Título: **"La espiral de Arquímedes en un proyecto de modelación matemática"**
Autor: Nélida Aguirre
Institución: Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)
Dirección: Enlace Rutas 8 y 36 Km. 606- Río IV- Provincia de Córdoba - República Argentina
Teléfono: 0358- 4676228 ; e-mail: nvaguirre@exa.unrc.edu.ar

Palabras claves: modelos matemáticos – trabajo en proyectos – espiral de Arquímedes
Nivel de enseñanza: universitaria
Sesión: B
Forma de presentación: comunicación oral

INTRODUCCIÓN

En los últimos años la modelación aparece como uno de los temas prioritarios en Congresos, Simposios y Encuentros que sobre Educación Matemática se han realizado y en la literatura se encuentran disponibles diversos textos, cada uno de ellos concentrados en el desarrollo de clases particulares de modelos. Existen razones para afirmar que los modelos matemáticos y la modelación deberían tener una presencia significativa en la enseñanza de las matemáticas, particularmente en relación con los niveles superiores del sistema educativo. Estas razones están basadas en el hecho de que las actividades de modelación brindan a los estudiantes la oportunidad de aplicar matemáticas a situaciones de la vida real que implican:

- establecer conexiones con otras disciplinas,
- relacionar diferentes áreas de conocimiento, permitiendo ver las matemáticas como un todo coherente,
- usar herramientas matemáticas en situaciones en donde la elección de un algoritmo o un método de solución no es obvio,
- apreciar tanto la potencia de las matemáticas como sus limitaciones.

La enseñanza de modelos matemáticos requiere destinar cierto tiempo al proceso mismo de modelación, que incluye la identificación de variables, formulación y resolución de un modelo, interpretación de soluciones y comunicación de resultados, siendo la validación una componente esencial en dicho proceso.
En modelación, los estudiantes se sienten motivados a buscar patrones, asumir regularidades, desarrollar y contrastar ideas, así como a dar razones o argumentos si ellos reconocen la necesidad de disponer de un modelo para la solución de un problema.
Para que los estudiantes aprendan a modelar situaciones matemáticamente y a usar técnicas estadísticas y soporte informático para analizar modelos, las actividades deben ser seleccionadas de tal manera que, por aproximaciones sucesivas, obtengan la mejor respuesta o la más aproximada a las condiciones planteadas.
El trabajo con modelos será exitoso en la medida que los estudiantes sean capaces de abstraer el modelo de las situaciones en las cuales puede usarlo. Para adquirir esta habilidad, en primer lugar, deben apropiarse de los conceptos matemáticos necesarios para abordar la construcción del modelo. Al mismo tiempo, estos conceptos les proveerán las bases para la modelación e investigación de otros fenómenos de la vida real. De esta manera, el proceso de aprendizaje tiene un carácter iterativo y complementario a la vez.
Ahora bien, *¿cómo crear situaciones de enseñanza en las que se les permita a los estudiantes construir, analizar y criticar modelos matemáticos por sí mismos con el docente actuando como guía?*
Es posible incluir en un currículum de matemática diversas situaciones que vinculen las matemáticas a la realidad a través de la modelación y las mismas pueden ser organizadas como experiencias de aprendizaje en muy diversas formas. Una de estas formas, no necesariamente la única, es el trabajo en *proyectos*. El significado de *proyecto* que es adoptado en este trabajo cumple las siguientes características generales:

- es una clase de tarea o actividad diseñada por el docente que realizan los estudiantes *individualmente* o en *grupos* y puede desarrollarse en forma total en *clase,* o totalmente *extra-clase* o ser una mixtura de estas dos modalidades,
- puede consistir en un problema bien definido o un conjunto de problemas interrelacionados con un creciente nivel de abstracción o complejidad,
- implica, ya sea extender o realizar enfoques alternativos de un fenómeno trabajado con anterioridad y para el cual el modelo que lo describe ya ha sido analizado, o bien, estudiar un nuevo sistema para lo cual el estudiante debe crear el modelo más adecuado.

