x}) = x \quad i\varphi(\tau, \widehat{x}).$$

Además, por ser $N : \mathcal{S}(H_n) \to \mathcal{H}_n^{\#}$ sobreyectiva sabemos que existe $h \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que $Nh = i\varphi$, luego
$$Nf(\tau, \widehat{\lambda}) = \lambda \; Nh(\tau, \widehat{\lambda}), \quad \forall(\tau, \lambda) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle S_{\lambda,k}, f\rangle &= \langle F_{\lambda,k}, Nf(\cdot, \widehat{\lambda})\rangle \\
&= \langle F_{\lambda,k}, \lambda \; Nh(\cdot, \widehat{\lambda})\rangle \\
&= \lambda \; \langle F_{\lambda,k}, Nh(\cdot, \widehat{\lambda})\rangle \\
&= \lambda\langle S_{\lambda,k}, h\rangle,
\end{aligned}$$

lo que implica $\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|) = \lambda \; \mathcal{F}(h)(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|)$ para todo $\lambda \neq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$. □

Proposición 4.2.5. *Sea $N \in \mathbb{N}$. Dada $f \in \mathcal{S}(H_n)$ existen $f_j \in \mathcal{S}(H_n)$ $\forall j = 0, 1, ..., N$ y $\varphi_j \in \mathcal{H}_n$ $\forall j = 0, 1, ..., N - 1$ tales que*

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j \varphi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(f_N)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \quad (4.2.7)$$

donde φ_j es la función del Lema 4.2.3 correspondiente a f_j.

Demostración. Sea ϕ como en la Definición 4.2.2 y $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Vamos a hacer la demostración por inducción.

Sean $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{F}(f)(0, s) = \theta_1(s) + s^{n-1}\theta_2(s) \; H(s)$, y sea

$$\varphi_0(\lambda, s) = \theta_1(s) \; \phi(\lambda) + \prod_{k=-p+1}^{q-1} (s - (2k + p - q)|\lambda|) \; \theta_2(s) \; \phi(\lambda) \; H(s).$$

Entonces, por la condición suficiente del Teorema 1.0.18, existe $f_0 \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que $\mathcal{F}(f_0) = \varphi_0|_\Sigma$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f - f_0)(0, s) &= \mathcal{F}(f)(0, s) - \mathcal{F}(f_0)(0, s) \\
&= \mathcal{F}(f)(0, s) - \varphi_0(0, s) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Por la Proposición 4.2.4, existe $f_1 \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que

$$\mathcal{F}(f - f_0)(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|) = \lambda \; \mathcal{F}(f_1)(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) = & \ \mathcal{F}(f_0)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda\ \mathcal{F}(f_1)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\\ = & \ \varphi_0(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda\ \mathcal{F}(f_1)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),\end{aligned}$$

como queríamos.

Supongamos que para $N \geq 1$ es cierto que existen $f_j \in \mathcal{S}(H_n)$ $\forall j = 0, ..., N$ y $\varphi_j \in \mathcal{H}_n$ $\forall j = 0, ..., N-1$ tales que

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j \varphi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(f_N)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|).$$

Entonces, por la primera parte de la demostracion con f_N en lugar de f, existen $\varphi_N \in \mathcal{H}_n$ y $f_{N+1} \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que

$$\mathcal{F}(f_N)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) = \varphi_N(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda\ \mathcal{F}(f_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|).$$

Luego

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j \varphi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(f_N)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\\ &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^j \varphi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1} \mathcal{F}(f_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),\end{aligned}$$

lo que nos dice que la tesis es cierta para $N+1$. □

Lo que sigue es una adaptación directa del Lema 3.1 probado por Astengo, Di Blasio y Ricci en [1].

Definición 4.2.6. *Sea ω una función en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\omega(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{1}{2}$ y $\omega(t) = 0$ si $|t| \geq \frac{3}{4}$.*

Si h esta definida sobre Σ, sea $E(h)$ la función definida sobre $\mathbb{R}^2$ por

$$E(h)(\lambda, s) = \begin{cases} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\omega(\frac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}), & \lambda \neq 0,\\ 0, & \lambda = 0.\end{cases} \tag{4.2.8}$$

Observación 4.2.7. *Notemos que dado $s \in \mathbb{R}$ existe a lo sumo un $k \in \mathbb{Z}$ para el cual $(s-(2k+p-q)|\lambda|)/|\lambda| < 3/4$. En efecto, dado $s \in \mathbb{R}$, si existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $|s-(2k_0+p-q)|\lambda|| < 3/4|\lambda|$ entonces,*

$$\begin{aligned}|s-(2k+p-q)|\lambda|| &= |2(k_0-k)|\lambda| + s - (2k_0+p-q)|\lambda||\\ &\geq |\ |2(k_0-k)| - |s-(2k_0+p-q)|\ |\ |\lambda|\\ &\geq |2-3/4||\lambda|\\ &\geq |\lambda|\end{aligned}$$

para todo $k \neq k_0$.

Por lo tanto, $E(h)$ está bien definida y

$$E(h)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = h(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \ \forall \lambda \neq 0, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Además, es posible escribir

$$\begin{aligned} E(h)(\lambda, s) &= \sum_{k \geq q} h(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\ \omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right) \\ &+ \sum_{-p<k<q} h(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\ \omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right) \\ &+ \sum_{k \leq -p} h(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\ \omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} h(\lambda, |\lambda|(2k+n))\ \omega\left(\tfrac{s-|\lambda|(2k+n)}{|\lambda|}\right) \\ &+ \sum_{-p<k<q} h(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\ \omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right) \\ &+ \sum_{k \geq 0} h(\lambda, |\lambda|(-2k-n))\ \omega\left(\tfrac{s-|\lambda|(-2k-n)}{|\lambda|}\right), \end{aligned}$$

donde el primer y tercer término coinciden con la extensión dada en [1] para funciones definidas sobre $\Delta_1(U(n), H_n) = \{(\lambda, |\lambda|(2k+n)) : \lambda \neq 0, \ k \in \mathbb{N}_0\}$.

Proposición 4.2.8. *Sea $N \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f \in \mathcal{S}(H_n)$ es tal que*

$$\mathcal{F}(f_j)(0, s) = 0 \ \forall s \in \mathbb{R}, \ \forall j = 0, ..., 2N.$$

Entonces, la función $E(\mathcal{F}(f))$ definida como en 4.2.8, está en $C^N(\mathbb{R}^2)$ y

(i) $E(\mathcal{F}(f))(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \ \forall \lambda \neq 0, \ k \in \mathbb{Z}.$

(ii) $\frac{\partial^i E(\mathcal{F}(f))}{\partial \lambda^i}(0, s) = 0 \ \forall s \in \mathbb{R}, \ 0 \leq i \leq N.$

(iii) *Para cualesquiera $i, j, M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe una constante positiva $C_{M,N}$ tal que*

$$\sup_{(\lambda,s) \in \mathbb{R}^2} \left| (\lambda^2 + s^2)^M \frac{\partial^{i+j} E(\mathcal{F}(f))}{\partial \lambda^i \partial s^j}(\lambda, s) \right| \leq C_{M,N}, \quad \forall i + j \leq N.$$

Demostración. **(i)** Es inmediato de la Observación 4.2.7.

(ii) El Teorema 2.2.9 de Godoy y Saal nos dice que $\lambda \mapsto \langle S_{\lambda,k}, f \rangle$ es de clase C^∞ cuando $\lambda \neq 0$. Además, $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ entonces la función $E(\mathcal{F}(f))$ es diferenciable en Ω.

Ahora mostraremos que $E(\mathcal{F}(f))$ es de clase $C^N(\mathbb{R}^2)$. Notemos que por la Proposición 4.2.5 y la hipótesis,

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \lambda^{2N+1} \mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|),$$

pues $\varphi_j(\lambda, s) = 0$ $\forall(\lambda, s) \in \mathbb{R}^2$, $j = 0, ..., N$. Luego

$$E(\mathcal{F}(f))(\lambda, s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda^{2N+1}\mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\ \omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right).$$

Del Teorema 1.0.14 probado en el Capítulo 3 sabemos que existen $h, g \in \mathcal{S}_{U(n)}(H_n)$ tales que

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\lambda, |\lambda|(2k+n)) &= \mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, |\lambda|(2(k+q)+p-q)), \quad \forall\lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{N}_0\\ \widehat{g}(\lambda, |\lambda|(2k+n)) &= \mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, |\lambda|(-2(k+p)+p-q)), \quad \forall\lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{N}_0,\end{aligned}$$

donde $\hat{h}, \hat{g}$ denotan la transformada esférica de h y g respectivamente asociada al par de Gelfand $(U(n), H_n)$. Luego

$$\begin{aligned}&\sum_{k\geq q} \lambda^{2N+1}\mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right)\\ &= \sum_{k\geq 0} \lambda^{2N+1}\widehat{h}(\lambda, |\lambda|(2k+n))\omega\left(\tfrac{s-|\lambda|(2k+n)}{|\lambda|}\right),\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

y el Lema 3.1 de [1] muestra que E^1 definida por

$$E^1(\lambda, s) = \begin{cases} \sum_{k\geq q} \lambda^{2N+1}\mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right), & \text{si } \lambda \neq 0,\\ 0, & \text{si } \lambda = 0,\end{cases}$$

es de clase $C^N(\mathbb{R}^2)$ y

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\partial^{i+j}}{\partial\lambda^i \partial s^j}\Big(\sum_{k\geq q} \lambda^{2N+1}\mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right)\Big) = 0.$$

También,

$$\begin{aligned}&\sum_{k\leq -p} \lambda^{2N+1}\mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right)\\ &\qquad= \sum_{k\geq 0} \lambda^{2N+1}\widehat{g}(\lambda, |\lambda|(2k+n))\omega\left(\tfrac{s-|\lambda|(2k+n)}{|\lambda|}\right),\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

y la aplicación E^2 definida por

$$E^2(\lambda, s) = \begin{cases} \sum_{k\leq -p} \lambda^{2N+1}\mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right), & \text{si } \lambda \neq 0,\\ 0, & \text{si } \lambda = 0,\end{cases}$$

es de clase $C^N(\mathbb{R}^2)$ y

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\partial^{i+j}}{\partial\lambda^i \partial s^j}\Big(\sum_{k\leq -p} \lambda^{2N+1}\mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\omega\left(\tfrac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right)\Big) = 0.$$

Además, derivando la aplicación E^3 definida por

$$E^3(\lambda, s) = \begin{cases} \sum\limits_{-p<k<q} \lambda^{2N+1}\mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\omega\left(\frac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right), & \text{si } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{si } \lambda = 0, \end{cases}$$

se puede ver que es de clase $C^N(\mathbb{R}^2)$ y

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\partial^{i+j}}{\partial\lambda^i\partial s^j}\left(\sum_{-p<k<q} \lambda^{2N+1}\mathcal{F}(f_{2N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\omega\left(\frac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}\right)\right) = 0$$

(iii) De las igualdades (4.2.9) y (4.2.10) y el Lema 3.1 en [1] y recordando que $\hat{h}$ y $\hat{g}$ se extienden a funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ sabemos que

$$\sup_{(\lambda,s)\in\mathbb{R}^2}\left|(\lambda^2+s^2)^M\frac{\partial^{i+j}E^1}{\partial\lambda^i\partial s^j}(\lambda, s)\right| \leq C^h_{M,N}, \quad \forall i+j\leq N.$$

y

$$\sup_{(\lambda,s)\in\mathbb{R}^2}\left|(\lambda^2+s^2)^M\frac{\partial^{i+j}E^2}{\partial\lambda^i\partial s^j}(\lambda, s)\right| \leq C^g_{M,N}, \quad \forall i+j\leq N.$$

Entonces, es suficiente notar que para la aplicación E^3 existe una constante positiva $C^0_{M,N}$ independiente de (λ, s) tal que

$$\sup_{(\lambda,s)\in\mathbb{R}^2}\left|(\lambda^2+s^2)^M\frac{\partial^{i+j}}{\partial\lambda^i\partial s^j}E^3(\lambda, s)\right| \leq C^0_{N,M}, \quad \forall i+j\leq m,$$

lo cual es cierto debido al Teorema 3.1 en [10] y $\omega \in C^\infty_c(\mathbb{R})$.

