Series de Dirichlet

Emilio Lauret

Llamamos serie de Dirichlet a aquellas series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

con $a_n \in \mathbb{C}$. Ellas son una de las herramientas más poderosas dentro de la Teoría Analítica de Números, y además están presentes en otras áreas dentro y fuera de la Teoría de Números.

Por ejemplo, una de ellas es la función zeta de Riemann $\zeta(s)$, la cual es protagonista de uno de los problemas más famosos en la matemática actual: "La Hipótesis de Riemann". Riemann conjeturó que todos los ceros de $\zeta(s)$ en $0 \leq \mathrm{Re}s \leq 1$ deben estar exactamente en la línea $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$. Como un pequeño agregado a la importancia que tendría para alguien resolverlo, el Instituto Clay de Matemáticas premiará con US$\$10^6$ a quien lo logre.

Otra importante aparición de las series de Dirichlet en la farándula matemática, fue su aporte en la prueba del Último Teorema de Fermat, el cual sorprendió al mundo en la década del los 90.

Según *Wikipedia* ([Wiki, "Teoría de Números"]), la teoría de números estudia las propiedades de los números en general y de los enteros en particular, así como diversos problemas derivados de su estudio. Según los métodos empleados y las preguntas que se intentan contestar, la teoría de números se subdivide en diversas ramas. Alguna de ellas son "Teoría Elemental de Números", "Teoría Analítica de Números", "Teoría Algebraica de Números", "Teoría Geométrica de Números", "Teoría Combinatoria de Números" y "Teoría Computacional de Números".

En este artículo estamos interesados en la Teoría Analítica de Números. Ésta tiene diversas maneras tanto de encarar como de resolver problemas. Por ejemplo, a la teoría de números le interesa conocer el comportamiento de ciertas funciones aritméticas (funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), tales como: $r_k(n)$ el número de formas de escribir n como suma de k cuadrados; la función divisor $\mathrm{d}(n)$, que cuenta el número de divisores de n; $\sigma(n)$ que suma los divisores de n, etc.. Entonces una de las estrategias es asociarle a cada una de estas funciones su respectiva serie de Dirichlet. Luego, ciertas propiedades como de convergencia, holomorfía, etc., pueden traducirse en propiedades elementales de las funciones.

Otra estrategia en la Teoría Analítica de Números es traducir preguntas elementales en afirmaciones enunciadas con un lenguaje analítico, y luego demostrarlas también dentro del análisis. Actualmente están siendo atacados de esta manera problemas de rápido entendimiento. Por ejemplo la Conjetura de Goldbach (todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos) y la infinitud de los primos consecutivos (existen infinitos primos p tales que $p+2$ es primo). En este artículo ejemplificaremos esta estrategia demostrando el Teorema de Dirichlet, en la Sección (3).

El objetivo principal de este artículo es desarrollar, de la forma más básica y clara, los resultados principales de las series de Dirichlet, entrando en detalles hasta donde se pueda. La gran desventaja es que se necesitan numerosos resultados del análisis, principalmente del complejo. Nosotros no intentaremos ser autocontenidos, sino que cada vez que necesitemos algún teorema de funciones complejas, lo mencionaremos, y en diversas ocasiones lo derivaremos al libro de Conway ([Con]), con su exacta ubicación.

Comenzaremos introduciendo las funciones aritméticas. Aquí también necesitamos algunos conocimientos básicos del álgebra, principalmente sobre algunas estructuras algebraicas como grupos abelianos y anillos.

1 Funciones aritméticas

En diversas áreas de la matemática es común el manejo de sucesiones de números reales o complejos. En Teoría de Números estas sucesiones se denominan funciones aritméticas.

1.1 Definición y ejemplos

Definición 1.1. Llamamos *función aritmética* a aquellas funciones a valores complejos con dominio los números naturales, i.e. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. A éstas les daremos una estructura de anillo, y le estudiaremos una cierta clase especial: las funciones multiplicativas.

Ejemplo 1.2. Algunos ejemplos triviales son

$$\mathrm{I}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases} ; \qquad \mathbf{1}(n) = 1 \quad \forall\, n; \qquad \mathrm{id}(n) = n \quad \forall\, n.$$

I, $\mathbf{1}$ e id se llaman función unidad, función constante y función identidad respectivamente.

Ejemplo 1.3. Un ejemplo más sofisticado es la famosa *función ϕ de Euler*. Ésta se define como el número de enteros en $\{1, \dots, n\}$ coprimos con n. Por ejemplo $\phi(4) = 2$, $\phi(6) = 2$, $\phi(p) = p - 1$ si p es primo, etc.. Si $k \in \mathbb{N}$ se ve que $\phi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$. Se prueba que $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ si $(m, n) = 1$. Esto implica que si $N = p_1^{k_1} \dots p_1^{k_r}$ resulta

$$\phi(N) = \phi(p_1^{k_1}) \dots \phi(p_r^{k_r}) = N \prod_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = N \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Ejemplo 1.4. La función de Möbius μ se define como

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n = p_1 \dots p_r \text{ con } p_i \text{ primos distintos,} \\ 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } p^2 | n \text{ para algún } p \text{ primo.} \end{cases}$$

A pesar de su arbitraria definición, esta función será de gran importancia.

A lo largo del artículo seguirán apareciendo más ejemplos de funciones aritméticas. Terminaremos esta primera subsección con el siguiente resultado que usaremos más adelante.