En todos los casos se requiere que cada estudiante lleve a cabo una tarea de reflexión o de investigación matemática y comunique los resultados o conclusiones obtenidos a través de reportes escritos y/o exposición oral. Por lo general, los estudiantes deben definir las variables importantes, simplificar situaciones complejas, formular e interpretar modelos matemáticos, utilizar recursos disponibles, incluir soporte informático, buscar, sintetizar y analizar información, organizar y comunicar ideas matemáticas y resultados, haciendo una evaluación crítica de los mismos.
En este trabajo se presenta una propuesta de proyecto a desarrollar por estudiantes del profesorado en matemática que cursan el tercer año de su carrera. Con la propuesta se intenta ilustrar lo dicho anteriormente.
Tres cuestiones fueron consideradas esenciales en la elección del Proyecto:
1) debía ser un problema extraído de la vida real y que fuera capaz de despertar el interés de los estudiantes,
2) las matemáticas emergentes debían ser conocidas o bien factibles de ser aprendidas si era necesario,
3) debía involucrar una variedad de acciones: formulación de modelos, discusiones, resoluciones, visitas, uso de computadora, investigación, lectura, reportes. Y como se pretendía imprimir cierto dinamismo, también el tipo de trabajo debía ser variado: individual, grupal, en clase, extra clase.

Se eligió como tema de trabajo el diario por tratarse de un medio informativo y de opinión, que está presente en nuestra vida doméstica, forma parte de nuestra cultura y los conocimientos matemáticos involucrados son acordes a la altura del plan de estudios de la carrera con que se encuentran los estudiantes, futuros profesores de matemática.
A continuación, se describe la propuesta de proyecto. En ella los estudiantes deben crear el modelo, seleccionar métodos de resolución y obtener por sí mismos información sobre los datos que les permitirá resolver la situación planteada.

PROYECTO

A) Introducción

En Río Cuarto, "Puntal" es un periódico matutino de salida diaria, fundado el 9 de agosto de 1980, con una tirada promedio de ocho mil ejemplares de lunes a sábado y diez mil los domingos que se distribuyen en la ciudad y en una amplia región de la provincia de Córdoba. En este Proyecto nos centraremos a considerar un elemento que resulta esencial en la emisión de un diario: el papel periódico. La empresa periodística recibe el papel enrollado en bobinas, con un ancho que cumple con los requerimientos de la empresa los cuales están relacionados fundamentalmente con la tecnología disponible.
El nuevo encargado de compras necesita disponer de información a los fines de contar en depósito con la cantidad de bobinas necesarias sin que ocurran faltantes. Sus inquietudes son:

a) ¿qué cantidad estimada de papel se utilizará en la tirada de los días domingos?, ¿cuántas bobinas de papel son necesarias?, *b) si se dispone de cincuenta y dos bobinas de papel, ¿alcanzará para cubrir la tirada de dos semanas?*

¿Qué repuesta se podrá dar a las inquietudes planteadas?

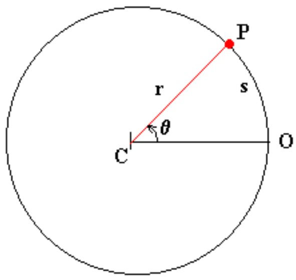
A continuación se presentan los pasos a seguir, divididos por etapas, para obtener un modelo que permita estimar la longitud de una bobina de papel y así poder dar respuesta a los interrogantes planteados por el nuevo encargado de compras.

B) Desarrollo

Etapa 1: *Primeros pasos en la construcción del modelo*

Se sabe que la empresa recibe papel periódico enrollado en bobinas. Observemos que existe una similitud entre el movimiento realizado para enrollar el papel en el cilindro que lo contiene y el movimiento circular realizado por un móvil que se mueve en una trayectoria dada por una circunferencia.