□

Una consecuencia de esta proposición es

Corolario 4.2.9. *Supongamos que $f \in \mathcal{S}(H_n)$ es tal que*

$$\mathcal{F}(f_j)(0, s) = 0, \ \forall s\in\mathbb{R}, \ \forall j\in\mathbb{N}_0.$$

Entonces, la aplicación $E(\mathcal{F}(f))$ definida en 4.2.8 es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y

(i) $E(\mathcal{F}(f))(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\ \forall\lambda\neq 0, \ k\in\mathbb{Z},$

(ii) $\frac{\partial^i E(\mathcal{F}(f))}{\partial\lambda^i}(0, s) = 0\ \forall s\in\mathbb{R}, \ \forall i\in\mathbb{N}_0,$

(iii) $E(\mathcal{F}(f)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$

Demostración. **(i)** es inmediato de la Observación 4.2.7. Supongamos que $f \in \mathcal{S}(H_n)$ satisface las hipótesis del corolario. Dado $N\in\mathbb{N}$, f satisface las hipótesis de la Proposición 4.2.8 por lo tanto $E(\mathcal{F}(f))$ es de clase $C^N(\mathbb{R}^2)$ y se satisfacen la segunda y tercera condición de la Proposición 4.2.8. Como N es arbitrario entonces $E(\mathcal{F}(f)) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y se satisfacen **(ii)** y **(iii)** de este corolario. □

A partir de ahora nuestro trabajo consistirá en librarnos de la condición restrictiva $\mathcal{F}(f_j)(0,s) = 0\ \forall s \in \mathbb{R},\ \forall j \in \mathbb{N}_0$. En efecto, recordemos el espacio de Tengstrand

$$\mathcal{H} = \{\theta(s) = \theta_1(s) + s^{n-1}\ \theta_2(s)\ H(s)\ :\ \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\}.$$

Lema 4.2.10. *Sea* $\{\theta_j(s) = \theta_{1,j}(s) + s^{n-1}\theta_{2,j}(s)\ H(s)\}_{j=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones del espacio de Tengstrand* $\mathcal{H}$*. Entonces, existe una sucesión adecuada* $\{\nu_j\}_{j=0}^{\infty}$ *de números mayores o iguales a 1 tales que la aplicación* G *definida por*

$$\begin{aligned} G(\lambda, s) = &\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}\ \theta_{1,j}(s)\ \omega(\nu_j\lambda) \\ &+ H(s)\left(\prod_{k=-p+1}^{q-1}(s-(2k+p-q)|\lambda|)\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\ \theta_{2,j}(s)\ \omega(\nu_j\lambda), \end{aligned}$$

es una función en $\mathcal{H}_n$*.*

Demostración. Por hipótesis $\theta_j(s) = \theta_{1,j}(s) + s^{n-1}\ \theta_{2,j}(s)\ H(s)$ donde $\theta_{1,j}, \theta_{2,j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ \forall j \in \mathbb{N}_0$. Sea ω como en la Definición 4.2.6. Para una sucesión $\{\nu_j\}_{j=0}^{\infty}$ de números positivos a definir sean

$$f_j(\lambda, s) := \frac{\theta_{1,j}(s)}{j!}\lambda^j\omega(\nu_j\lambda), \quad g_j(\lambda, s) := \frac{\theta_{2,j}(s)}{j!}\lambda^j\omega(\nu_j\lambda),$$

y

$$G(\lambda, s) := \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\lambda, s) + H(s)\left(\prod_{k=-p+1}^{q-1}(s-(2k+p-q)|\lambda|)\right)\sum_{j=0}^{\infty} g_j(\lambda, s).$$

Claramente, el lema se satisface si podemos elegir una sucesión $\{\nu_j\}_{j=0}^{\infty}$ de números positivos tales que

$$\begin{aligned} \sup_{(\lambda,s)\in\mathbb{R}^2}\left|s^k\frac{\partial^{i+l}f_j}{\partial s^i\partial\lambda^l}(\lambda, s)\right| &\leq \frac{1}{2^j} \\ \sup_{(\lambda,s)\in\mathbb{R}^2}\left|s^k\frac{\partial^{i+l}g_j}{\partial s^i\partial\lambda^l}(\lambda, s)\right| &\leq \frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

para todo $0 \leq i, l, k \leq j$. Pues, en este caso dado $k', k, N \in \mathbb{N}_0$ tendríamos

$$\left|\lambda^{k'}s^k\frac{\partial^{i+l}f_j}{\partial s^i\partial\lambda^l}(\lambda, s)\right| \leq \frac{1}{2^j}|\lambda|^{k'}$$

para todo $j \geq \max\{N, k\}$ y para todo $i + l = N$. Además, $f_j(s, \lambda) = 0$ para todo $(\lambda, s) \in \mathbb{R}^2$ tal que $|\lambda| \geq 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \sup_{(\lambda,s)\in\mathbb{R}^2}\left|\lambda^{k'}s^k\frac{\partial^{i+l}f_j}{\partial s^i\partial\lambda^l}(\lambda, s)\right| &\leq \sum_{j=0}^{\bar{M}}\sup_{(\lambda,s)\in\mathbb{R}^2}\left|\lambda^{k'}s^k\frac{\partial^{i+l}f_j}{\partial s^i\partial\lambda^l}(\lambda, s)\right| + \sum_{j=\bar{M}+1}^{\infty}\frac{1}{2^j} \\ &\leq C_{k,k',N} \end{aligned}$$

pues cada f_j es de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Teniendo en cuenta que $\theta_{1,j}, \theta_{2,j}, \omega$ son funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ podemos aplicar la regla de Leibniz y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{i+l} f_j}{\partial s^i \partial \lambda^l}(\lambda, s) &= \frac{\partial^i \theta_{1,j}}{\partial s^i}(s) \frac{\partial^l(\lambda^j \omega(\nu_j \lambda))}{\partial \lambda^l} \\ &= \frac{\partial^i \theta_{1,j}}{\partial s^i}(s) \sum_{t=0}^{l} \binom{l}{t} \frac{\partial^t(\lambda^j)}{\partial \lambda^t} \frac{\partial^{l-t}(\omega(\nu_j \lambda))}{\partial \lambda^{l-t}} \\ &= \frac{\partial^i \theta_{1,j}}{\partial s^i}(s) \sum_{t=0}^{l} \binom{l}{t} \frac{j!}{(j-t)!} \lambda^{j-t} \nu_j^{l-t} \omega^{l-t}(\nu_j \lambda) \\ &= \frac{\partial^i \theta_{1,j}}{\partial s^i}(s)\ \frac{1}{\nu_j^{j-l}} \sum_{t=0}^{l} \binom{l}{t} \frac{j!}{(j-t)!} (\lambda \nu_j)^{j-t} \omega^{l-t}(\nu_j \lambda).\end{aligned}$$

Entonces, es posible hallar constantes positivas c_j, d_j tales que

$$\left| s^k \frac{\partial^{i+l} f_j}{\partial s^i \partial \lambda^l} \right| \le \frac{c_j}{\nu_j j!} \left| s^k \frac{\partial^i \theta_{1,j}}{\partial s^i} \right| \le \frac{c_j}{\nu_j} \sum_{k,i=0}^{j} \left\| s^k \frac{\partial^i \theta_{1,j}}{\partial s^i} \right\|_\infty$$

$$\left| s^k \frac{\partial^{i+l} g_j}{\partial s^i \partial \lambda^l} \right| \le \frac{d_j}{\nu_j j!} \left| s^k \frac{\partial^i \theta_{2,j}}{\partial s^i} \right| \le \frac{d_j}{\nu_j} \sum_{k,i=0}^{j} \left\| s^k \frac{\partial^i \theta_{2,j}}{\partial s^i} \right\|_\infty .$$

Luego, elegimos los $\nu_j \ge 1$ y tales que

$$\nu_j \ge \text{máx} \left\{ 2^j c_j \sum_{k,i=0}^{j} \left\| s^k \frac{\partial^i \theta_{1,j}}{\partial s^i} \right\|_\infty, 2^j d_j \sum_{k,i=0}^{j} \left\| s^k \frac{\partial^i \theta_{2,j}}{\partial s^i} \right\|_\infty \right\}.$$

Así, las series

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(\lambda, s),\ \sum_{j=0}^{\infty} g_j(\lambda, s)$$

están en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y G satisface la tesis. □

Corolario 4.2.11. *Sea $\{b_j(s)\}_{j=0}^\infty$ una sucesión de funciones de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces, existe una sucesión $\{\nu_j\}_{j=0}^\infty$ de números mayores o iguales a 1, tales que la aplicación H definida por*

$$H(\lambda, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\ b_j(s)\ \frac{\omega(\nu_j \lambda)}{j!}$$

es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Para $g \in \mathcal{S}(H_n)$, sea $\{g_j\}_{j=0}^\infty$ la sucesión de funciones de $\mathcal{S}(H_n)$ asociadas a g dadas por la Proposición 4.2.5.