Proposición 1.5.
$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mathrm{I}(n).$$

Demostración. Vale para $n = 1$ pues $\mu(1) = 1$. Supongamos $n > 1$. Por el Teorema Fundamental de la Aritmética todo número natural mayor a 1 se descompone en producto de primos de manera única salvo el orden, por lo tanto existen $p_1, \ldots, p_k$ números primos (siempre los pensamos positivos) y $a_1, \ldots, a_k$ naturales tales que $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$. Luego, en la suma $\sum_{d|n} \mu(d)$ sólo sobreviven los términos $d = 1$ y los divisores de n que son producto de primos distintos (todos con exponente 1). Por lo tanto $\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \cdots + \mu(p_n) + \mu(p_1 p_2) + \cdots + \mu(p_{k-1} p_k) + \cdots + \mu(p_1 \ldots p_k) = 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0.$ □

1.2 Operaciones entre funciones aritméticas

Ahora le demos estructura de anillo al conjunto de todas las funciones aritméticas. Notemos que dos funciones aritméticas f y g inducen una tercera sumando punto a punto, es decir

$$(f + g)(n) := f(n) + g(n).$$

Esta operación junto con el elemento neutro definido idénticamente cero tiene estructura de grupo abeliano con opuesto $(-f)(n) = -f(n)$.

Con respecto al producto, podríamos definirlo de manera análoga a la suma, pero esta no es la operación que nos interesa. Definimos el *producto de Dirichlet* de la siguiente manera:

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right).$$

También se le denomina *convolución*. I es su elemento neutro ya que $(f * \mathrm{I})(n) = \sum_{d|n} f(d)\mathrm{I}(n/d) = f(n)$ pues $\mathrm{I}(n/d) = 0 \quad \forall\, d \neq n$.

Llamamos $\mathcal{A}$ al conjunto de funciones aritméticas. $\mathcal{A}$ munido de las operaciones $+$ y $*$ tiene estructura de anillo conmutativo sin divisores de cero, i.e. $\mathcal{A}$ es un dominio de integridad. Para probar esto sólo hay dos cuestiones no triviales: la asociatividad y la no existencia de divisores de ceros. La primera de éstas parece un tanto complicado, pero con un simple cambio de variables se simplifica:

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(n) &= \sum_{ad=n} f(a)\,(g*h)(d) = \sum_{ad=n} f(a) \sum_{bc=d} g(b)\,h(c)\\ &= \sum_{abc=n} f(a)\,g(b)\,h(c) = \cdots = ((f*g)*h)(n).\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $f, g \in \mathcal{A}$ no son idénticamente nulas, veamos que $f * g$ tampoco lo es. Existen $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) = 0 \quad \forall 1 \leq n < k$, $g(n) = 0 \quad \forall 1 \leq n < l$, y $f(k) \neq 0 \neq g(l)$. Entonces

$$(f*g)(kl) = \sum_{d|kl} f(d)g(kl/d) = f(k)g(l) \neq 0.$$

Ejemplo 1.6. La Proposición (1.5) se puede reescribir como $\mu * \mathbf{1} = \mathrm{I}$, por lo tanto μ es la inversa de $\mathbf{1}$.

Ejemplo 1.7. Probemos que $\mu * \mathrm{id} = \phi$. Notemos que por la Proposición (1.5), la función ϕ de Euler se puede escribir como

$$\phi(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|(n,k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|n,\, d|k} \mu(d).$$

Si fijamos un d divisor de n, tenemos que sumar sobre todos los k múltiplos de d entre 1 y n. Luego, si $k = qd$ tenemos

$$\phi(n) = \sum_{q=1}^{n/d} \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = (\mu * \mathrm{id})(n).$$

Para terminar con esta subsección, veamos dos resultados más.

Proposición 1.8. *Sea $f \in \mathcal{A}$. Entonces f tiene inversa en $\mathcal{A}$ si y sólo si $f(1) \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que existe g tal que $f * g = \mathrm{I}$, i.e. $\mathrm{I}(n) = (f * g)(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ resulta $1 = \mathrm{I}(1) = \sum_{d|1} f(d)\,g(n/d) = f(1)g(1)$ lo que implica que $f(1) \neq 1$.

Recíprocamente, supongamos que $f(1) \neq 0$. Definamos g por inducción, pero antes como ejemplo ilustrativo hagamos el caso $n = 2$:

$$0 = \mathrm{I}(2) = f(1)g(2) + f(2)g(1) \qquad \Longrightarrow g(2) = -\frac{f(2)g(1)}{f(1)}.$$

Probemos la fórmula recursiva $g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n,\, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$, para $n > 1$. Vimos que para $n = 2$ se cumple. Supongamos válida para $k < n$. Planteemos la ecuación $\mathrm{I}(n) = (f * g)(n)$:

$$0 = f(1)g(n) + \sum_{d|n,\, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Como los valores de $g(d)$ son conocidos para todo $d < n$, existe un único número $g(n)$ que la cumpla, y es precisamente el dado por la fórmula recursiva. □

Teorema 1.9 (Fórmula de Inversión de Möbius)**.** *Sean $f, g \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \iff g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Demostración. El lado derecho se puede reescribir como $f = g * \mathbf{1}$. Multiplicando por μ resulta $f * \mu = (g * \mathbf{1}) * \mu = g * (\mathbf{1} * \mu) = g * \mathrm{I} = g$. Recíprocamente, si $g = f * \mu$ entonces $g * \mathbf{1} = f * (\mu * \mathbf{1}) = f * \mathrm{I} = f$. □

Ejemplo 1.10. Como aplicación, realizando en $g = \phi$ y $f = \mathrm{id}$, resulta por el Ejemplo (1.7) la fórmula $\sum_{d|n} \phi(d) = n \quad \forall\, n$.

