Convergencia Lineal y el algoritmo de bisección

Claudio Fernández - Olga Funes

1 Introducción

El algoritmo de bisección es usualmente el primer algoritmo presentado en un curso de análisis numérico para hallar raíces de una función continua a valores reales definida en un intervalo de la recta real. Es bien conocido que las iteraciones producidas por este algoritmo convergen a una raíz y que puede calcularse el número de iteraciones requeridas para asegurar un grado de precisión deseado. Es conveniente finalizar la discusión con un análisis del orden de convergencia del algoritmo. Analizaremos las propiedades de convergencia del algoritmo de bisección.
Supongamos que $f \in C[0,1]$ tiene una única raíz x en $(0,1)$ y $f(0).f(1) < 0$. El algoritmo de bisección genera una sucesión de iterados x_k de la siguiente manera: sea $x_1 = 1/2$, $a_1 = 0$ y $b_1 = 1$ y supongamos que hemos hallado x_i, a_i, b_i para algún $i \geq 1$. Entonces

(i) Si $f(x_i) = 0$, *el algoritmo finaliza*;

(ii) Si $f(a_i).f(x_i) < 0$, sea

$$x_{i+1} = (a_i + x_i)/2 = x_i - (1/2)^{i+1}, a_{i+1} = a_i \text{ y } b_{i+1} = x_i \quad \text{(fig.1)}$$

(iii) Si $f(a_i).f(x_i) > 0$, sea

$$x_{i+1} = (b_i + x_i)/2 = x_i + (1/2)^{i+1}, a_{i+1} = x_i \text{ y } b_{i+1} = b_i \quad \text{(fig.2)}$$

El algoritmo finaliza cuando $f(x_n) = 0$ para algún n, o si la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x, en este caso $|x_k - x| \leq (\frac{1}{2})^k$ para todo k. Comparemos el orden de convergencia del algoritmo de bisección con tres nociones diferentes de convergencia lineal que aparecen en la literatura.

