Aplicaciones elementales de la ecuación funcional de Cauchy: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

N. A. Fava

Resumen

La ecuación de Cauchy puede resolverse bajo hipótesis muy elementales, adecuadas a los primeros años de la escuela media, lo que permite abordar en forma amena y sin embargo rigurosa algunos temas clásicos relacionados con la proporcionalidad.

1. La ecuación de Cauchy. Comenzamos por enunciar y probar el teorema que sirve de base a las aplicaciones que se consideran en esta nota. Se trata de determinar la forma general de una función f que satisface la ecuación del título para cualquier par de números $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Teorema. *Sea* $f(x)$ *una función con valores reales, estrictamente creciente sobre la semirrecta* $x \geq 0$, *que satisface la ecuación funcional* $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *Entonces existe una constante* $c > 0$, *tal que* $f(x) = cx$ *para cualquier número real* $x \geq 0$. [Naturalmente, $c = f(1)$]

Demostración. Conviene establecer primero unos lemas cuyas sencillas demostraciones se dejan como ejercicio (los símbolos m y n denotan enteros positivos):

1) $f(0) = 0$ (de donde $f(x) > 0$ para cualquier $x > 0$).
2) $f(nx) = nf(x)$ (por inducción sobre n).
3) $f(x/n) = (1/n)f(x)$.
4) $f(m/n) = (m/n)\,f(1) = c(m/n)$.

La última afirmación establece que $f(r) = cr$ para cualquier número racional $r \geq 0$.

Sea ahora x un número real positivo. Si r y r' son números racionales positivos que satisfacen $r < x < r'$, por ser f creciente, tendremos

$$f(r) < f(x) < f(r').$$

Puesto que $f(r) = cr$ y $f(r') = cr'$, concluimos que $r < \dfrac{f(x)}{c} < r'$.

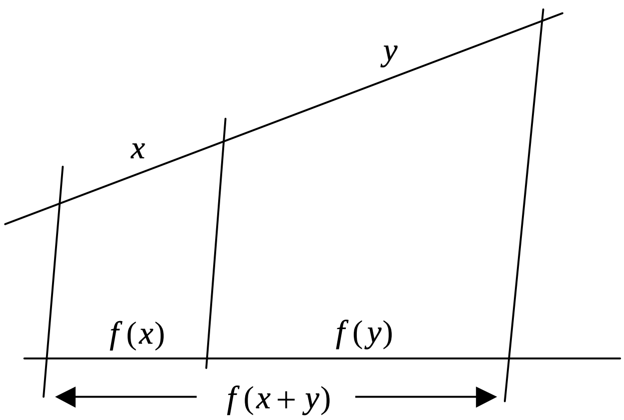
Resumiendo: $r < x < r'$ implica $r < \dfrac{f(x)}{c} < r'$ para cualquier par r, r' de números racionales positivos. Por la densidad de los números racionales, esto puede ocurrir sólo si $f(x)/c = x$, como se quería demostrar.

Observaciones. 1) La tesis del teorema subsiste con una constante negativa $(c < 0)$ si se supone que f es decreciente.

2) Notemos el carácter completamente elemental de la demostración, basada en nociones que se enseñan (o enseñaban) en los dos primeros años de la escuela secundaria. En realidad, la tesis subsiste bajo hipótesis mucho menos restrictivas, pero entonces la demostración deja de ser elemental.

2. Proyección paralela. La primera aplicación del teorema anterior es al teorema de la proyección paralela o teorema de Thales: *si los puntos de dos rectas se hallan en correspondencia biunívoca por medio de una proyección paralela, la longitud de cada segmento de una de ellas es proporcional a la longitud del segmento correspondiente de la otra.*

Para probarlo, consideremos en una de las rectas dos segmentos consecutivos de longitudes x e y, y denotemos por $f(x)$ y $f(y)$, respectivamente, las longitudes de sus proyecciones sobre la otra recta, como muestra la siguiente figura:



Puesto que las proyecciones son también consecutivas, tendremos:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

de donde resulta $f(x) = cx$, donde c es una constante positiva. Q.E.D.