1.3 Funciones Multiplicativas

Definición 1.11. Una función aritmética f (no idénticamente nula) es llamada *multiplicativa* si

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{si } (m,n) = 1,$$

y *estrictamente multiplicativa* si

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \forall\, m, n.$$

En lugar de "estrictamente multiplicativa", también suele usarse "completamente multiplicativa" y "totalmente multiplicativa".

Ejemplo 1.12. Las funciones I, $\mathbf{1}$ y id obviamente son estrictamente multiplicativas.

Ejemplo 1.13. μ y ϕ son multiplicativas pero no estrictamente multiplicativas. La multiplicidad de μ es medianamente fácil (ejercicio). Con respecto a la de ϕ es inmediata luego de probar que $\mathbb{Z}^*_{mn} \simeq \mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n$ por la aplicación obvia (un poco más adelante explicaremos la notación $\mathbb{Z}^*_n$). Finalmente ninguna es estrictamente multiplicativa pues por ejemplo $\mu(4) = 0 \neq 1 = \mu(2)\mu(2)$ y $\phi(4) = 2 \neq 1 = \phi(2)\phi(2)$.

Seguimos presentando ejemplos de funciones aritméticas.

Ejemplo 1.14. La función divisor $\mathrm{d}(n)$ cuenta el número de enteros (positivos) que dividen a n, es decir

$$\mathrm{d}(n) = \sum_{d|n} 1.$$

La función suma de divisores $\sigma(n)$ suma precisamente los divisores de n, es decir

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

En general, para $\alpha \in \mathbb{C}$ definimos

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha.$$

Notemos que $\sigma_0 = \mathrm{d}$ y $\sigma_1 = \sigma$. Se ve fácilmente que σ_α es multiplicativa. También resultará como aplicación del próximo teorema que muestra que el producto de dos funciones multiplicativas es multiplicativas, pues $\sigma_\alpha = \mathbf{1} * \mathrm{id}^{(\alpha)}$, donde $\mathrm{id}^\alpha(n) = n^\alpha$.

Teorema 1.15. *1. Si f es multiplicativa entonces $f(1) = 1$.*

2. Si f y g son multiplicativas entonces $f * g$ y f^{-1} también lo son.

3. Si f es estrictamente multiplicativa entonces $f^{-1}(n) = \mu(n) f(n) \quad \forall\, n$.

4. El conjunto de funciones multiplicativas es un grupo abeliano con $*$.

Demostración. Ejercicio (ver [Ap]). □

Observación 1.16. Notar que el conjunto de funciones estrictamente multiplicativas no es un grupo abeliano pues el producto de dos no necesariamente lo es. Queda como ejercicio encontrar un contraejemplo.

El próximo ejemplo son los caracteres de Dirichlet que son funciones estrictamente multiplicativas. Éstas tendrán un gran protagonismo en la demostración del teorema de Dirichlet, en la Sección (3).

Definición 1.17. Si $n \in \mathbb{N}$, un *caracter de Dirichlet de módulo n* es una función $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ no idénticamente nula tal que

♣ $\chi(a+n) = \chi(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{N}$,

♣ $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{N}$,

♣ $|\chi(a)| = \begin{cases} 1 & \text{si } (a,n) = 1 \\ 0 & \text{si } (a,n) > 1 \end{cases}$.

Para obtener fáciles ejemplos de caracteres de Dirichlet vamos a repasar algunas cuestiones. Dado $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_n$ denota el anillo de los enteros módulo n, es decir, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y su suma y producto son módulo n. Por ejemplo si trabajamos con $n = 5$, tenemos que $1 + 2 = 3$, $3 + 4 = 2$, $4 * 4 = 1$. Notemos que existen divisores de cero, por ejemplo $2 * 3 = 0$ en $\mathbb{Z}_6$.

Si $a \in \mathbb{Z}_n$, entonces a es una unidad (i.e. tiene inverso: $\exists b \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \leq b < n$ y $ab = 1$) si y sólo si la ecuación de congruencias

$$ax \equiv 1 \quad (n)$$

tiene solución. Esto ocurre si y sólo si $(a, n)|1$ ($\iff$ $(a, n) = 1$). Luego, $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo (i.e. todo elemento no nulo tiene inverso) si y sólo si n es primo.

Denotaremos $\mathbb{Z}_n^*$ al conjunto de unidades de $\mathbb{Z}_n$ (tiene estructura de grupo abeliano con respecto al producto). Luego $\phi(n) = \#\mathbb{Z}_n^*$.

Si G es un grupo finito y abeliano, su grupo dual denotado $\widehat{G}$ es el conjunto de morfismos de G a $\mathbb{C}$. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{Z}}_n &= \{\lambda : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C} \,|\, \lambda(a+b) = \lambda(a)\lambda(b)\}, \\
\widehat{\mathbb{Z}}_n^* &= \{\lambda : \mathbb{Z}_n^* \to \mathbb{C} \,|\, \lambda(ab) = \lambda(a)\lambda(b)\}.
\end{aligned}$$

A cada $\lambda \in \widehat{\mathbb{Z}}_n^*$ le asociemos la función aritmética $\widetilde{\lambda}$ dada por el valor de λ en su residuo módulo n en caso que sea coprimo con n, y extendiéndola con 0 en todo elemento no coprimo a n. Es decir

$$\widetilde{\lambda}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n, a) \neq 1, \\ \lambda(r) & \text{si } (n, a) = 1 \text{ y } a = qn + r \text{ con } 0 \leq r < n. \end{cases}$$

Se ve fácilmente que $\widetilde{\lambda}$ es un caracter de Dirichlet de módulo n. Recíprocamente, si $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ es un caracter de Dirichlet de módulo n, induce $\widetilde{\chi} : \mathbb{Z}_n^* \to \mathbb{C}$ morfismo de grupos abelianos. Estas aplicaciones son inversas una de la otra, y por lo tanto biyectivas. Con esto queremos notar que es equivalente pensar a las series de Dirichlet de cierto módulo n como elementos del grupo dual de $\mathbb{Z}_n^*$.