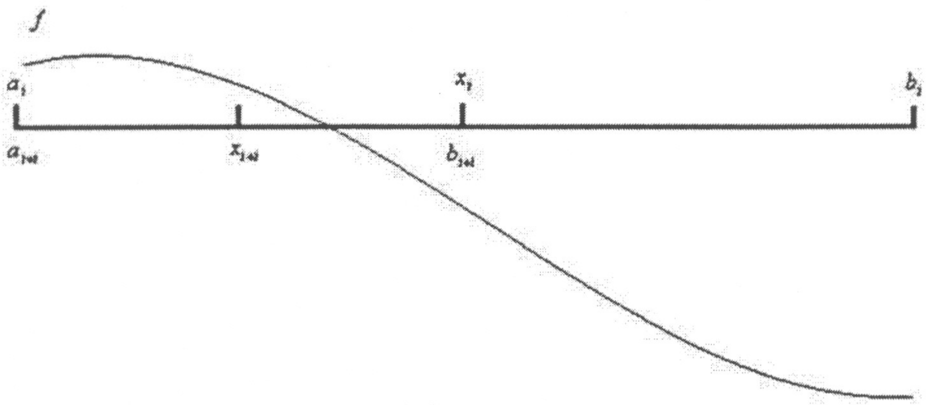

FIG. 1

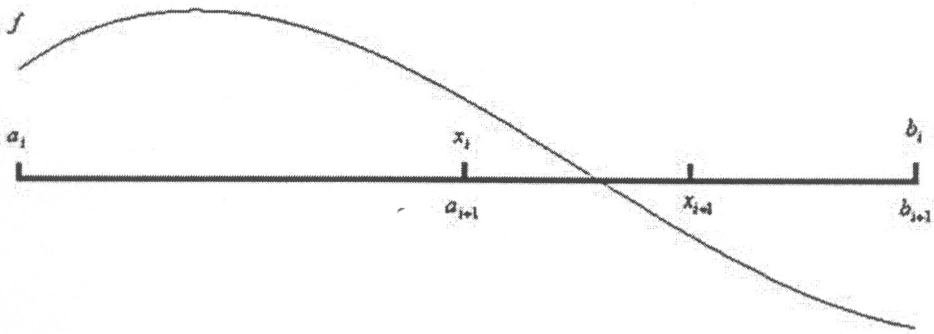

FIG. 2

Para $k \geq 1$ denotaremos con $e_k = x - x_k$ al error cometido al usar la k-ésima aproximación de x obtenida con algún algoritmo.

Definición 1.1 *Un algoritmo converge* **linealmente** *si existe una constante positiva $K < 1$ tal que $|e_{k+1}| \leq K|e_k|$ para todo k suficientemente grande. Tal K se llama un* **factor de convergencia**.

Una segunda definición común de convergencia lineal reemplaza la condición anterior por la condición $lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} < 1$; aunque en general esta es una condición más fuerte (ya que el límite puede no existir), la prueba del Teorema 2.3 muestra que en el caso del algoritmo de bisección, las dos condiciones son equivalentes si el algoritmo no finaliza. Notemos también que, en general, la convergencia lineal de un algoritmo implica lo que llamamos *convergencia*

geométrica; esto es $\overline{lim}_{k\to\infty}|e_k|^{1/k} < 1$.
Para cada $x \in (0,1)$ existen innumerables funciones f que satisfacen $f(0).f(1) < 0$ y para las que x es una raíz simple. Por lo tanto, describiremos el orden de convergencia del algoritmo de bisección para ciertos subconjuntos del $(0,1)$ en lugar de las clases asociadas de funciones. En particular, para todo $x \in (0,1)$ para el cual el algoritmo de bisección *no finaliza*, el algoritmo de bisección posee convergencia geométrica ya que $\overline{lim}_{k\to\infty}|e_k|^{1/k} = 1/2$. En la próxima sección caracterizaremos aquellos $x \in (0,1)$ para los cuales el algoritmo de bisección posee convergencia lineal.

2 Propiedades de convergencia del algoritmo de bisección

La k-ésima iteración x_k del algoritmo está dada por

$$x_k = 1/2 + \sum_{i=2}^{k} s_i (1/2)^i,$$

donde cada $s_i = 1$ ó -1. Esto motiva el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Todo $x \in (0,1)$ tiene una única representación de la forma $x = \sum_{i=1}^{k} s_i(1/2)^i$ si $x = p/2^k$ es un racional diádico, ó, $x = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(1/2)^i$ si x no es un racional diádico, donde $s_1 = 1$ y $s_i = 1$ ó -1 para $i > 1$.*

Demostración: Es sabido que todo $x \in (0,1)$ tiene una única representación binaria $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(1/2)^i$ donde cada $c_i = 0$ o 1 y no está permitido que a partir de algún j los $c_i = 1$ para todo $i \geq j$ (de esta manera cualquier racional diádico $p/2^k$ puede ser expresado como una serie $\sum_{i=1}^{k} c_i(1/2)^i$). El resultado se sigue inmediatamente de reemplazar $s_{i+1} = 2c_i - 1$ para todo i.

Ahora probaremos un lema el cual es la clave de nuestro principal resultado.

Lema 2.2 *Supongamos que el algoritmo de bisección no finaliza en x_{k+2} o antes, donde $k \geq 1$. Supongamos también que $s_{k+1} \neq s_{k+2} = s_{k+3}$. Entonces $|e_{k+1}| > |e_k|$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos asumir

$$s_{k+1} = 1 \text{ y } s_{k+2} = s_{k+3} = -1,$$

(ii) *x es un número racional de forma reducida $p/(3.2^k)$ para enteros $p > 0$ y $k \geq 0$ si y sólamente si el algoritmo de bisección no finaliza y converge linealmente con factor de convergencia $1/2$;*