Proposición 4.2.12. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Entonces, existe $G \in \mathcal{H}_n$ y $g \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que*

(i) $G|_\Sigma = \mathcal{F}(g)$ *y,*

(ii) $\mathcal{F}(f_j)(0,s) - \mathcal{F}(g_j)(0,s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}_0.$

Demostración. La sucesión de funciones

$$\{j!\ \mathcal{F}(f_j)(0,s)\}_{j=0}^{\infty} = \{\theta_{1,j}(s) + s^{n-1}\theta_{2,j}(s)\ H(s)\}_{j=0}^{\infty}$$

satisface la hipótesis del Lema 4.2.10, por lo tanto existe una sucesión $\{\nu_j\}$ de números positivos mayores que 1 tales que

$$G(\lambda,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \theta_{1,j}(s)\omega(\nu_j\lambda) + H(s) \prod_{\bar{k}=-p+1}^{q-1} (s - (2\bar{k}+p-q)|\lambda|) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \theta_{2,j}(s)\omega(\nu_j\lambda) \tag{4.2.11}$$

está en $\mathcal{H}_n$. Luego, por la condición suficiente del Teorema 1.0.18 existe $g \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que

$$\mathcal{F}(g) = G|_{\Sigma}. \tag{4.2.12}$$

Además, dado $N \in \mathbb{N}$, por la Proposición 4.2.5 existen $g_j \in \mathcal{S}(H_n)$ y

$$\psi_j(\lambda,s) = \theta_{1,j}(s)\phi(\lambda) + H(s) \left(\prod_{k=-p+1}^{q-1} (s - (2k+p-q)|\lambda|) \right) \theta_{2,j}(s)\phi(\lambda)$$

tales que

$$\mathcal{F}(g)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N} \lambda^j \psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1}\mathcal{F}(g_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|), \tag{4.2.13}$$

para $\lambda \neq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$. Entonces de (4.2.11), (4.2.12) y (4.2.13) tenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\ \theta_{1,j}((2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda) \\ &+ H(s) \left(\prod_{\bar{k}=-p+1}^{q-1} 2(-\bar{k}+k)|\lambda| \right) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\ \theta_{2,j}((2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^j\ \psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1}\mathcal{F}(g_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|), \quad \forall \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) \to (0,s)$ en ambos lados de esta última igualdad obtenemos

$$\mathcal{F}(f_0)(0,s) = \psi_0(0,s) = \mathcal{F}(g_0)(0,s),$$

luego $\mathcal{F}(f_0)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_0\lambda) = \mathcal{F}(g_0)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \phi(\lambda) = \psi_0(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)$

para todo $|\lambda| < \frac{1}{\nu_0}$ y

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \ \theta_{1,j}((2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda) \\
&+ H(s)\left(\prod_{\bar{k}=-p+1}^{q-1} 2(-\bar{k}+k)|\lambda|\right)\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \ \theta_{2,j}((2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \lambda^{j-1}\ \psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(g_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|), \quad \forall|\lambda| < \frac{1}{\nu_0},\ k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

de nuevo tomando límite cuando $(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) \to (0,s)$ en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\mathcal{F}(f_1)(0,s) = \psi_1(0,s) = \mathcal{F}(g_1)(0,s)$$

luego $\mathcal{F}(f_1)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_1\lambda) = \mathcal{F}(g_1)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \phi(\lambda) = \psi_1(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)$ para todo $|\lambda| < \frac{1}{\nu_1}$ y

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{\infty} \lambda^j \ \theta_{1,j}((2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda) \\
&+ H(s)\left(\prod_{\bar{k}=-p+1}^{q-1} 2(-\bar{k}+k)|\lambda|\right)\sum_{j=2}^{\infty} \lambda^j \ \theta_{2,j}((2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda) \\
&= \sum_{j=2}^{N} \lambda^{j-2}\ \psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N-1} \mathcal{F}(g_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|), \quad \forall|\lambda| < \frac{1}{\nu_1},\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Así, siguiendo hasta $j = N$ obtenemos $\mathcal{F}(f_j)(0,s) = \mathcal{F}(g_j)(0,s)\ \forall j = 0,...,N$, como N es arbitrario se cumple

$$\mathcal{F}(f_j)(0,s) = \mathcal{F}(g_j)(0,s)\ \forall j \in \mathbb{N}_0$$

. □

Demostración del Teorema 1.0.18: condición necesaria. Dada $f \in \mathcal{S}(H_n)$ sean $G \in \mathcal{H}_n$ y $g \in \mathcal{S}(H_n)$ como en la Proposición 4.2.12. Entonces $h = f - g \in \mathcal{S}(H_n)$ y satisface las hipótesis del Corolario 4.2.9. Por lo tanto $E(\mathcal{F}(h)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Sea

$$\varphi = E(\mathcal{F}(h)) + G.$$

Entonces $\varphi \in \mathcal{H}_n$ y $\varphi|_\Sigma = \mathcal{F}(f)$. □

4.3. Condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{F}(f)$ admita extensión de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Tal como dice el título de esta sección, queremos hallar la condición necesaria y suficiente que debe satisfacer una función $f \in \mathcal{S}(H_n)$ para que su transformada $\mathcal{F}(f)$ definida sobre Σ pueda extenderse a una función de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Sabemos además que para f arbitraria en $\mathcal{S}(H_n)$ la aplicación

$$s \mapsto \mathcal{F}(f)(0, s)$$

es de clase clase $C^{n-2}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, nos preguntarnos si la condición $s \mapsto \mathcal{F}(f)(0, s)$ de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, es suficiente para que $\mathcal{F}(f)$ tenga una extensión en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Con este objeto, adaptaremos las proposiciones de la sección anterior para hallar tal extensión.

Proposición 4.3.1. *Sea $N \in \mathbb{N}$ y sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que la aplicación $s \mapsto \mathcal{F}(f)(0, s)$ es de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces, existen $f_j \in \mathcal{S}(H_n)$ y $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tales que $\varphi_j(\lambda, s) = \mathcal{F}(f_j)(0, s)\ \phi(\lambda)$ para todo $j = 0, 1, ..., N-1$ y*

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j\ \varphi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(f_N)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|). \quad (4.3.1)$$

Demostración. Sea ϕ como en la Definición 4.2.2 y $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Vamos a hacer la demostración por inducción.

Sea

$$\varphi_0(\lambda, s) = \mathcal{F}(f)(0, s)\ \phi(\lambda), \quad \forall (\lambda, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces, por el Teorema 1.0.16 existe $f_0 \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que $\mathcal{F}(f_0) = \varphi_0|_\Sigma$, en consecuencia

$$\mathcal{F}(f - f_0)(0, s) = \mathcal{F}(f)(0, s) - \mathcal{F}(f_0)(0, s) = \mathcal{F}(f)(0, s) - \varphi_0(0, s) = 0,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Por la Proposición 4.2.4 existe $f_1 \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que

$$\mathcal{F}(f - f_0)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \lambda\ \mathcal{F}(f_1)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) &= \mathcal{F}(f_0)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda\ \mathcal{F}(f_1)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \\ &= \varphi_0(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda\ \mathcal{F}(f_1)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|), \end{aligned}$$

como queríamos.

Supongamos ahora que para $N \geq 1$ es cierto que existen $f_j \in \mathcal{S}(H_n)$ $\forall j = 0, ..., N$ y $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ $\forall j = 0, ..., N-1$ tales que

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j\ \varphi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(f_N)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|).$$

Entonces, por la primera parte de la demostracion con f_N en lugar de f, existen $\varphi_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $f_{N+1} \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que

$$\mathcal{F}(f_N)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \varphi_N(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda\ \mathcal{F}(f_{N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|).$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j\ \varphi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(f_N)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \\ &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^j\ \varphi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1} \mathcal{F}(f_{N+1})(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|), \end{aligned}$$

lo que nos dice que la tesis es cierta para $N+1$. $\square$

Para $g \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que la aplicación $s \mapsto \mathcal{F}(g)(0,s)$ es de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sean $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$ la sucesión de funciones de $\mathcal{S}(H_n)$ asociadas a g dadas por la Proposición 4.3.1.

Proposición 4.3.2. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que $s \mapsto \mathcal{F}(f)(0,s)$ es de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces, existen $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $h \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que*

(i) $H|_{\Sigma} = \mathcal{F}(h)$ *y,*

(ii) $\mathcal{F}(h_j)(0,s) = \mathcal{F}(f_j)(0,s) \quad \forall s \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}_0.$

Demostración. La sucesión de funciones $\{j!\ \mathcal{F}(f_j)(0,s)\}_{j=0}^{\infty}\}$ satisface la hipótesis del Corolario 4.2.11. Por lo tanto, la aplicación

$$H(\lambda,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\ \mathcal{F}(f_j)(0,s)\ \omega(\nu_j\lambda). \tag{4.3.2}$$

es de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Luego, por el Teorema 1.0.16 existe $h \in \mathcal{S}(H_n)$ tal que

$$\mathcal{F}(h) = H|_{\Sigma}. \tag{4.3.3}$$

Además, para $N \in \mathbb{N}$, por la Proposición 4.3.1 existen $h_j \in \mathcal{S}(H_n)$ y

$$\psi_j(\lambda,s) = \mathcal{F}(f_j)(0,s)\ \phi(\lambda)$$

tales que

$$\mathcal{F}(h)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N} \lambda^j\ \psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1}\mathcal{F}(h_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|), \tag{4.3.4}$$

para $\lambda \neq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, de (4.3.2), (4.3.3) y (4.3.4) tenemos

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\ \mathcal{F}(f_j)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda)\\ &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^j\ \psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1}\mathcal{F}(h_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|), \quad \forall \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) \to (0,s)$ en ambos lados de esta última igualdad obtenemos

$$\mathcal{F}(f_0)(0,s) = \psi_0(0,s) = \mathcal{F}(h_0)(0,s).$$

Luego $\mathcal{F}(f_0)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_0\lambda) = \mathcal{F}(h_0)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \phi(\lambda) = \psi_0(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)$ para todo $|\lambda| < \frac{1}{\nu_0}$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \mathcal{F}(f_j)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\omega(\nu_j\lambda)\\ &= \sum_{j=1}^{N} \lambda^{j-1}\ \psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(h_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|), \quad \forall |\lambda| < \frac{1}{\nu_0},\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

De nuevo tomando límite cuando $(\lambda,(2k{+}p{-}q)|\lambda|)\to(0,s)$ en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\mathcal{F}(f_1)(0,s)=\psi_1(0,s)=\mathcal{F}(h_1)(0,s)$$

entonces $\mathcal{F}(f_1)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\;\omega(\nu_1\lambda)=\mathcal{F}(h_1)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\;\phi(\lambda)=\psi_1(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)$ para todo $|\lambda|<\frac{1}{\nu_1}$ y

$$\sum_{j=2}^{\infty}\lambda^j\mathcal{F}(f_j)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\omega(\nu_j\lambda)$$

$$=\sum_{j=2}^{N}\lambda^{j-2}\;\psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)+\lambda^{N-1}\mathcal{F}(h_{N+1})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),\quad\forall|\lambda|<\frac{1}{\nu_1},\;k\in\mathbb{Z}.$$

Así, siguiendo hasta $j=N$ obtenemos $\mathcal{F}(f_j)(0,s)=\mathcal{F}(h_j)(0,s)\;\forall j=0,...,N$, como N es arbitrario se cumple

$$\mathcal{F}(f_j)(0,s)=\mathcal{F}(h_j)(0,s)\;\forall j\in\mathbb{N}_0.$$

□

Demostración del Teorema 1.0.19: condición suficiente. Dada $f\in\mathcal{S}(H_n)$ que satisface la hipótesis. Sean $H\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $h\in\mathcal{S}(H_n)$ como en la Proposición 4.3.2. Entonces, $g=f-h\in\mathcal{S}(H_n)$ satisface las hipótesis del Corolario 4.2.9. Por lo tanto, $E(\mathcal{F}(g))\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Sea

$$\varphi=E(\mathcal{F}(g))+H.$$

Entonces $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $\varphi|_\Sigma=\mathcal{F}(f)$. □

4.4. Segunda caracterización de la imagen de la transformada esférica asociada al par $(U(p,q),H_n)$.

Hemos probado que una condición suficiente para que F definida sobre Σ esté en la imagen de la transformada esférica es que

$$F|_{\Sigma^+}\;\text{ y }\;F|_{\Sigma^-}$$

admitan extensión Schwartz sobre $\mathbb{R}^2$.