Recordemos de la Física *(Figura 1)* que si en un instante t un móvil se encuentra en un punto P, su posición angular viene dada por el ángulo θ que forma el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O, y en donde θ es el cociente entre la longitud de arco s y el radio de la circunferencia r. Es decir, la posición angular está dada por:



$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (1)$$

Figura 1

Cada vez que el papel da una vuelta completa en el cilindro, el ángulo θ se incrementa en 2π y el radio del cilindro se incrementa una cantidad h que está dada por el espesor del papel. Usando un argumento de proporcionalidad, si el ángulo se incrementa en $\delta\theta$, entonces el radio se incrementa en

$$\delta r = \frac{h\,.\,\delta\theta}{2\pi}$$

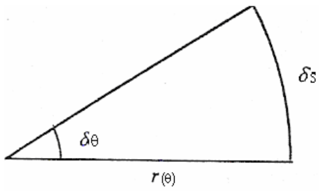


Figura 2

En el límite, cuando $\delta\theta$ tiende a cero, se tiene la ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{2\pi}$$

la cual tiene como solución:

$$\boxed{r(\theta) = \frac{h}{2\pi}\theta + r_0} \qquad (2)$$

en donde r_0 es el radio cuando $\theta = 0$.

Etapa 2: *Reconocimiento gráfico de la ecuación (2)*

Hasta aquí se ha obtenido una ecuación que refleja la relación entre el radio r y el ángulo θ.
Una buena estrategia, aplicable a la mayoría de los casos en que se está tratando de construir un modelo matemático, es la de apoyar el trabajo mediante la elaboración de un gráfico, lo cual suele proporcionar una buena idea de qué modelos matemáticos podrían ser más adecuados.
Así, al graficar (2) en un sistema de coordenadas polares, utilizando el comando *POLAR(THETA, RHO)* del programa informático *Matlab* con θ variando de 0 a 20π radianes con pasos de longitud 0.1 y *RHO = r,* se obtiene la siguiente curva que se conoce con el nombre de *espiral de Arquímedes*:

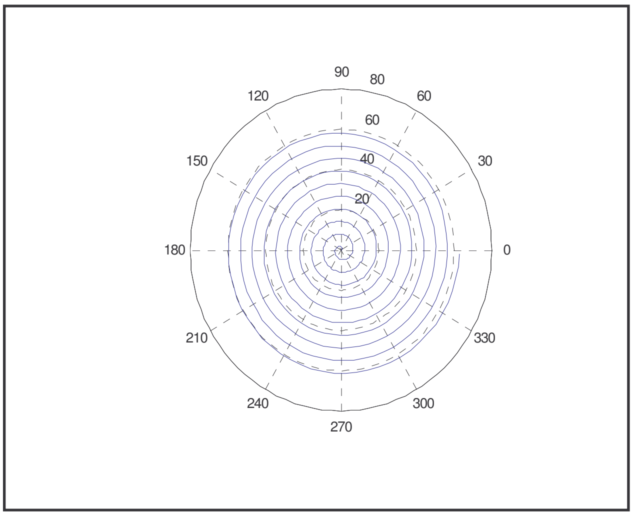


Gráfico 1

Nuestro objetivo será encontrar entonces una ecuación que nos permita calcular la longitud de dicha espiral. Esto lo haremos, en principio, de dos maneras.

Etapa 3: *Conociendo más sobre la espiral de Arquímedes*

Las espirales son curvas que tienen una presencia importante en la naturaleza. Así, podemos encontrarlas en la caparazón de los caracoles, en trompas y colas de animales, en serpientes enrolladas, en muchas plantas y flores (en particular girasoles y piñas), y más aún, podemos encontrarlas en las huellas dactilares, en adornos y muchos dibujos y esculturas, como puede apreciarse en las fotos que aparecen en la *Figura 3*.