Por lo tanto el conjunto de los caracteres de Dirichlet de módulo n forma un grupo, el cual tiene $\chi(n)$ elementos. Su elemento identidad lo llamaremos el caracter principal, y lo denotaremos χ_0. Obviamente

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } (a, n) = 1, \\ 0 & \text{si } (a, n) > 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Para terminar con esta sección probemos la siguiente proposición que usaremos en la demostración del Teorema de Dirichlet en la Subsección (3.2).

Proposición 1.18 (Relaciones de Ortogonalidad)**.** *Si* χ_1, χ_2 *son caracteres de Dirichlet de módulo* n*, entonces*

$$\sum_{0 \leq a < n} \chi_1(a)\overline{\chi_2(a)} = \begin{cases} \phi(n) & \text{si } \chi_1 = \chi_2, \\ 0 & \text{si } \chi_1 \neq \chi_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Si a, b *son elementos de* $\mathbb{Z}$*, entonces*

$$\sum_{\chi} \chi(a)\overline{\chi(b)} = \begin{cases} \phi(n) & \text{si } a = b, \\ 0 & \text{si } a \neq b. \end{cases} \tag{1.3}$$

(La suma es sobre todos los caracteres de Dirichlet de módulo n*.)*

Demostración. Quedan como ejercicio para el lector. □

2 Series de Dirichlet

En esta sección estudiaremos las series de Dirichlet vistas como funciones. Hallaremos su región de convergencia, demostraremos su analiticidad, etc.. Además, al igual que con las funciones aritméticas, las series de Dirichlet tienen estructura de anillo, e interconectaremos estas operaciones con las de $\mathcal{A}$.

Por último estudiaremos los productos de Euler, los cuales escriben a una serie de Dirichlet como un producto infinito.

2.1 Definición y ejemplos

Definición 2.1. Una *serie de Dirichlet* es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

con f una función aritmética y $s \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.2. Como ya dijimos en la introducción, la función zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}(n)}{n^s}$$

es una serie de Dirichlet.

Ejemplo 2.3. Las series de Dirichlet asociadas a caracteres de Dirichlet son llamadas L-series, y se denotan $L(s, \chi)$ donde χ es un caracter de Dirichlet.

2.2 Convergencia y analiticidad

En adelante veremos a las series de Dirichlet como funciones sobre $\mathbb{C}$. Comenzaremos a estudiar su dominio, i.e. su región de convergencia, y luego examinaremos sus propiedades analíticas.

Al igual que Riemann y la mayoría de la bibliografía sobre el tema, denotaremos $s = \sigma + it$ a un número complejo donde σ y t son números reales.

Notemos que si tenemos $s \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma \geq a(\in \mathbb{R})$, entonces vale $|n^s| = |n^\sigma n^{it}| = |n^\sigma||e^{it\log n}| = |n^\sigma| \geq n^a$. Por lo tanto

$$\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \frac{|f(n)|}{n^a},$$

lo cual implica que si una serie de Dirichlet converge absolutamente para cierto $s_0 = a + ib$ (i.e. $\sum \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| < \infty$), entonces también lo hace para todo s con $\sigma \geq a$. Resulta inmediato el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Para toda serie de Dirichlet $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ que no converge absolutamente en todo $\mathbb{C}$ y tampoco no lo hace en todo $\mathbb{C}$, existe $\sigma_a \in \mathbb{R}$ tal que la serie converge absolutamente para todo s con $\sigma > \sigma_a$, y no lo hace para todo $\sigma < \sigma_a$.*

Observación 2.5. Dicho σ_a se lo denomina *abscisa de convergencia absoluta.* En caso que la serie convergiera absolutamente en todo $\mathbb{C}$ se define $\sigma_a = -\infty$, y si no lo hiciera en ningún punto de $\mathbb{C}$, $\sigma_a = +\infty$.

Ejemplo 2.6. Por cálculo sabemos que la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^\sigma}dx$ converge si $\sigma > 1$ y diverge si $\sigma \leq 1$. Por el método de comparación con la integral resulta que la serie $\zeta(s)$ converge absolutamente para $\sigma > 1$. Además sabemos que la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge por lo tanto $\sigma_a = 1$ para $\zeta(s)$.

Este ejemplo es un caso particular de la siguiente proposición.

Proposición 2.7. *Si f es una función aritmética acotada, i.e. $|f(n)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma > 1$. Por lo tanto $\sigma_a \leq 1$.*

Demostración. Se demuestra de manera similar a la prueba del ejemplo anterior. □

Ejemplo 2.8. Sea χ un caracter de Dirichlet de cualquier módulo n. Desde que $|\chi(n)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $\sigma_a \leq 1$ para $L(s, \chi)$. Se prueba que $\sigma_a = 1$.

Análogamente a la existencia de una abscisa y un semiplano de convergencia absoluta, existe una abscisa y un semiplano de convergencia. Esto se prueba con un poco más de trabajo, y se puede encontrar en [Ap, Thm11.9] o en [HST, Ch4,Prop14]. Lo resumimos en la siguiente serie de teoremas.