Notas. 1) La demostración que precede es, en esencia, la clásica demostración de Eudoxo (véase el apéndice al final) basada en la densidad de los números racionales, aunque revestida de una ropaje *moderno* acaso más ameno y fácil de aplicar.

2) En forma análoga puede probarse que *la longitud de un arco de circunferencia es proporcional al ángulo central correspondiente*. Basta observar que, denotando por $f(a)$ la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de medida a, se cumple:

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

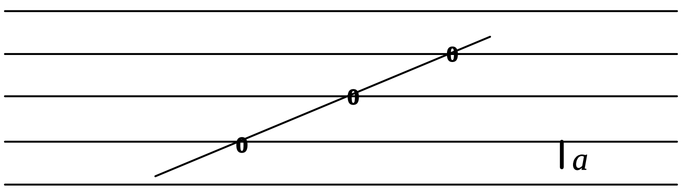
3. Movimiento uniforme. En sus célebres *Diálogos*, Galileo define el movimiento rectilíneo uniforme como aquél en que el móvil recorre *espacios iguales en tiempos iguales*. A partir de esa definición, usando el criterio de proporcionalidad de Eudoxo, deduce Galileo que el espacio recorrido es proporcional al tiempo. Veamos cómo se logra el mismo resultado con el teorema del primer párrafo.

En primer lugar, es fácil probar que en un movimiento rectilíneo con esa propiedad el sentido de recorrido es constante. Denotando por $f(t)$ el espacio recorrido en un tiempo t, es claro que en un tiempo $t = t_1 + t_2$ el móvil recorre un espacio $f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$, de donde se sigue que existe una constante c, tal que $f(t) = ct$, como queríamos demostrar. Naturalmente, la constante c es la *velocidad* del movimiento.

Las dos últimas aplicaciones son un poco menos elementales.

4. El problema de la aguja de Buffon. Sobre una superficie plana horizontal en la que se ha trazado un haz de rectas paralelas formando franjas de anchura constante a, se lanza al azar una aguja de longitud l. Llamando el N al número de cortes entre la aguja y el haz, el problema consiste en calcular el valor medio $E(N)$ de la variable aleatoria N.

En la figura siguiente se muestra una realización del experimento de Buffon en la que la variable N toma el valor 3.



Admitiremos sin demostración algunas afirmaciones bastante plausibles. La primera es que la linealidad del valor medio:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y), \qquad E(cX) = c\,E(X)$$

es una ley general. Esto admitido, expresemos el valor medio de N como una función desconocida f de la longitud de la aguja:

$$E(N) = f(l).$$

Pensemos ahora en una aguja de longitud l formada por dos segmentos consecutivos de longitudes l_1 y l_2. Denotando por N_1 y N_2 el número de cortes de cada uno de dichos segmentos con las rectas del haz, tendremos $N = N_1 + N_2$, de donde resulta:

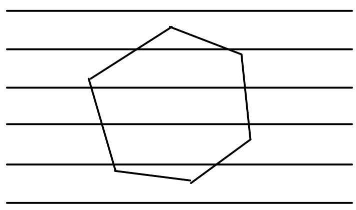
$$f(l) = E(N) = E(N_1) + E(N_2) = f(l_1) + f(l_2).$$

Puesto que l_1 y l_2 son arbitrarios, el teorema demostrado permite afirmar que f es de la forma $f(x) = cx$, donde c es una constante. Luego:

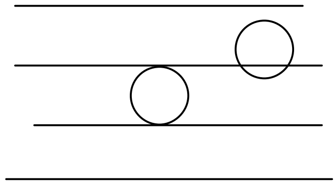
(1) $$E(N) = cl,$$

y sólo queda por averiguar el valor de la constante.

Por la aditividad del valor medio, la fórmula (1) se mantiene válida si en lugar de una aguja tuviéramos una pieza de alambre de longitud l en forma de poligonal (abierta o cerrada) formada por k segmentos de longitudes $l_1, l_2, ..., l_k$.