Figura 3

Pero a pesar de ser curvas muy conocidas por su presencia en el entorno en que nos desenvolvemos, las espirales no son suficientemente trabajadas en un curso de análisis. Esto conduce a la necesidad de ampliar los conocimientos sobre esta clase de curva. Por lo tanto, antes de continuar con nuestro propósito de construir el modelo adecuado, será oportuno recabar información sobre la espiral de Arquímedes a los fines de que el trabajo sea desarrollado sobre bases más sólidas.

La espiral de Arquímedes es una de las espirales más simples desde el punto de vista matemático. Arquímedes en su tratado titulado *"Sobre las espirales"*, describe esta curva, basada en el movimiento de un punto, de la siguiente manera:

"Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral".

A partir de esta definición, podemos observar que el movimiento que da la forma de la espiral incluye una traslación y un giro. Específicamente esto significa que si se dispone de un punto O fijo en el plano, de una semirrecta con origen O y de un punto M sobre la semirrecta y se hace girar la semirrecta en torno a O con velocidad angular constante y el punto M se desplaza sobre la semirrecta a velocidad constante, entonces la trayectoria que recorre el punto M es una espiral de Arquímedes. En el *Gráfico 2*, en el instante inicial, el punto M coincide con O.

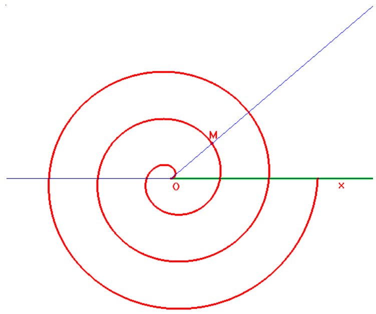


Gráfico 2

Se puede deducir fácilmente que, en coordenadas polares (r, θ), esta espiral puede ser descrita por la siguiente ecuación general:

$$r = a + b\theta, \tag{3}$$

siendo a y b números reales, en donde a da cuenta de la distancia entre el punto M y O en el instante inicial y b controla la distancia entre las espiras en giros sucesivos.
A continuación, se muestran las gráficas de tres espirales de Arquímedes con parámetro $b = 1$ y diferentes valores de a.

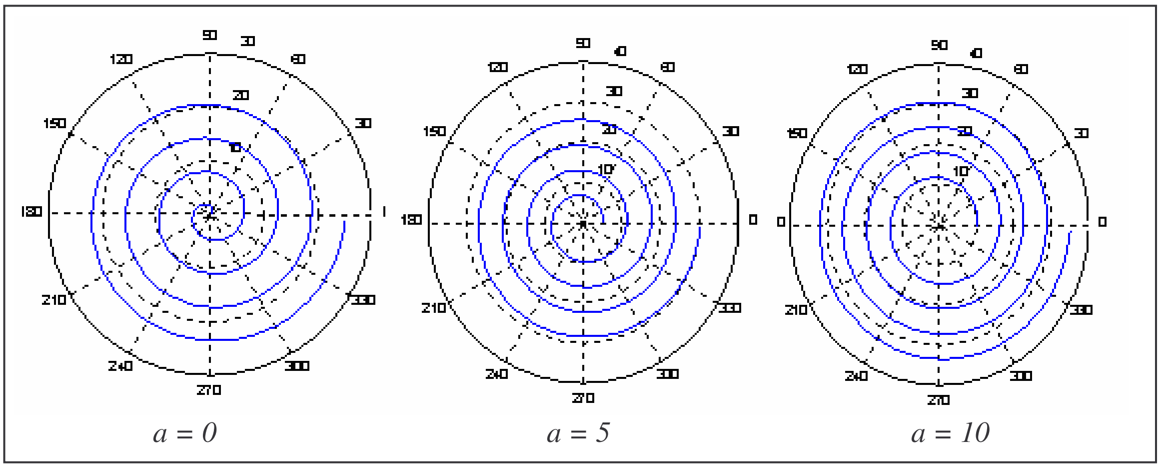


Gráfico 3

Esta curva se caracteriza por el hecho de que vueltas sucesivas de la misma tienen distancias de separación constantes, *(Figura 4)*, como puede verse si restamos los radios de dos espiras consecutivas al dar una vuelta completa. Esto es,

$$\text{si} \quad \left.\begin{array}{l} r' = a + b(\theta + 2\pi) \\ r = a + b\theta \end{array}\right\} \Rightarrow r' - r = 2b\pi \tag{4}$$