Teorema 2.9. *Para toda serie de Dirichlet $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ que no converge en todo $\mathbb{C}$ ni diverge en todo $\mathbb{C}$, existe $\sigma_c \in \mathbb{R}$ tal que la serie converge para todo s con $\sigma > \sigma_c$, y diverge si $\sigma < \sigma_c$.*

Observación 2.10. $\sigma_a = -\infty$ o $\sigma_c = +\infty$ si la serie converge o diverge en todo $\mathbb{C}$ respectivamente. A σ_c se lo denomina *abscisa de convergencia.*

Ejemplo 2.11. Para $\zeta(s)$ vale $\sigma_c = \sigma_a = 1$. Si $F(s) = \sum(-1)^n n^{-s}$, entonces $\sigma_a = 1$ al igual que $\zeta(s)$, pero $\sigma_c = 0$ pues $\sum(-1)^n n^{-\epsilon}$ converge para todo $\epsilon > 0$, y no lo hace en $s = 0$ ya que $\sum(-1)^n$ diverge. Este es un caso particular de la siguiente proposición.

Proposición 2.12. *Si f es una función aritmética tal que la suma $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ es acotada, entonces $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ converge para $\sigma > 0$, i.e. $\sigma_c \leq 0$.*

Ejemplo 2.13. Supongamos que χ es un caracter de Dirichlet de módulo N distinto a χ_0. Por la ecuación (1.2) de las relaciones de ortogonalidad, resulta $\sum_{n=l}^{l+N} \chi(n) = 0$ por lo tanto $|\sum_{n=l}^{l} \chi(n)| \leq \phi(N)$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Luego, aplicando la proposición resulta que $L(s,\chi)$ tiene $\sigma_c \leq 0$. Pero obviamente $L(s,\chi)$ no converge para cualquier $\sigma < 0$ pues $\chi(n)n^{-\sigma}$ ni siquiera tiende a cero cuando n tiende a infinito. Lo cual implica $\sigma_c = 0$.

Teorema 2.14. *Para toda serie de dirichlet $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ se cumple*

$$\sigma_a - 1 \leq \sigma_c \leq \sigma_a.$$

Ahora queremos estudiar su analiticidad, pero es necesario algunos resultados referidos a su convergencia uniforme.

Proposición 2.15. *Una serie de Dirichlet $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ converge uniformemente sobre todo s tal que $\sigma \geq \sigma_c + \epsilon$ donde $\epsilon > 0$. En particular converge uniformemente sobre compactos en* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c$.

Esta proposición junto con el teorema de convergencia de Weierstrass (ver [Con, ChVII,§2,Thm2.1]) de variables complejas, implican que una serie de Dirichlet es analítica en su dominio, y su derivada resulta de derivar término a término.

Teorema 2.16. *Sea $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ una serie de Dirichlet. Entonces $F(s)$ es analítica en $\sigma > \sigma_c$, y su derivada es*

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\log(n)}{n^s} \quad \sigma > \sigma_c. \tag{2.1}$$

Para finalizar esta subsección, enunciaremos el Lema de Landau.

Lema 2.17 (Landau). *Si $f(n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y si la serie de Dirichlet $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ tiene abscisa de convergencia σ_c finita, entonces $F(s)$ no puede ser extendida analíticamente alrededor de $s = \sigma_c$. En particular cualquier continuación meromorfa de $F(s)$ en $s = \sigma_c$ debe tener un polo en $s = \sigma_c$.*

Ejemplo 2.18. Por ejemplo, la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ se extiende primero a $\sigma > 0$, y luego a todo $\mathbb{C}$ por medio de una ecuación funcional, a una función meromorfa. Ésta tiene exactamente un polo de orden 1 precisamente en $s = \sigma_c = 1$, con residuo 1. El método de extensión se encuentra en muchos libros, en particular en [HST, Ch4,Prop17].

2.3 Operaciones entre series de Dirichlet

Dadas dos series de Dirichlet $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ y $G(s) = \sum g(n)n^{-s}$ convergentes para $\sigma > a$, es claro que $\sum(f(n) + g(n))n^{-s}$ también es una serie de Dirichlet convergente para $\sigma > a$, y para cada s tal que $\sigma > a$ vale

$$F(s) + G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f(n) + g(n))}{n^s}.$$

Por lo tanto la suma de funciones aritméticas se traduce en suma de series de Dirichlet.

Por otro lado, cuando multiplicamos dos series de Dirichlet resulta, para $\sigma > a$

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(f(m))}{m^s}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g(n))}{n^s}\right) = \sum_{m,n} \frac{f(m)g(n)}{(mn)^s} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{mn=k} f(m)g(n)\right)k^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m|k} f(m)g(k/m)\right)k^{-s} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((f * g)(k))}{k^s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la multiplicación de Dirichlet de funciones aritméticas se traduce en la multiplicación de series de Dirichlet. Aquí se entiende el porqué de la definición un tanto antinatural del producto entre funciones aritméticas. Luego, el espacio de todas las series de Dirichlet forma un anillo.