A lo largo de está sección mostraremos la recíproca, esto es, si $f\in\mathcal{S}(H_n)$ entonces $\mathcal{F}(f)|_{\Sigma^+}$ y $\mathcal{F}(f)|_{\Sigma^-}$ se extienden a funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Para esto, modificaremos adecuadamente las Proposiciones 4.2.4, 4.2.5 y 4.2.12. En efecto,

Proposición 4.4.1. *Sea $f\in\mathcal{S}(H_n)$ entonces,*

(i) *Si $\mathcal{F}(f)(0,s)=0\;\forall s\geq 0$ existe $h\in\mathcal{S}(H_n)$ tal que*

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)=\lambda\;\mathcal{F}(h)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\;\forall\lambda\neq 0,\;\forall k\geq -p+1$$

(ii) *Si $\mathcal{F}(f)(0,s)=0\;\forall s\leq 0$ existe $g\in\mathcal{S}(H_n)$ tal que*

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)=\lambda\;\mathcal{F}(g)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\;\forall\lambda\neq 0,\;\forall k\leq q-1.$$

Demostración. Tal como lo hicimos en la prueba de la Proposición 4.2.4 definimos $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_{U(1)}(H_1)$ por

$$f_1(z,t) = (Nf)^{n-1}(|z|^2,t) \;\text{ y }\; f_2(z,t) = (Nf)^{n-1}(-|z|^2,t),\; \forall (z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$$

y se prueba que

(i) $\widehat{f_1}(0,\sigma) = 0$ para todo $\sigma \geq 0$ si $\mathcal{F}(f)(0,s) = 0$ para todo $s \geq 0$ y,

(ii) $\widehat{f_2}(0,\sigma) = 0$ para todo $\sigma \geq 0$ si $\mathcal{F}(f)(0,s) = 0$ para todo $s \leq 0$.

Entonces, siguiendo la demostración de 4.2.4, existen $h, g \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que

$$Nf(\tau,\widehat{x}) = xNh(\tau,\widehat{x}) \;\forall \tau \geq 0$$

si $\mathcal{F}(f)(0,s) = 0$ para todo $s \geq 0$, y

$$Nf(\tau,\widehat{x}) = xNg(\tau,\widehat{x}) \;\forall \tau \leq 0$$

si $\mathcal{F}(f)(0,s) = 0$ para todo $s \leq 0$.

Finalmente, como

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) \;=\; \begin{cases} |\lambda|^{n-1}\langle S_{\lambda,k}, Nf\rangle, & k \geq 0, \\ (-1)^{n-2}|\lambda|^{n-1}\langle S_{\lambda,k}, Nf\rangle, & k < 0, \end{cases}$$

y para $k \geq q$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle S_{\lambda,k}, Nf\rangle &= \langle F_{\lambda,k}, Nf(\cdot,\widehat{\lambda})\rangle \\ &= (-1)^{n-1}\int_{\tau>0} L_{k-q}^{n-1}(|\lambda|\tau/2)e^{-|\lambda|\tau/4}Nf(\tau,\widehat{\lambda})d\tau \\ &\quad + \sum_{r=0}^{n-2} c_{r,k}|\lambda|^{-1-r}\langle \delta^{(r)}, Nf(\cdot,\widehat{\lambda})\rangle \\ &= (-1)^{n-1}\int_{\tau>0} L_{k-q}^{n-1}(|\lambda|\tau/2)e^{-|\lambda|\tau/4}\lambda Nh(\tau,\widehat{\lambda})d\tau \\ &\quad + \sum_{r=0}^{n-2} c_{r,k}|\lambda|^{-1-r}\lambda\langle \delta^{(r)}, Nh(\cdot,\widehat{\lambda})\rangle \\ &= \lambda\,\langle S_{\lambda,k}, Nh\rangle, \end{aligned}$$

para $q-1 \geq k \geq -p+1$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle S_{\lambda,k}, Nf\rangle &= \langle F_{\lambda,k}, Nf(\cdot,\widehat{\lambda})\rangle \\ &= \sum_{r=0}^{n-2} c_{r,k}|\lambda|^{-1-r}\langle \delta^{(r)}, Nf(\cdot,\widehat{\lambda})\rangle \\ &= \sum_{r=0}^{n-2} c_{r,k}|\lambda|^{-1-r}\lambda\langle \delta^{(r)}, Nh(\cdot,\widehat{\lambda})\rangle \\ &= \lambda\,\langle S_{\lambda,k}, Nh\rangle, \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se debe a que la aplicación $\tau \mapsto Nf(\tau, \lambda)$ tiene $n-2$ derivadas continuas en el origen. Entonces

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \;=\; \lambda\, \mathcal{F}(h)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|),\ \forall k \geq -p+1.$$

Además, para $k \leq -p$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle S_{\lambda,k}, Nf\rangle &= \langle F_{\lambda,k}, Nf(\cdot, \widehat{\lambda})\rangle \\
&= (-1)^{n-1}\int_{\tau>0} L^{n-1}_{-k-p}(|\lambda|\tau/2)e^{-|\lambda|\tau/4}Nf(-\tau, \widehat{\lambda})d\tau \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-2} c_{r,k}|\lambda|^{-1-r}\langle \delta^{(r)}, Nf(\cdot, \widehat{\lambda})\rangle \\
&= (-1)^{n-1}\int_{\tau>0} L^{n-1}_{-k-p}(|\lambda|\tau/2)e^{-|\lambda|\tau/4}\lambda Ng(-\tau, \widehat{\lambda})d\tau \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-2} c_{r,k}|\lambda|^{-1-r}\lambda\langle \delta^{(r)}, Ng(\cdot, \widehat{\lambda})\rangle \\
&= \lambda\, \langle S_{\lambda,k}, Ng\rangle,
\end{aligned}$$

y para $-p+1 \leq k \leq q-1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle S_{\lambda,k}, Nf\rangle &= \langle F_{\lambda,k}, Nf(\cdot, \widehat{\lambda})\rangle \\
&= \sum_{r=0}^{n-2} c_{r,k}|\lambda|^{-1-r}\langle \delta^{(r)}, Nf(\cdot, \widehat{\lambda})\rangle \\
&= \sum_{r=0}^{n-2} c_{r,k}|\lambda|^{-1-r}\lambda\langle \delta^{(r)}, Ng(\cdot, \widehat{\lambda})\rangle \\
&= \lambda\, \langle S_{\lambda,k}, Ng\rangle,
\end{aligned}$$

donde nuevamente usamos el hecho de que $Nf(\cdot, \lambda)$ es de clase C^{n-2} en el origen. Entonces

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \;=\; \lambda\, \mathcal{F}(g)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|),\ \forall k \leq q-1.$$

□

Para $f \in \mathcal{S}(H_n)$ sabemos que existen $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{F}(f)(0,s) = \phi_1(s) + s^{n-1}\phi_2(s)H(s)$, luego es necesario hacer la siguiente

Observación 4.4.2. *Sea ϕ como en la Definición 4.2.2. Para $f \in \mathcal{S}(H_n)$, sea $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $a(s) = \mathcal{F}(f)(0,s)$ para todo $s \geq 0$ y si $\mathcal{F}(f)(0,s) = 0$ $\forall s \geq 0$ entonces $a \equiv 0$. Y sea $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $b(s) = \mathcal{F}(f)(0,s)$ para todo $s \leq 0$ y si $\mathcal{F}(f)(0,s) = 0$ $\forall s \leq 0$ entonces $b \equiv 0$. Se tiene que las aplicaciones definidas por*

$$\varphi(\lambda, s) = a(s)\phi(\lambda)$$
$$\psi(\lambda, s) = b(s)\phi(\lambda)$$

están en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(0,s) = \mathcal{F}(f)(0,s)$ $\forall s \geq 0$ y $\psi(0,s) = \mathcal{F}(f)(0,s)$ $\forall s \leq 0$.

Proposición 4.4.3. *Sea* $N \in \mathbb{N}$. *Dada* $f \in \mathcal{S}(H_n)$ *existen* $f_j^+, f_j^- \in \mathcal{S}(H_n)$ $\forall j = 0, 1, \ldots, N$ *y* $\varphi_j, \psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ $\forall j = 0, \ldots, N-1$ *tales que*

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j \varphi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(f_N^+)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \qquad \forall k \geq -p+1$$

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j \psi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(f_N^-)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \qquad \forall k \leq q-1$$

donde $\varphi_j(0, s) = \mathcal{F}(f_j^+)(0, s)$ $\forall s \geq 0$ *y* $\psi_j(0, s) = \mathcal{F}(f_j^-)(0, s)$ $\forall s \leq 0$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Vamos a hacer la demostración por inducción.

Por la Observación 4.4.2 existen $\varphi_0, \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tales que $\mathcal{F}(f)(0, s) = \varphi_0(0, s)$ $\forall s \geq 0$ y $\mathcal{F}(f)(0, s) = \psi_0(0, s)$ $\forall s \leq 0$. Por el Teorema 1.0.16 existen $f_0^+, f_0^- \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que $\mathcal{F}(f_0^+) = \varphi_0|_\Sigma$ y $\mathcal{F}(f_0^-) = \psi_0|_\Sigma$. Luego,

$$\mathcal{F}(f - f_0^+)(0, s) = \mathcal{F}(f)(0, s) - \mathcal{F}(f_0^+)(0, s) = \mathcal{F}(f)(0, s) - \varphi_0(0, s) = 0$$

para todo $s \geq 0$ y

$$\mathcal{F}(f - f_0^-)(0, s) = \mathcal{F}(f)(0, s) - \mathcal{F}(f_0^-)(0, s) = \mathcal{F}(f)(0, s) - \psi_0(0, s) = 0$$

para todo $s \leq 0$. Entonces, por la Proposición 4.4.1 existen $f_1^+, f_1^- \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que

$$\mathcal{F}(f - f_0^+)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \lambda\, \mathcal{F}(f_1^+)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|), \ \forall k \geq -p+1,$$

$$\mathcal{F}(f - f_0^-)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \lambda\, \mathcal{F}(f_1^-)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|), \ \forall k \leq q-1.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) &= \mathcal{F}(f_0^+)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda \mathcal{F}(f_1^+)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\\ &= \varphi_0(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda \mathcal{F}(f_1^+)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\end{aligned}$$

para todo $k \geq -p+1$ y

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) &= \mathcal{F}(f_0^-)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda \mathcal{F}(f_1^-)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\\ &= \psi_0(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda \mathcal{F}(f_1^-)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|)\end{aligned}$$

para todo $k \leq q-1$, como queríamos.

Supongamos ahora, para $N \geq 1$, que es cierto que existen $f_j^+, f_j^- \in \mathcal{S}(H_n)$ $\forall j = 0, \ldots, N$ y $\varphi_j, \psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ $j = 0, \ldots, N-1$ tales que

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j \varphi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^N \mathcal{F}(f_N^+)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|),$$

para todo $k \geq -p+1$ y

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)=\sum_{j=0}^{N-1}\lambda^j\psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)+\lambda^N\mathcal{F}(f_N^-)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),$$

para todo $k \leq q-1$.