(iii) *x no tiene ninguna de las formas reducidas anteriores si y sólamente si el algoritmo de bisección no finaliza, y no tiene convergencia lineal.*

Demostración:

(i) Supongamos que el algoritmo finaliza en x_k. Entonces

$x = x_k = \sum_{i=1}^{k} s_i(1/2)^i = \frac{\sum_{i=1}^{k} 2^{k-i} s_i}{2^k} = p/2^k$,

donde p debe ser un entero impar. Por otro lado, supongamos que $x = p/2^k$ en forma reducida. Entonces por el Teorema 2.1 x tiene la representación única $x = \sum_{i=1}^{k} s_i(1/2)^i$, es decir el algoritmo de bisección ha finalizado en x_k.

(ii) Primero supongamos que el algoritmo no finaliza y converge linealmente. Por el Teorema 2.3, existen $j > 1$ tal que los s_i alternan en el signo para $i \geq j$. De este modo tenemos

$x = \sum_{i=1}^{j-1} s_i(1/2)^i + \sum_{i=j}^{\infty} s_i(1/2)^i = \frac{l}{2^{j-1}} + \frac{s_j(1/2)^j}{1-(-1/2)} = \frac{(3l+s_j)}{3.2^{j-1}}$,

donde l es un entero impar. Entonces, en forma reducida, $x = p/(3.2^k)$ para algún $k \leq j-2$.

Ahora supongamos que $x = p/(3.2^k)$ en forma reducida, entonces podemos escribir $2p = 3m + \delta$ donde $\delta = \pm 1$ y m es impar. Luego,

$x = \frac{m}{2^{k+1}} + \delta.\frac{1}{2^{k+2}}.\frac{2}{3} = \sum_{i=1}^{k+1} s_i(1/2)^i + \delta.\frac{1}{2^{k+2}} \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(1/2)^i =$
$\sum_{i=1}^{k+1} s_i(1/2)^i + \sum_{i=k+2}^{\infty} \delta.(-1)^{i+k+2}.(\frac{1}{2})^i$,

donde $\sum_{i=1}^{k+1} s_i(1/2)^i$ es el desarrollo del racional diádico $m/2^{k+1}$ dado por el Teorema 2.1. De esta manera el algoritmo de bisección aplicado a x no finaliza, y converge linealmente por el Teorema 2.3.

(iii) Se obtiene claramente de (i) y (ii) por exclusión.

Ejemplo 2.5 *Sea $x = 5/12 = 5/(3.2^2)$. Por el Teorema 2.4 el algoritmo de bisección no finaliza y converge linealmente. La representación binaria de $5/12$ es $0.01101010\cdots$. Por lo tanto*

$\{s_i\}_{i=1}^{\infty} = \{1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots\}$,

$\frac{5}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} \cdots$,

Ejemplo 2.6 *Sea $x = 3/5$. El algoritmo de bisección no finaliza y no converge linealmente. Se tiene*

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \cdots,$$

y el lema implica que $|x_{2l} - \frac{3}{5}| > |x_{2l-1} - \frac{3}{5}|$ para todo $l \geq 1$.

References

[1] K. E. Atkinson, *An introduction to Numerical Analysis*, Wiley, New York, 1978.

[2] I. Burden, J. D. Faires, anda A.C. Reynolds, *Numerical Analysis*, 2nd Ed., Prindle, Weber and Schmidt.

[3] E. Isaacson and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, Wiley, New York, 1966.

[4] J.M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solutions of Non-linear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.

[5] S.M Pizer, *Numerical Computing and Mathematical Analysis*, Science Research Associates, Chicago, 1975.

[6] J.S. Vandergraft, *Introduction to Numerical Computations*, Academic Press, New York, 1978.

Universidad Nacional de la Patagonia. San Juan Bosco. (9000). Comodoro Rivadavia. funes@ing.unpata.edu.ar