Recordemos que $\zeta(s)$ es inducida por la función aritmética completamente multiplicativa $\mathbf{1}$ y que por el ítem (3) del Teorema (1.15) sabemos que $\mathbf{1}^{-1}(n) = \mu(n)\mathbf{1}(n)$. Por lo tanto

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad \text{si } \sigma > 1.$$

En particular $\zeta(s) \neq 0$ si $\sigma > 1$. Al igual que esta última fórmula se pueden obtener muchas más. Listamos algunas.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L(s,\chi)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s} \qquad \text{si } \sigma > 1,\\
\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} \qquad \text{si } \sigma > 2,\\
\zeta(s)\zeta(s-\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} \qquad \text{si } \sigma > \max\{1, 1+\mathrm{Re}(s)\}.
\end{aligned}$$

2.4 Producto de Euler

Los productos de Euler escriben a las series de Dirichlet como un producto infinito en una cierta región. Los casos más comunes son cuando la respectiva función aritmética es multiplicativa o estrictamente multiplicativa. Existen más productos de Euler con criterios más débiles para las funciones aritméticas, pero no está entre nuestros objetivos extendernos en este tema.

Teorema 2.19. *Sea $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ una serie de Dirichlet con $\sigma_a \in \mathbb{R}$. Si f es multiplicativa entonces*

$$F(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right) \quad \textit{si } \sigma > \sigma_a, \tag{2.2}$$

y si es completamente multiplicativa entonces

$$F(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}\right) \quad \textit{si } \sigma > \sigma_a. \tag{2.3}$$

En ambos casos el producto es llamado *producto de Euler*. Su demostración requiere por empezar, la definición formal de productos infinitos, la cual se puede encontrar en [Con, CheVII§5]. Nos parece importante tener al menos una idea.

Fijemos s con $\sigma > \sigma_a$. Denotemos para cada p primo, $A_p = 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots$ por lo que si f es multiplicativa entonces

$$F(s) = \prod_p A_p = A_2 A_3 A_5 \dots.$$

Hagamos informalmente lo siguiente. Cada serie A_p comienza con 1, y si los multiplicamos resulta 1. Ahora $\frac{f(2)}{2^s}$ aparece en A_2, y si a éste lo multiplicamos por los elementos 1 de cada A_p $(p \neq 2)$ resulta $\frac{f(2)}{2^s}$. Ídem con $\frac{f(3)}{3^s}$, $\frac{f(2^2)}{2^{2s}}$ y $\frac{f(5)}{5^s}$. Si elegimos $\frac{f(2)}{2^s}$ en A_2, $\frac{f(3)}{3^s}$ en A_3 y 1 en A_p para todo $p > 3$ resulta $\frac{f(2)}{2^s}\frac{f(3)}{3^s} = \frac{f(6)}{6^s}$ pues f es multiplicativa. Siguiendo así, por el Teorema Fundamental de la Aritmética que afirma que todo natural se descompone de manera única salvo orden en producto de primos, resultan todos los $\frac{f(n)}{n^s}$ con $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto vale la fórmula (2.2).

Con respecto a la fórmula (2.3), resulta fácilmente de aplicar $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$ para $|z| < 1$, a (2.2), realizando en $z = \frac{f(p)}{p^s}$ pues $\frac{f(p^n)}{p^{ns}} = \left(\frac{f(p)}{p^s}\right)^n$ desde que f es completamente multiplicativa.

Ejemplo 2.20. En el caso de $\zeta(s)$ resulta que $\sum n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ si $\sigma > 1$. Algunos otros productos de Euler que resultan del de $\zeta(s)$ son:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1-p^{-s}) \quad \sigma > 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}} \quad \sigma > 2.$$

Ejemplo 2.21. Sea χ un caracter de Dirichlet de módulo N. Desde que χ es completamente multiplicativa, vale

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} \quad \sigma > 1.$$

En el caso $\chi = \chi_0$ se cumple $\chi_0(p) = \begin{cases} 1 & p \nmid N \\ 0 & p \mid N \end{cases}$, por lo tanto su producto de Euler es

$$L(s,\chi_0) = \prod_{p\nmid N} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p\mid N}(1-p^{-s}) = \zeta(s)\prod_{p\mid N}(1-p^{-s}). \quad (2.4)$$

Así, $L(s,\chi_0)$ es igual a la zeta de Riemann multiplicada por un número finito de factores.

3 Aplicaciones

Aquí mostraremos una hermosa aplicación de las series de Dirichlet, y un buen ejemplo de como trabaja la Teoría Analítica de Números.

Sabemos hace más de dos mil años que existen infinitos primos, pero muy poco de cómo se ubican en $\mathbb{N}$. Por ejemplo, ni si quiera tenemos una sucesión explícita $\{p_n\}$ de infinitos primos distintos. Por esto es famosa la carrera de conseguir el primo más grande. En marzo del 2008 se encontró el número primo más grande hasta ahora: $2^{32.582.657} - 1$ (ver [Wiki, "Largest known prime"]). Este número tiene 9.808.358 dígitos y es el 44$^{\text{o}}$ primo de Mersenne. Los primos de Mersenne son de la forma $2^n - 1$ con $n \in \mathbb{N}$ (ver [Wiki, "Mersenne prime"]).

Por otro lado, fijado $N \in \mathbb{N}$, sabemos por el algoritmo de la división que todo número $n \in \mathbb{N}$ se escribe de la forma $n = qN + r$ con $0 \leq r < N$. Es claro que si $d = (r, N) > 1$ ningún número de la forma $qN + r \quad q \in \mathbb{N}_0 (= \mathbb{N} \cup \{0\})$ puede ser primo (excepto los divisores de N) ya que $d | qN + r$. Entonces, todos los números primos excepto los divisores de N deben escribirse de la forma $qN + r$ con $(r, N) = 1$.