Entonces, como hicimos en la primera parte de la demostración, para f_N^+ existen $\varphi_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $f_{N+1}^+ \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que

$$\mathcal{F}(f_N^+)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)=\varphi_N(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)+\lambda\,\mathcal{F}(f_{N+1}^+)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),$$

para todo $k \geq -p+1$. Y para f_N^- existen $\psi_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $f_{N+1}^- \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que

$$\mathcal{F}(f_N^-)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)=\psi_N(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)+\lambda\,\mathcal{F}(f_{N+1}^-)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),$$

para todo $k \leq q-1$.

Luego

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,|\lambda|(2k+p-q))=\sum_{j=0}^{N}\lambda^j\varphi_j(\lambda,|\lambda|(2k+p-q))+\lambda^{N+1}\mathcal{F}(f_{N+1}^+)(\lambda,|\lambda|(2k+p-q))$$

para todo $k \geq -p+1$ y

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,|\lambda|(2k+p-q))=\sum_{j=0}^{N}\lambda^j\psi_j(\lambda,|\lambda|(2k+p-q))+\lambda^{N+1}\mathcal{F}(f_{N+1}^-)(\lambda,|\lambda|(2k+p-q))$$

para todo $k \leq q-1$. Lo que nos dice que la tesis es cierta para $N+1$. □

Si h esta definida sobre Σ, sea $E^+(h), E^-(h)$ las funciones definidas sobre $\mathbb{R}^2$ por

$$E^+(h)(\lambda,s)=\begin{cases}\sum_{k=-p+1}^{\infty}h(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\omega(\frac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}), & \lambda\neq 0,\\ 0, & \lambda=0.\end{cases} \tag{4.4.1}$$

$$E^-(h)(\lambda,s)=\begin{cases}\sum_{k=-\infty}^{q-1}h(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\omega(\frac{s-(2k+p-q)|\lambda|}{|\lambda|}), & \lambda\neq 0,\\ 0, & \lambda=0.\end{cases} \tag{4.4.2}$$

donde ω es como en la Definición 4.2.6. Además, no es difícil mostrar que

$$E^+(h)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)=h(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),\ \forall\lambda\neq 0,\ k\geq -p+1,$$

$$E^-(h)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)=h(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),\ \forall\lambda\neq 0,\ k\leq q-1.$$

En lo que sigue, dada $g \in \mathcal{S}(H_n)$ llamaremos $\{g_j^+\}_{j=0}^{\infty}, \{g_j^-\}_{j=0}^{\infty}$ a las sucesiones de funciones de $\mathcal{S}(H_n)$ asociadas a g dadas por la Proposición 4.4.3.

Proposición 4.4.4. *Sea $N \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{S}(H_n)$.*

Si para todo $j = 0, \ldots, 2N$ se cumple que $\mathcal{F}(f_j^+)(0, s) = 0$ $\forall s \geq 0$ entonces, la función $E^+(\mathcal{F}(f))$ es de clase $C^N(\mathbb{R}^2)$ y,

(a) $E^+(\mathcal{F}(f))(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|) = \mathcal{F}(f)(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|)$ $\forall \lambda \neq 0$ *y* $\forall k \geq -p + 1$*;*

(b) $\frac{\partial^i E^+(\mathcal{F}(f))}{\partial \lambda^i}(0, s) = 0$ $\forall s \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq N$*;*

(c) *para cualesquiera $i, j, M \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_{M,N}$ tal que*

$$\sup_{(\lambda,s)\in\mathbb{R}^2} \left| (\lambda^2 + s^2)^M \frac{\partial^{i+j} E^+(\mathcal{F}(f))}{\partial \lambda^i \partial s^j}(\lambda, s) \right| \leq C_{M,N} \ \forall i + j \leq N.$$

Si para todo $j = 0, \ldots, 2N$ se cumple que $\mathcal{F}(f_j^-)(0, s) = 0$ $\forall s \leq 0$ entonces, la función $E^-(\mathcal{F}(f))$ es de clase $C^N(\mathbb{R}^2)$ y,

(a) $E^-(\mathcal{F}(f))(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|) = \mathcal{F}(f)(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|)$ $\forall \lambda \neq 0$ *y* $\forall k \leq q - 1$*;*

(b) $\frac{\partial^i E^-(\mathcal{F}(f))}{\partial \lambda^i}(0, s) = 0$ $\forall s \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq N$*;*

(c) *para cualesquiera $i, j, M \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_{M,N}$ tal que*

$$\sup_{(\lambda,s)\in\mathbb{R}^2} \left| (\lambda^2 + s^2)^M \frac{\partial^{i+j} E^-(\mathcal{F}(f))}{\partial \lambda^i \partial s^j}(\lambda, s) \right| \leq C_{M,N} \ \forall i + j \leq N.$$

Demostración. Sigue idéntica a la demostración de la Proposición 4.2.8. □

Así también se sigue el siguiente

Corolario 4.4.5. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Si para todo $j \in \mathbb{N}_0$ se cumple $F(f_j^+)(0, s) = 0$ $\forall s \geq 0$ entonces la aplicación $E^+(\mathcal{F}(f))$ satisface*

(i) $E^+(\mathcal{F}(f))(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|) = \mathcal{F}(f)(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|)$ $\forall \lambda \neq 0, \forall k \geq -p + 1$,

(ii) $\frac{\partial^i E^+(\mathcal{F}(f))}{\partial \lambda^i}(0, s) = 0$ $\forall s \in \mathbb{R},\ \forall i \in \mathbb{N}_0$,

(iii) $E^+(\mathcal{F}(f)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

Si para todo $j \in \mathbb{N}_0$ se satisface $F(f_j^-)(0, s) = 0$ $\forall s \leq 0$ entonces la aplicación $E^-(\mathcal{F}(f))$ satisface

(i) $E^-(\mathcal{F}(f))(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|) = \mathcal{F}(f)(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|)$ $\forall \lambda \neq 0, \forall k \geq -p + 1$,

(ii) $\frac{\partial^i E^-(\mathcal{F}(f))}{\partial \lambda^i}(0, s) = 0$ $\forall s \in \mathbb{R},\ \forall i \in \mathbb{N}_0$,

(iii) $E^-(\mathcal{F}(f)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

Proposición 4.4.6. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$. Entonces, existen $H, G \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $h, g \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que*

$$H(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \mathcal{F}(h)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \ \forall k \geq -p+1,$$
$$G(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \mathcal{F}(g)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \ \forall k \leq q-1$$

y

$$\mathcal{F}(h_j^+)(0,s) = \mathcal{F}(f_j^+)(0,s) \ \forall s \geq 0 \ \forall j \in \mathbb{N}_0,$$
$$\mathcal{F}(g_j^-)(0,s) = \mathcal{F}(f_j^-)(0,s) \ \forall s \leq 0 \ \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Sean a_j, b_j las funciones asociadas a f_j según la Observación 4.4.2. Las sucesiones $\{j!\ a_j(s)\}_{j=0}^{\infty}, \{j!\ b_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ satisfacen la hipótesis del Corolario 4.2.11 por lo tanto, existe una sucesión de números positivos $\{\nu_j\}_{j=0}^{\infty}$ tales que las funciones H y G definidas por

$$H(\lambda, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j a_j(s)\ \omega(\nu_j \lambda), \ G(\lambda, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j b_j(s)\ \omega(\nu_j \lambda), \tag{4.4.3}$$

son de clase $\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Ahora, por el Teorema 1.0.16 existen $h, g \in \mathcal{S}(H_n)$ tales que

$$\mathcal{F}(h) = H|_{\Sigma} \ \text{ y } \ \mathcal{F}(g) = G|_{\Sigma}. \tag{4.4.4}$$

Además, dado $N \in \mathbb{N}$ por la Proposición 4.4.3, existen $h_j^+, g_j^- \in \mathcal{S}(H_n)$ para $j = 0, \ldots, N+1$ y $\varphi_j, \psi_j \in S(\mathbb{R}^2)$ para $j = 0, \ldots, N$ tales que

$$\varphi_j(0,s) = \mathcal{F}(h_j^+)(0,s) \ \forall s \geq 0, \quad \psi_j(0,s) = \mathcal{F}(g_j^-)(0,s) \ \forall s \leq 0$$

y

$$\mathcal{F}(h)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N} \lambda^j \varphi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1} \mathcal{F}(h_{N+1}^+)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \tag{4.4.5}$$

para todo $\lambda \neq 0$, $k \geq -p+1$,

$$\mathcal{F}(g)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{N} \lambda^j \psi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1} \mathcal{F}(g_{N+1}^-)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \tag{4.4.6}$$

para todo $\lambda \neq 0$, $k \leq q-1$.

Entonces, de (4.4.3), (4.4.4), (4.4.5) y (4.4.6) obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0} \lambda^j a_j((2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j \lambda) \\ &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^j \varphi_j(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1} \mathcal{F}(h_{N+1}^+)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

para todo $\lambda \neq 0,\ k \geq -p+1$ y

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0} \lambda^j b_j((2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda)\\ &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^j \psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N+1}\mathcal{F}(g_{N+1}^{-})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

para todo $\lambda \neq 0,\ k \leq q-1$.

Tomando límite cuando $(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) \to (0,s)$ con $s \geq 0$ en ambos lados de la igualdad (4.4.7) y límite cuando $(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) \to (0,s)$ con $s \leq 0$ en (4.4.8) tenemos que

$$\mathcal{F}(f_0^+)(0,s) = a_0(s) = \varphi_0(0,s) = \mathcal{F}(h_0^+)(0,s),$$

y

$$\mathcal{F}(f_0^-)(0,s) = b_0(s) = \psi_0(0,s) = \mathcal{F}(g_0^-)(0,s).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_0^+)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_0\lambda) = \mathcal{F}(h_0^+)((2k+p-q)|\lambda|)\phi(\lambda) = \varphi_0(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\\ \forall|\lambda| < \frac{1}{\nu_0},\ \forall 2k+p-q \geq 0,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_0^-)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_0\lambda) = \mathcal{F}(g_0^-)((2k+p-q)|\lambda|)\phi(\lambda) = \psi_0(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\\ \forall|\lambda| < \frac{1}{\nu_0},\ \forall 2k+p-q \leq 0.\end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}(f_j^+)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda)\lambda^{j-1}\\ &= \sum_{j=1}^{N} \lambda^{j-1}\varphi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N}\mathcal{F}(h_{N+1}^{+})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

para todo $|\lambda| < \frac{1}{\nu_0}$ y $2k+p-q \geq 0$ y

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}(f_j^-)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda)\lambda^{j-1}\\ &= \sum_{j=1}^{N} \lambda^{j-1}\psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N}\mathcal{F}(g_{N+1}^{-})(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

para todo $|\lambda| < \frac{1}{\nu_0}$ y $2k+p-q \leq 0$.