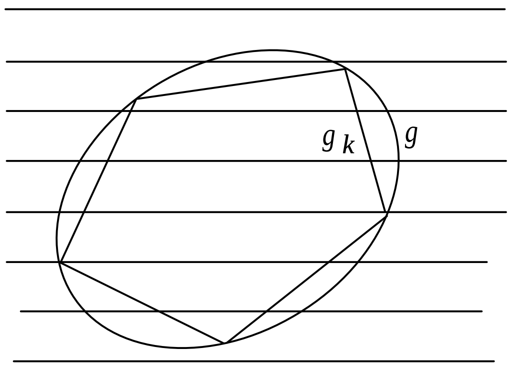


Admitiendo que la fórmula se mantiene válida para cualquier curva convexa cerrada, consideremos el caso muy especial de una circunferencia de diámetro a –igual a la anchura de las franjas– como muestra la siguiente figura:



En tal caso, tendremos $N = 2$ en cada realización del experimento, y por consiguiente $E(N) = 2 = c \cdot p\, a$, de donde se obtiene para la constante el valor $c = 2/p\, a$.

Es posible dar una idea de cómo se demuestra que la fórmula (1) es válida para cualquier curva convexa cerrada g de perímetro l. A tal fin, consideremos una sucesión de polígonos g_k de perímetros l_k, inscriptos en la curva g, tales que las longitudes de sus lados tiendan a cero cuando $k \to \infty$. Supongamos además que los vértices de g_{k+1} están sobre los arcos que subtienden los lados de g_k.



Denotando por N_k el número de cortes de g_k con las rectas del haz tendremos:

$$l = \lim_{k \to \infty} l_k, \quad N_k \le N_{k+1} \quad \text{y} \quad N = \lim_{k \to \infty} N_k \ \text{con probabilidad uno.}$$

La última relación podría no verificarse si la curva cayera en posición tangente a una de las rectas del haz, lo que, según se demuestra, tiene probabilidad cero.

En estas condiciones el *teorema de la convergencia monótona* de la teoría general del valor medio permite concluir que

$$E(N) = \lim_{k \to \infty} E(N_k) = \lim_{k \to \infty} (c l_k) = c l.$$

5. Desintegración nuclear. Denotando por T el tiempo de vida de un átomo inestable y por $u(t) = P\{T > t\}$ la probabilidad de que el átomo esté *vivo* –permanezca entero– al cabo de un tiempo t, la hipótesis de que el átomo *no envejece*, o bien que *no tiene memoria*, se traduce en la relación

(2) $$P\{T > s + t \mid T > s\} = P\{T > t\}.$$

La misma expresa que *la probabilidad condicional de que el átomo llegue vivo al instante* $s + t$ *sabiendo que ha llegado al instante s, es igual a la probabilidad inicial de que llegue al instante t.*

En virtud de la definición de probabilidad condicional:

$$P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A),$$

la relación (2) toma la forma $u(t+s) = u(t)u(s)$, de modo que poniendo $f(t) = \ln u(t)$, se tendrá: $f(s+t) = f(s) + f(t)$; y por consiguiente, $f(t) = ct$, donde c es una constante negativa, por ser f decreciente. Escribiendo $c = -l$, tendremos:

$$P\{T > t\} = u(t) = e^{f(t)} = e^{-lt},$$

Partiendo de una muestra que inicialmente contiene N_0 átomos de cierto elemento radiactivo, el número $N = N(t)$ de átomos *vivos* al cabo de un tiempo *t*, de acuerdo con la ley de los grandes números, deberá verificar la igualdad aproximada $N / N_0 \approx e^{-lt}$; de donde la ley del decaimiento radiactivo:

$$N = N_0 e^{-lt},$$

de naturaleza estadística.

Apéndice

El criterio de proporcionalidad de Eudoxo, enunciado en el libro V de Euclides, aparece como una teoría axiomática de las proporciones que torna superflua la distinción entre cantidades conmensurables e inconmensurables —el gran escollo de la geometría griega. El criterio de Eudoxo puede enunciarse así:

> *Dos pares de cantidades homogéneas (A, B) y (C, D) tienen la misma razón [A:B = C:D] si y sólo si para cualquier par de enteros positivos m y n, entre mC y nD se verifica la misma relación de igualdad o desigualdad que existe entre mA y nB.*

Epílogo

> *Yo sé de un laberinto griego que es una línea única, recta.*
>
> ***J.L. Borges***

Guemes 3931. 1425 – Buenos Aires.