Por ejemplo si $N = 6$, todos los primos distintos a 2 y 3 se escriben de la forma $6q + 1$ o $6q + 5$ con $q \in \mathbb{N}_0$. Atención: ¡No es cierto que todo número de estas formas es primo!. Por ejemplo $6 \times 4 + 1 = 25$ no es primo. Si $N = 12$ todos los primos están en alguna de las siguientes 4 columnas.

$12q+1$	$12q+5$	$12q+7$	$12q+11$
1	**5**	**7**	**11**
13	**17**	**19**	**23**
25	**29**	**31**	35
37	**41**	**43**	**47**
49	**53**	55	**59**
61	65	**67**	**71**
73	77	**79**	**83**
85	**89**	91	95
97	**101**	**103**	**107**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Una pregunta que uno puede hacerse es la siguiente: desde que hay infinitos números primos, fijado $N \in \mathbb{N}$ ¿hay infinitos primos en cada columna? Es decir, para cada r tal que $(r, N) = 1$ y $0 \leq r < N$, ¿hay infinitos primos de la forma $qN + r$ con $q \in \mathbb{N}$? Esta pregunta fue conjeturada por Gauss, y respondida afirmativamente por Dirichlet en el año 1837, usando L-series.

Demostrar este teorema es nuestro último objetivo. Además en la Subsección 3.3 daremos algunas generalizaciones y otros teoremas atacados dentro de la teoría analítica de números.

3.1 L-series

En esta subsección demostraremos algunas cuestiones analíticas que serán usadas para demostrar el Teorema de Dirichlet. Será necesario por parte del lector, el conocimiento básico de la teoría de funciones complejas.

Primero mezclaremos resultados de analiticidad y productos de Euler aplicándolos a las L-series. Antes debemos definir esta nueva función aritmética.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^j \text{ con } p \text{ primo,} \\ 0 & \text{otros } n. \end{cases}$$

Ésta es llamada función de Mangoldt, que juega un rol central en la distribución de los primos. Se ve relativamente fácil que

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d), \quad \text{ i.e. } \log = \Lambda * \mathbf{1}.$$

Teorema 3.1. *Si $\chi = \chi_0$ (ver ecuación (1.1) en página 9), entonces $L(s, \chi)$ es analítica para $\sigma > 0$. Por otro lado, la función $L(s, \chi_0)$ tiene una continuación meromorfa a este mismo semiplano, con un único polo en $s = 1$ con residuo $\phi(N)/N$.*

Demostración. Para $\chi = \chi_0$, recordemos la ecuación (2.4) que dice $L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|N}(1 - p^{-s})$. Luego, como mencionamos en el Ejemplo (2.18) aunque no lo probamos, la función zeta de Riemann se puede extender a una función meromorfa en $\sigma > 0$ con exactamente un polo de orden 1 en $s = 1$, con residuo 1. Por lo tanto $L(s, \chi_0)$ también puede extenderse y su polo en $s = 1$ tendrá residuo $\prod_{p|N}(1 - p^{-1}) = \phi(N)/N$ por lo mencionado en el Ejemplo (1.3).

Con respecto al caso $\chi \neq \chi_0$, vimos en el Ejemplo (2.13) que $L(s, \chi)$ converge para $\sigma > 0$, y por el Teorema (2.16) es analítica en $\sigma > 0$. □

Proposición 3.2. *Sea χ un caracter de Dirichlet de módulo N. Entonces se cumple para $\sigma > 1$*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \tag{3.1}$$

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}. \tag{3.2}$$

Demostración. Ambas son muy similares. Nosotros sólo usaremos (3.2) por lo que a la restante no la demostraremos. Tenemos $L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$

desde el Ejemplo (2.21). Entonces

$$
\begin{aligned}
-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} &= -\frac{d}{ds}\left(\log L(s,\chi)\right) = \frac{d}{ds}\left(\sum_p \log\left(1-\chi(p)/p^s\right)\right) \\
&= \sum_p \frac{\chi(p)}{1-\chi(p)/p^s}\frac{\log p}{p^s} = \sum_p \frac{\log p}{p^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\chi(p)^{k+1}}{p^{ks}} \\
&= \sum_p \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi(p^k)\log p}{p^{ks}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}.
\end{aligned}
$$

□

3.2 Teorema de Dirichlet

Usaremos la notación de congruencias. Decimos que $a \equiv b \pmod{N}$ si $N|\,a-b$. Notemos que n es de la forma $qN+r$ si y sólo si $n \equiv r \pmod{N}$.

Teorema 3.3 (Teorema de Dirichlet)**.** *Sean $N, a \in \mathbb{N}$. Si $(N,a)=1$ existen infinitos números primos $p \equiv a \pmod{N}$.*

Comenzamos desde este enunciado el cual pertenece a la teoría elemental de números y luego pasaremos a afirmaciones equivalentes, cada vez “más analíticas”.

Es claro que el Teorema (3.3) es equivalente a

$$\sum_{p\equiv a \,(\text{mód}\, N)} \frac{\log p}{p} = \infty, \tag{3.3}$$

donde la suma es sobre todos los números primos congruentes a a módulo N.