Nuevamente, tomando límite cuando $(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) \to (0,s)$ con $s \geq 0$ en ambos lados de la igualdad (4.4.9) y límite cuando $(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) \to (0,s)$ con $s \leq 0$ en la igualdad (4.4.10) obtenemos

$$\mathcal{F}(f_1^+)(0,s) = \varphi_1(0,s) = \mathcal{F}(h_1^+)(0,s) \ \text{ y } \ \mathcal{F}(f_1^-)(0,s) = \psi_1(0,s) = \mathcal{F}(g_1^-)(0,s).$$

Entonces,

$$\mathcal{F}(f_1^+)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_1\lambda) = \mathcal{F}(h_1^+)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \phi(\lambda) = \varphi_1(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)$$
$$\forall|\lambda| < \frac{1}{\nu_1},\ 2k+p-q \geq 0,$$

y

$$\mathcal{F}(f_1^-)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_1\lambda) = \mathcal{F}(g_1^-)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \phi(\lambda) = \psi_1(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)$$
$$\forall|\lambda| < \frac{1}{\nu_1},\ 2k+p-q \leq 0.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=2} \mathcal{F}(f_j^+)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda)\lambda^{j-2} \\ &= \sum_{j=2}^{N} \lambda^{j-2}\varphi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N-1}\mathcal{F}(h_{N+1}^+)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)\end{aligned}$$

para todo $|\lambda| < \frac{1}{\nu_1}$, $k \geq -p+1$ y

$$\begin{aligned}&\sum_{j=2} \mathcal{F}(f_j^-)(0,(2k+p-q)|\lambda|)\ \omega(\nu_j\lambda)\lambda^{j-2} \\ &= \sum_{j=2}^{N} \lambda^{j-2}\psi_j(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) + \lambda^{N-1}\mathcal{F}(g_{N+1}^-)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|),\end{aligned}$$

para todo $|\lambda| < \frac{1}{\nu_1}$, $k \leq q-1$.

Así, siguiendo hasta $j = N$ obtenemos $\mathcal{F}(f_j^+)(0,s) = \mathcal{F}(h_j^+)(0,s)\ \forall s \geq 0$ y $\mathcal{F}(f_j^-)(0,s) = \mathcal{F}(g_j^-)(0,s)\ \forall s \leq 0$, $\forall j = 0,...,N$.

Finalmente, como N es arbitrario tenemos

$$\mathcal{F}(f_j^+)(0,s) = \mathcal{F}(h_j^+)(0,s)\ \forall s \geq 0 \ \text{ y }\ \mathcal{F}(f_j^-)(0,s) = \mathcal{F}(g_j^-)(0,s)\ \forall s \leq 0,$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. □

Demostración del Teorema 1.0.20: condición necesaria. Dada $f \in \mathcal{S}(H_n)$ sean $H, G \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $h, g \in \mathcal{S}(H_n)$ como en la proposición anterior. Entonces, $f-h$ y $f-g$ satisfacen las hipótesis del Corolario 4.4.5. Por lo tanto, $E^+(\mathcal{F}(f-h))$ y $E^-(\mathcal{F}(f-g))$ son funciones de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Sean

$$\varphi = E^+(\mathcal{F}(f-h)) + H, \ \text{ y }\ \psi = E^-(\mathcal{F}(f-g)) + G.$$

Entonces $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $\varphi|_{\Sigma^+} = \mathcal{F}(f)|_{\Sigma^+}$, $\psi|_{\Sigma^-} = \mathcal{F}(f)|_{\Sigma^-}$. □

4.5. En busca de la extensión de $\mathcal{F}(f)$ con mejores propiedades de diferenciabilidad.

Hasta ahora sabemos que dada $f \in \mathcal{S}(H_n)$ existen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tales que $\mathcal{F}(f)|_{\Sigma^+} = \varphi_1|_{\Sigma^+}$ y $\mathcal{F}(f)|_{\Sigma^-} = \varphi_2|_{\Sigma^-}$. Por lo tanto, la aplicación φ definida sobre $\mathbb{R}^2$ por

$$\varphi(\lambda, s) = \begin{cases} \varphi_1(\lambda, s), & \text{si } s > 0, \\ \varphi_2(\lambda, s), & \text{si } s \leq 0, \end{cases}$$

es una extensión de $\mathcal{F}(f)$ que satisface

(i) φ es de clase C^∞ y de decrecimiento rápido sobre $\{(\lambda, s) : s > 0\}$ y,

(ii) φ es de clase C^∞ y de decrecimiento rápido sobre $\{(\lambda, s) : s < 0\}$,

y en el caso que n sea par, φ es continua sobre $\mathbb{R}^2$.

En esta sección mostraremos que las funciones del espacio $\mathcal{H}_n$ mediante las cuales hemos caracterizado la imagen de la transformada esférica son tan regulares como se podría esperar.

Además, veremos que cuando la aplicación $s \mapsto \mathcal{F}(f)(0, s)$ sea de clase $C^k(\mathbb{R})$ (con $k > n - 2$) entonces podremos mejorar la diferenciabilidad de la extensión de $\mathcal{F}(f)$ en los puntos $(\lambda, 0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración de la Proposición 1.0.22. Es suficiente notar que en la Proposición 4.2.5 las funciones f_j asociadas a f satisfacen que las aplicaciones

$$s \mapsto \mathcal{F}(f_j)(0, s)$$

son de clase C^{k+n-2} en el origen pues $s \mapsto \mathcal{F}(f)(0, s)$ lo es. Por lo tanto, existen $\theta_{1,j}, \theta_{2,j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales tales que $\mathcal{F}(f_j)(0, s) = \theta_{1,j}(s) + s^{k+n-1}\theta_{2,j}(s)\ H(s)$.

Luego, la aplicación G definida por

$$G(\lambda, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \theta_{1,j}(s)\omega(\nu_j\lambda) + s^k \prod_{k=-p+1}^{q-1} (s - (2k + p - q)|\lambda|) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \theta_{2,j}(s)\omega(\nu_j\lambda)\ H(s),$$

está en $\mathcal{H}_n$ usando los mismos argumentos del Lema 4.2.10. Por lo tanto, existe $g \in \mathcal{S}(H_n)$ de modo tal que $G = \mathcal{F}(g)$. Además, tal como hicimos en la Proposición 4.2.12 se puede ver que $\mathcal{F}(g_j)(0, s) = \mathcal{F}(f_j)(0, s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Entonces, la aplicación

$$\varphi = E(\mathcal{F}(f - g)) + G$$

extiende a $\mathcal{F}(f)$ y es de la forma

$$\varphi_1(\lambda, s) + s^k \left(\prod_{k=-p+1}^{q-1} (s - (2k + p - q)|\lambda|) \right) \varphi_2(\lambda, s) H(s)$$

pues G lo es. $\square$

Proposición 4.5.1. *Sea $f \in \mathcal{S}(H_n)$.*

(i) *Si $\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2k+p-q \geq 0$ entonces, $\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = 0$ para todo $-p < k$ y $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.*

(ii) *Si $\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2k+p-q \leq 0$ entonces, $\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k+p-q)|\lambda|) = 0$ para todo $k < q$ y $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.*

Demostración. **(i)** En la primera sección del Capítulo 4 hemos mostrado que:

$$E(m^*)(\lambda, k+q) = \frac{1}{|\lambda|^{n-1}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} (-1)^l \mathcal{F}(f)(\lambda, |\lambda|(2(k-l)+n))$$

Supongamos que n es impar. Bajo las hipótesis iniciales tenemos que

$$|\lambda|^{n-1} E(m^*)(\lambda, k+q) = \begin{cases} \sum\limits_{l=[\frac{n}{2}]+1}^{n-1} (-1)^l \binom{n-1}{l} \mathcal{F}(f)(\lambda, (-2l+n)|\lambda|), & k=0, \\ \sum\limits_{l=[\frac{n}{2}]+2}^{n-1} (-1)^l \binom{n-1}{l} \mathcal{F}(f)(\lambda, (-2l+n+2)|\lambda|), & k=1, \\ \vdots & \\ (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \mathcal{F}(f)(\lambda, -|\lambda|), & k = [\frac{n-3}{2}], \\ 0, & k > [\frac{n-3}{2}]. \end{cases}$$

Por otro lado, usando el Teorema de inversión probado en [10] sabemos que

$$Nf(\tau, \widehat{\lambda}) = (-1)^{n-1} \frac{|\lambda|}{2} \sum_{k \geq 0} E(m^*)(\lambda, k+q)\ L_k^0(|\lambda|\tau/2)\ e^{-|\lambda|\tau/4},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j Nf}{\partial \tau^j}(0, \widehat{\lambda}) &= (-1)^{n-1} \frac{|\lambda|}{2} \sum_{k \geq 0} E(m^*)(\lambda, k+q) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} |\lambda|^j (-1)^{j-l} \frac{1}{2^l 4^{j-l}} (L_k^0)^{(l)}(0) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{|\lambda|^{j+1}}{2} \frac{(-1)^j}{4^j} \sum_{k \geq 0} E(m^*)(\lambda, k+q) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (-1)^l 2^l (L_k^0)^{(l)}(0) \end{aligned}$$

Luego, por definición de la transformada esférica tenemos que

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, (2k'+p-q)|\lambda|) = \sum_{j=0}^{n-2} c_{j,k'} |\lambda|^{n-2-j} \langle \delta^{(j)}, Nf(\cdot, \widehat{\lambda}) \rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} c_{j,k'} |\lambda|^{n-2-j} (-1)^j (-1)^{n-1} \frac{|\lambda|^{j+1}}{2} \frac{(-1)^j}{4^j} \sum_{k \geq 0} E(m^*)(\lambda, k+q) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (-1)^l 2^l (L_k^0)^{(l)}(0)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2} |\lambda|^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{4^j} c_{j,k'} \sum_{k \geq 0} E(m^*)(\lambda, k+q) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (-1)^l 2^l (L_k^0)^{(l)}(0)$$

Además, un cálculo fácil muestra que

$$\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}(-1)^l 2^l (L_k^0)^{(l)}(0) = \frac{2^k}{k!} j(j-1)\cdots(j-k+1) + \cdots = \frac{2^k}{k!} j^k + \cdots = t_k(j)$$

es un polinomio en j de grado k. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&|\lambda|^{n-1} \sum_{k\geq 0} E(m^*)(\lambda, k+q) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}(-1)^l 2^l (L_k^0)^{(l)}(0) \\
&= \left[(-1)^{n-1}\tbinom{n-1}{n-1}\mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+2)|\lambda|) + \cdots + (-1)^{[\frac{n}{2}]+1}\tbinom{n-1}{[\frac{n}{2}]+1}\mathcal{F}(f)(\lambda,-|\lambda|)\right] t_0(j) \\
&\quad + \left[(-1)^{n-1}\tbinom{n-1}{n-1}\mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+4)|\lambda|) + \cdots + (-1)^{[\frac{n}{2}]+2}\tbinom{n-1}{[\frac{n}{2}]+2}\mathcal{F}(f)(\lambda,-|\lambda|)\right] t_1(j) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{n-1}\tbinom{n-1}{n-1}\mathcal{F}(f)(\lambda,-|\lambda|) t_{[\frac{n-3}{2}]}(j) \\
&= (-1)^{n-1} t_0(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+2)|\lambda|) \\
&\quad + \left[(-1)^{n-2}\tbinom{n-1}{n-2} t_0(j) + (-1)^{n-1} t_1(j)\right] \mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+4)|\lambda|) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \left[(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}\tbinom{n-1}{[\frac{n}{2}]+1} t_0(j) + (-1)^{[\frac{n}{2}]+2}\tbinom{n-1}{[\frac{n}{2}]+2} t_1(j) + \cdots + (-1)^{n-1} t_{[\frac{n-3}{2}]}(j)\right] \mathcal{F}(f)(\lambda,-|\lambda|) \\
&= p_0(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+2)|\lambda|) + p_1(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+4)|\lambda|) + \cdots + p_{[\frac{n-3}{2}]}(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,-|\lambda|)
\end{aligned}$$