Para mostrar esto introduzcamos la sumación de Λ,

$$\sum_{n\equiv a\,(\text{mód}\, N)} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p\equiv a\,(\text{mód}\, N)} \frac{\log p}{p} + \sum_{k\geq 2}\sum_{p^k\equiv a\,(\text{mód}\, N)} \frac{\log p}{p^k}.$$

Pero notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 2}\sum_{p^k\equiv a\,(\text{mód}\, N)} \frac{\log p}{p^k} &\leq \sum_p\sum_{k\geq 2}\frac{\Lambda(p^k)}{p^k} = \sum_p \log(p)\sum_{k\geq 2} p^{-k} \\
&\leq \sum_p \log(p)p^{-2}\sum_{k\geq 0}p^{-k} = \sum_p \log(p)p^{-2}\frac{1}{1-p^{-1}} \\
&\leq \sum_p \frac{\log(p)}{p(p-1)} < \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto (3.3) se cumple si y sólo si

$$\sum_{n\equiv a\,(\text{mód}\,N)} \frac{\Lambda(n)}{n} = \infty. \tag{3.4}$$

El objetivo es probar (3.4). Sea $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ a la función aritmética dada por $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n \equiv a \pmod N \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$, entonces

$$\sum_{n\equiv a\,(\text{mód}\,N)} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n}\delta(n). \tag{3.5}$$

En este momento ingresan las series de Dirichlet a tomar el protagonismo. Denotando $\Lambda\delta$ a la función aritmética que valuada en n es $\Lambda(n)\delta(n)$, le asignamos su correspondiente serie de Dirichlet $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\delta(n)}{n^s}$. Obviamente la fórmula (3.5) es la evaluación en $F(s)$ de $s = 1$, i.e. (3.4) es cierta si y sólo si F diverge en 1.

Por las relaciones de ortogonalidad vista en la Subsección (1.3), tenemos $\delta(n) = \frac{1}{\phi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)}\chi(n)$. Luego $F(s)$ se convierte en

$$\begin{aligned} F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\delta(n) &= \frac{1}{\phi(N)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)}\chi(n) \\ &= \frac{1}{\phi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} \\ &= -\frac{1}{\phi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \qquad \sigma > 1, \end{aligned}$$

por Proposición (3.2).

Como $L(s,\chi_0)$ tiene un polo simple en $s = 1$, la función $\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)}$ también tiene un polo simple, pero con residuo -1. Entonces

$$\lim_{s\to 1^+} \frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)} = \infty.$$

Finalmente, si probamos que

$$\lim_{s\to 1} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \quad \text{existe } (\neq \infty), \tag{3.6}$$

para todo $\chi \neq \chi_0$ estaríamos diciendo que $F(s)$ diverge en $s = 1$ y completando la demostración.

Como $L(s, \chi)$ es analítica en $\sigma > 0$ por Teorema (3.1) desde que $\chi \neq \chi_0$, es suficiente probar que $L(1, \chi) \neq 0$.

Teorema 3.4. *Si $\chi \neq \chi_0$ entonces $L(1, \chi) \neq 0$.*

Repasando, hemos traducido el Teorema de Dirichlet (3.3) del lenguaje elemental del anillo de enteros, al Teorema (3.4) el cual pertenece al análisis complejo.

Desgraciadamente no expondremos su demostración, pero la pueden encontrar en [BD, Ch9,Sec4] y en [MV, Ch4,Sec3] (la mayoría de los libros prueban para trabajos más generales, que $L(s, \chi)$ no se anula en ningún punto de $\sigma = 1$). De todas maneras estamos conformes al mostrarles como un enunciado elemental resulta de un teorema de funciones analíticas.

3.3 Generalizaciones

Otro de los resultados más importantes de la Teoría Analítica de Números es el Teorema del Número Primo. Éste afirma que la cantidad de primos menores o iguales a x es asintótico para $x \mapsto \infty$ a $\frac{x}{\log x}$. Es decir, si $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ con p primo, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Este teorema fue conjeturado independientemente por Gauss y Legendre, y demostrado independientemente por Hadamard y Vallée Poussin, ambos a finales del siglo 19. Similar al Teorema de Dirichlet, el enunciado se traduce a afirmaciones equivalentes y resulta como corolario de $\zeta(s) \neq 0$ en la recta $\sigma = 1$. Existe una prueba elemental, es decir sin usar funciones complejas, realizada por Selberg y Erdős, pero es demasiada intrincada (palabra textual de varios libros).

La generalización de este teorema a progresiones aritméticas es llamado el Teorema del Número Primo para Progresiones Aritméticas. Al igual que en el caso del teorema del número primo en donde se indica cómo crece la cantidad de primos sabiendo que hay infinitos, el teorema aplicado a las progresiones aritméticas se interesa en indicar cómo crecen la cantidad de primos congruentes a un cierto a módulo N (a y N coprimos), sabiendo que hay infinitos (por el Teorema de Dirichlet).

Fijados a y N naturales coprimos, llamamos $\pi_{a,N}(x) = \sum_{p \equiv a \pmod{N}} 1$, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi_{a,N}(x)}{\frac{1}{\phi(N)} \dfrac{x}{\log x}} = 1.$$

Esto se traduce a que en cada progresión aritmética $qN + a$ con $q \in \mathbb{N}$, hay la "misma" cantidad de primos, es decir, hay $\frac{1}{\phi(N)}$ del total.

Referencias

[Ap] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag (1976).

[BD] Paul T. Bateman, Harold G Diamond. *Analytic Number Theory. An Introductory Course.* World Scientific (2004).

[Con] John B. Conway. *Funtions of One Complex Variable.* Springer-Verlag (1978, Second Edition).

[HST] E. Hlawka, J. Schoißengeier, R. Taschner. *Geometric and Analytic Number Theory.* Springer-Verlag (1991).

[MV] Hugh L. Montgomery, Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory: I. Classical Theory.* Cambridge studies in advanced mathematics (2006).

[Wiki] *Wikipedia.* www.wikipedia.org.

Emilio Lauret
CIEM-Conicet
Facultad de Matemática Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
elauret@mate.uncor.edu.