Así, para $-p < k < q$ tenemos

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{4^j} c_{j,k} \sum_{r=0}^{[\frac{n-3}{2}]} p_r(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+2(r+1))|\lambda|)$$

Si $k < 0$, un cálculo auxiliar muestra que para $r < n-2$ tenemos lo siguiente

$$\sum_{j=0}^{n-2} c_{j,k}\frac{j^r}{4^j} = \begin{cases} 0, & -k-p+n-1 < n-2-r, \\ \sum\limits_{s=1}^{r} (-1)^s \frac{s!}{2^s} a_{s,r} (L^0_{-k-p+n-1})^{(n-2-s)}, & -k-p+n-1 \geq n-2-r, \end{cases}$$

donde $a_{r,r} = 1$. Si $k \geq 0$ tenemos

$$\sum_{j=0}^{n-2} c_{j,k}\frac{j^r}{4^j} = \begin{cases} 0, & k-q+n-1 > r, \\ \sum\limits_{i=1}^{n-2} \left(\sum\limits_{s=1}^{r} i(i-1)..(i-s+1)2^{-s} a_{s,r}\right) (L^0_{k-q+n-1})^{(n-2-i)}(0), & k-q+n-1 \leq r, \end{cases}$$

donde $a_{r,r} = 1$.

Por lo tanto, como los $k = -p + l$ con $1 \leq l \leq [\frac{n-1}{2}]$ son los que me dan todas las pendientes negativas, y para cualquier polinomio $p_r(j)$ de grado $r < l-1$ tenemos que

$$\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{4^j} c_{j,-p+l}\, p_r(j) = 0,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+2l)|\lambda|) &= \frac{(-1)^{n-2}}{2}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{4^j}c_{j,-p+l}\sum_{r=0}^{[\frac{n-3}{2}]}p_r(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+2(r+1))|\lambda|)\\
&= \frac{(-1)^{n-2}}{2}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{4^j}c_{j,-p+l}\sum_{r=l-1}^{[\frac{n-3}{2}]}p_r(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,(-n+2(r+1))|\lambda|)
\end{aligned}$$

por lo que la matriz del sistema homogéneo a resolver es triangular superior y como $p_{l-1}(j) = (-1)^{n-1}\frac{2^{l-1}}{(l-1)!}j^{l-1}+\cdots$ los elementos de la diagonal vienen dados en el caso que $l<p$ por:

$$\begin{aligned}
a_{l,l} &= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(\sum_{j=0}^{n-2}\frac{j^{l-1}}{4^j}c_{j,-p+l}\right)(-1)^{n-1}\frac{2^{l-1}}{l-1!}-1\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\frac{l-1!}{2^{l-1}}(-1)^{n-2}(-1)^{n-1}\frac{2^{l-1}}{l-1!}-1\\
&= \frac{(-1)^{n-2}}{2}-1\neq 0
\end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-2}c_{j,-p+l}\frac{j^{l-1}}{4^j} &= \sum_{s=1}^{l-1}(-1)^s\frac{s!}{2^s}a_{s,l-1}(L^0_{n-l-1})^{(n-2-s)}(0)\\
&= (-1)^{l-1}\frac{(l-1)!}{2^{l-1}}a_{l-1,l-1}(L^0_{n-l-1})^{(n-2-l+1)}(0)\\
&= (-1)^{l-1}\frac{(l-1)!}{2^{l-1}}(-1)^{n-l-1}\\
&= (-1)^{n-2}\frac{(l-1)!}{2^{l-1}}
\end{aligned}$$

ya que $p-l-p+n-1 = n-2-(l-1)$. Y en el caso que $l\geq p$ por:

$$\begin{aligned}
a_{l,l} &= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(\sum_{j=0}^{n-2}\frac{j^{l-1}}{4^j}c_{j,-p+l}\right)(-1)^{n-1}\frac{2^{l-1}}{l-1!}-1\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\frac{l-1!}{2^{l-1}}(-1)^{n-1}\frac{2^{l-1}}{l-1!}-1\\
&= \frac{1}{2}-1\neq 0,
\end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-2} c_{j,-p+l}\frac{j^{l-1}}{4^j} &= \sum_{i=1}^{n-2}\left(\sum_{s=1}^{l-1} i(i-1)...(i-s+1)2^{-s}a_{s,l-1}\right)(L^0_{l-1})^{(n-2-i)}(0)\\ &= \sum_{i=1}^{n-2}\left(2^{-(l-1)}i^{l-1}+\tilde{p}_{l-2}(i)\right)(-1)^{n-i-2}\binom{l-1}{n-i-2}\\ &= \sum_{i=0}^{l-1}\left(2^{-(l-1)}(n-2-i)^{l-1}+\bar{p}_{l-2}(i)\right)(-1)^{i}\binom{l-1}{i}\\ &= \sum_{i=0}^{l-1} 2^{-(l-1)}(-i)^{l-1}(-1)^{i}\binom{l-1}{i}\\ &= 2^{-(l-1)}(l-1)!.\end{aligned}$$

Para el caso n par la única diferencia es que llegamos hasta $(\lambda, -2|\lambda|)$ en vez de $(\lambda, -|\lambda|)$.

(ii) La demostración es análoga a la del inciso anterior pero en este caso tendremos que usar $\tilde{E}(m^{**})$ en vez de $E(m^*)$. De la primera sección del Capitulo 4 de este trabajo se sabe que

$$\tilde{E}(m^{**})(\lambda, -k-p) = \frac{(-1)^{n-2}}{|\lambda|^{n-1}}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}(-1)^l\mathcal{F}(f)(\lambda, -|\lambda|(2(k-l)+n))$$

Supongamos n par. Bajo las hipótesis iniciales tenemos que

$$|\lambda|^{n-1}\tilde{E}(m^*)(\lambda,-k-p) = \begin{cases} \sum\limits_{l=[\frac{n}{2}]+1}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\mathcal{F}(f)(\lambda,(2l-n)|\lambda|), & k=0,\\ \sum\limits_{l=[\frac{n}{2}]+2}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\mathcal{F}(f)(\lambda,(2l-n-2)|\lambda|), & k=1,\\ \vdots & \\ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\mathcal{F}(f)(\lambda,-2|\lambda|), & k=[\frac{n-3}{2}],\\ 0, & k>[\frac{n-3}{2}].\end{cases}$$

Por otro lado, usando el Teorema de inversión probado en [10] sabemos que

$$Nf(\tau,\widehat{\lambda}) = (-1)^{n-1}\frac{|\lambda|}{2}\sum_{k\geq 0}\tilde{E}(m^{**})(\lambda,-k-p)\ L^0_k(-|\lambda|\tau/2)\ e^{|\lambda|\tau/4},$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^j Nf}{\partial\tau^j}(0,\widehat{\lambda}) &= (-1)^{n-1}\frac{|\lambda|}{2}\sum_{k\geq 0}\tilde{E}(m^{**})(\lambda,-k-p)\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}|\lambda|^j(-1)^l\frac{1}{2^l4^{j-l}}(L^0_k)^{(l)}(0)\\ &= (-1)^{n-1}\frac{|\lambda|^{j+1}}{2}\frac{1}{4^j}\sum_{k\geq 0}\tilde{E}(m^{**})(\lambda,k+q)\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}(-1)^l2^l(L^0_k)^{(l)}(0).\end{aligned}$$

Luego, por definición de la transformada esférica tenemos que

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k'+p-q)|\lambda|)=\sum_{j=0}^{n-2} c_{j,k'}|\lambda|^{n-2-j}\langle\delta^{(j)},Nf(\cdot,\widehat{\lambda})\rangle$$
$$=\sum_{j=0}^{n-2} c_{j,k'}|\lambda|^{n-2-j}(-1)^j(-1)^{n-1}\frac{|\lambda|^{j+1}}{2}\frac{1}{4^j}\sum_{k\geq 0}\tilde{E}(m^{**})(\lambda,-k-p)\sum_{l=0}^{j}\tbinom{j}{l}(-1)^l2^l(L_k^0)^{(l)}(0)$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2}|\lambda|^{n-1}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(-1)^j}{4^j}c_{j,k'}\sum_{k\geq 0}\tilde{E}(m^{**})(\lambda,-k-p)\sum_{l=0}^{j}\tbinom{j}{l}(-1)^l2^l(L_k^0)^{(l)}(0)$$

Además,

$$\begin{aligned}
&(-1)^{n-2}|\lambda|^{n-1}\sum_{k\geq 0}\tilde{E}(m^{**})(\lambda,-k-p)\sum_{l=0}^{j}\tbinom{j}{l}(-1)^l2^l(L_k^0)^{(l)}(0)\\
&=\left[(-1)^{n-1}\tbinom{n-1}{n-1}\mathcal{F}(f)(\lambda,(n-2)|\lambda|)+\cdots+(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}\tbinom{n-1}{[\frac{n}{2}]+1}\mathcal{F}(f)(\lambda,2|\lambda|)\right]t_0(j)\\
&\quad+\left[(-1)^{n-1}\tbinom{n-1}{n-1}\mathcal{F}(f)(\lambda,(n-4)|\lambda|)+\cdots+(-1)^{[\frac{n}{2}]+2}\tbinom{n-1}{[\frac{n}{2}]+2}\mathcal{F}(f)(\lambda,2|\lambda|)\right]t_1(j)\\
&\quad\vdots\\
&\quad+(-1)^{n-1}\tbinom{n-1}{n-1}\mathcal{F}(f)(\lambda,2|\lambda|)t_{[\frac{n-3}{2}]}(j)\\
&=p_0(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,(n-2)|\lambda|)+p_1(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,(n-4)|\lambda|)+\cdots+p_{[\frac{n-3}{2}]}(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,2|\lambda|).
\end{aligned}$$

Así, para $-p<k<q$ tenemos

$$\mathcal{F}(f)(\lambda,(2k+p-q)|\lambda|)=-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(-1)^j}{4^j}c_{j,k}\sum_{r=0}^{[\frac{n-3}{2}]}p_r(j)\mathcal{F}(f)(\lambda,(n-2(r+1))|\lambda|)$$

Si $k>0$, un cálculo sencillo muestra que para $r<n-2$ tenemos lo siguiente

$$\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^jc_{j,k}\frac{j^r}{4^j}=\begin{cases}0, & -k-p+n-1<n-2-r,\\ \sum_{s=1}^{r}(-1)^s\frac{s!}{2^s}a_{s,r}(L^0_{-k-p+n-1})^{(n-2-s)}, & -k-p+n-1\geq n-2-r,\end{cases}$$

donde $a_{r,r}=1$. Y si $k<0$ tenemos

$$\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^jc_{j,k}\frac{j^r}{4^j}=$$
$$\begin{cases}0, & -k-p+n-1>r,\\ \sum_{i=1}^{n-2}\left(\sum_{s=1}^{r}i(i-1)..(i-s+1)2^{-s}a_{s,r}\right)(L^0_{-k-p+n-1})^{(n-2-i)}(0), & -k-p+n-1\leq r,\end{cases}$$

donde $a_{r,r}=1$.

Por lo tanto, como los $k = q - l$ con $1 \leq l \leq [\frac{n-1}{2}]$ son los que me dan todas las pendientes negativas, y para cualquier polinomio $p_r(j)$ de grado $r < l - 1$ tenemos que

$$\sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j}{4^j} c_{j,-p+l} p_r(j) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\lambda, (n-2l)|\lambda|) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j}{4^j} c_{j,q-l} \sum_{r=0}^{[\frac{n-3}{2}]} p_r(j) \mathcal{F}(f)(\lambda, (n-2(r+1))|\lambda|) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j}{4^j} c_{j,q-l} \sum_{r=l-1}^{[\frac{n-3}{2}]} p_r(j) \mathcal{F}(f)(\lambda, (n-2(r+1))|\lambda|)
\end{aligned}$$

por lo que la matriz del sistema homogéneo a resolver es triangular superior y como $p_{l-1}(j) = (-1)^{n-1} \frac{2^{l-1}}{(l-1)!} j^{l-1} + \cdots$ los elementos de la diagonal vienen dados en el caso que $l \leq q$ por:

$$\begin{aligned}
a_{l,l} &= \frac{-1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j \frac{j^{l-1}}{4^j} c_{j,q-l} (-1)^{n-1} \frac{2^{l-1}}{l-1!} - 1 \\
&= \frac{-1}{2} \frac{l-1!}{2^{l-1}} (-1)^{n-2} \binom{n-l-1}{n-l-1} (-1)^{n-1} \frac{2^{l-1}}{l-1!} - 1 \\
&= \frac{1}{2} - 1 \neq 0
\end{aligned}$$

y en el caso $l > q$ por

$$\begin{aligned}
a_{l,l} &= \frac{-1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j \frac{j^{l-1}}{4^j} c_{j,q-l} (-1)^{n-1} \frac{2^{l-1}}{l-1!} - 1 \\
&= \frac{-1}{2} \frac{l-1!}{2^{l-1}} (-1)^{n-1} \frac{2^{l-1}}{l-1!} - 1 \\
&= \frac{(-1)^{n-2}}{2} - 1 \neq 0
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.5.2. *Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y sean $k_1, k_2, \ldots, k_n$ enteros no nulos. Si $\varphi(\lambda, \pm k_i|\lambda|) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$\varphi(\lambda, s) = \prod_{i=1}^{n} (s^2 - k_i^2 \lambda^2)\ \psi(\lambda, s),\ \forall (\lambda, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción. En efecto, sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(\lambda, \pm k|\lambda|) = 0\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\varphi(\lambda, \pm k\lambda) = 0, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi(\lambda, s)}{s^2 - (k\lambda)^2}\\
&= \frac{1}{s + k\lambda}\ \frac{\varphi(\lambda, s) - \varphi(\lambda, k\lambda)}{s - k\lambda}\\
&= \frac{1}{s + k\lambda}\ \frac{1}{s - k\lambda}\int_{k\lambda}^{s} \frac{\partial\varphi}{\partial s}(\lambda, t)\ dt\\
&= \frac{1}{s + k\lambda}\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial s}(\lambda, k\lambda + t(s - k\lambda))\ dt\\
&= \frac{1}{s + k\lambda}\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial s}(\lambda, k\lambda + t(s - k\lambda)) - \frac{\partial\varphi}{\partial s}(\lambda, -s + t(s - k\lambda))\ dt\\
&+ \frac{1}{s + k\lambda}\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial s}(\lambda, -s + t(s - k\lambda))\ dt\\
&= \frac{1}{s + k\lambda}\int_0^1 \int_{-s+t(s-k\lambda)}^{k\lambda+t(s-k\lambda)} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(\lambda, u)du\ dt + \frac{1}{s + k\lambda}\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial s}(\lambda, -s + t(s - k\lambda))\ dt\\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(\lambda, -s + t(s - k\lambda) + u(s + k\lambda))\ du\ dt + \frac{\varphi(\lambda, -k\lambda) - \varphi(\lambda, -s)}{s + k\lambda}\\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(\lambda, -s + t(s - k\lambda) + u(s + k\lambda))\ du\ dt + \frac{\varphi(\lambda, k\lambda) - \varphi(\lambda, -s)}{s + k\lambda}\\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(\lambda, -s + t(s - k\lambda) + u(s + k\lambda))\ du\ dt + \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial s}(\lambda, -s + t(s + k\lambda))\ dt\\
&= \psi(\lambda, s).
\end{aligned}$$

Claramente, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ pues $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Supongamos, por hipótesis inductiva, que existe $\psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\varphi(\lambda, s) = \prod_{i=1}^{j}(s^2 - k_i^2\lambda^2)\ \psi_1(\lambda, s).$$

Entonces $\psi_1(\lambda, \pm k_{j+1}|\lambda|) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Por la primera parte de la demostración, existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\psi_1(\lambda, s) = (s^2 - k_{j+1}^2\lambda^2)\psi(\lambda, s)$$

Luego,

$$\varphi(\lambda, s) = \prod_{i=1}^{j+1}(s^2 - k_i^2\lambda^2)\ \psi(\lambda, s).$$

□

Corolario 4.5.3. *Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|) = 0\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $k \in \{-p + 1, \dots, q - 1\}$ y $2k + p - q \neq 0$. Entonces, existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$\varphi(\lambda, s) = \prod_{\substack{k=-p+1\\ 2k+p-q\neq 0}}^{q-1} (s - (2k + p - q)|\lambda|)\ \psi(\lambda, s), \quad \forall(\lambda, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Demostración del Teorema 1.0.23. Dada las propiedades de diferenciabilidad de φ no es difícil mostrar que existen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tales que

$$\varphi(\lambda, s) = \varphi_1(\lambda, s) + s^{k+1}\varphi_2(\lambda, s)\ H(s), \quad \forall(\lambda, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Como $\varphi|_\Sigma$ y $\varphi_1|_\Sigma$ están en la imagen de la transformada esférica entonces, las restricciones a Σ de las aplicaciones definidas sobre $\mathbb{R}^2$ por

$$(\lambda, s) \mapsto s^{k+1}\varphi_2(\lambda, s)\ H(s)$$

y

$$(\lambda, s) \mapsto s^{k+1}\varphi_2(\lambda, s)\ (1 - H(s))$$

están en la imagen de la transformada esférica. Además, la Proposición 4.5.1 nos dice que

$$((2k + p - q)|\lambda|)^{k+1}\varphi_2(\lambda, (2k + p - q)|\lambda|) = 0$$

para todo $-p + 1 \leq k \leq q - 1$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Luego, el corolario anterior nos dice que existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\varphi_2(\lambda, s) = \prod_{\substack{k=-p+1 \\ 2k+p-q\neq 0}}^{q-1} (s - (2k + p - q)|\lambda|)\ \psi(\lambda, s),\ \forall(\lambda, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalmente,

$$\varphi(\lambda, s) = \varphi_1(\lambda, s) + s^{k+1} \prod_{\substack{k=-p+1 \\ 2k+p-q\neq 0}}^{q-1} (s - (2k + p - q)|\lambda|)\psi(\lambda, s)\ H(s)$$

para $(\lambda, s) \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto

$$\mathcal{F}(f)(0, s) = \varphi(0, s) = \begin{cases} \varphi_1(0, s) + s^{k+n-1}\ \psi(0, s)\ H(s), & \text{si } n \text{ es par,} \\ \varphi_1(0, s) + s^{k+n}\ \psi(0, s)\ H(s), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Esto nos dice que $s \mapsto \mathcal{F}(f)(0, s)$ es de clase $C^{k+n-1}(\mathbb{R})$ en el origen si n es impar y es de clase $C^{k+n-2}(\mathbb{R})$ si n es par. $\square$

Bibliografía

[1] Astengo F., Di Blasio B. and Ricci F., *Gelfand transforms of polyradial Schwartz functions on the Heisenberg group*, Journal of Functional Analysis **251**, 772-791 (2007).

[2] Astengo F., Di Blasio B. and Ricci F., *Gelfand Pairs on the Heisenberg group and Schwartz functions*, Lett. Math. Phys. **53**, 11-27 (2008).

[3] Benson C., Jenkins J., and Ratcliff G., *On Gelfand pairs associated with solvable*, Lie groups, Trans. Amer. Math. Sot. **321**, 85-116 (1990).

[4] Benson C., Jenkins J., and Ratcliff G., *Bounded$K$-spherical functions on Heisenberg group*, Journal of Functional Analysis **105**, 409-443 (1992).

[5] Benson C., Jenkins J., and Ratcliff G., *Spectra for Gelfand pairs associated with the Heisenberg group*, Colloq. Math. **71**, 305-328 (1996).

[6] Benson C., Jenkins J., and Ratcliff G., *The spherical transform of a Schwartz function on the Heisenberg group*, ibid. **154**, 379-423 (1998).

[7] Faraut J., *Distribution sphériques sur le espaces hiperbolique*, J. Math. Pures et Appl. **58**, 369-444 (1979).

[8] Fischer V. Ricci F. and Yakimova O., *Nilpotent Gelfand pairs and spherical transforms of Schwartz funtions III. Isomorphisms between Schwartz spaces under Vinberg's condition*, preprint, arXiv:1210.7962v1 [math.FA] 30 Oct 2012.

[9] Godoy T. and Saal L., *L^2spectral descomposition on the Heisenberg group associated to the action of $U(p,q)$*, Pacific J. Math. **193**, 327-353 (2000).

[10] Godoy T. and Saal L., *A spherical transform on Schwartz functions on the Heisenberg group associated to the action of $U(p,q)$*, Colloq. Math. **106**, 231-255 (2006).

[11] Godoy T. and Saal L., *On the spectrum of the generalized Gelfand pair $(U(p,q),H_n),\ p+q=n$*, Math. Scandinavia **105**, 171-187 (2009).

[12] Helgason S., *Group and Geometric analysis*, Academic Press, New York (1984).

[13] Rudin W., *Real and complex analysis.*

[14] Szegö G., *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publication, Vol. XXIII, A.M.S.

[15] Tengstrand A., *Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature*, Math. Scand. **8** 201-218 (1960).

[16] Vand Dijk, G., Mokni, K., *Harmonic analysis on a class of generalized Gelfand pairs associated with hyperbolic spaces*, Russian J. of Math. Physics, **5**, N.2.

[17] Vand Dijk, G., *Group representations on the spaces of distributions*, Russian J. of Math. Physics, **2**, 57-68 (1994).

[18] Veneruso A., *Schwartz kernels on the Heisenberg group*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. **B 6**, 657-666 (2003).

[19] Vinberg E.B., *Commutative homogeneous spaces and co-isotropic symplectic actions*, Russian Math. Surveys, **56**, 1-60 (2001).

[20] Wolf J., *Representations of certain semidirect product groups*, J. of Funct. Analysis **19**, 339-372 (1975).