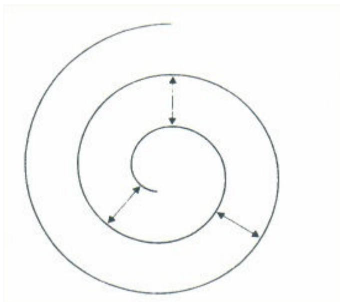


Figura 4

Se puede observar que, en el caso de la bobina de papel, la distancia entre dos espiras consecutivas está dada por el espesor h del papel. Por lo obtenido en (4), debe ser $h = 2b\pi$, de donde el parámetro b en (3) está dado por $b = \dfrac{h}{2\pi}$, que coincide con lo obtenido en (2).

Etapa 4: *¿Qué método utilizar para construir el modelo?*

Se describen a continuación diferentes metodologías de trabajo, cada una de las cuales conducirá a una ecuación, modelo matemático, que permitirá obtener la longitud de la espiral de Arquímedes, es decir, nuestro primer objetivo de trabajo.

Modelo 1:

Se sabe que si una curva C se describe con las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, donde f' y g' son continuas en $[a,b]$ y C es recorrida una sola vez cuando t aumenta desde a hasta b, la longitud de C es:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{4}$$

Para calcular la longitud de una curva expresada en la ecuación polar $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, consideramos que θ es un parámetro y escribimos las ecuaciones paramétricas de la curva en la forma:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\,sen\,\theta = f(\theta)\,sen\,\theta$$

Al derivar con respecto a θ, se obtiene que:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \tag{5}$$

Reemplazando (5) en (4) podemos decir que la longitud de una curva cuya ecuación polar es $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ está dada por:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

En el caso de la espiral de Arquímedes

$$r(\theta) = \frac{h}{2\pi}\theta + r_0 \qquad \text{y} \qquad \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{2\pi}$$

Para calcular la longitud de esta curva se deberá integrar entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi n$, donde n es el número de vueltas de la espiral.
Entonces

$$L = \int_0^{2\pi n} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \int_0^{2\pi n} \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\theta + r_0\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{h} \int_0^{2\pi n} \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\theta + r_0\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\, \frac{h}{2\pi} d\theta \tag{6}$$

Esta integral es del tipo $\int \sqrt{u^2 + v^2}\, du$ con $u = \frac{h}{2\pi}\theta + r_0$, $v = \frac{h}{2\pi}$ (7)

Haciendo el cambio de variables $u = v\,senh(t)$, *resulta* $du = v\cosh(t)\,dt$ y se obtiene que:

$$\int \sqrt{u^2 + v^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{2} ln\left(u + \sqrt{u^2 + v^2}\right) - \frac{v^2}{2} ln v \tag{8}$$

Sustituyendo las expresiones de u y v de (7) en (8), se logra finalmente que la longitud de la espiral de Arquímedes es:

$$L = \frac{2\pi}{h}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2\pi}\theta + r_0\right)\sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\theta + r_0\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 ln\left(\left(\frac{h}{2\pi}\theta + r_0\right) + \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\theta + r_0\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 ln\left(\frac{h}{2\pi}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi n} \tag{9}$$

Modelo 2:

La diferencia entre este modelo y el anterior radica en el hecho de que aquí encontraremos una relación entre la longitud de arco s y θ, sin utilizar el concepto de longitud de arco que fuera usado en el modelo 1.
De acuerdo a (1) y observando la *Figura (2)*, podemos escribir que

$$\delta\theta = \frac{\delta s}{r(\theta)} \text{ , o bien}$$

$$\frac{\delta s}{\delta\theta} = r(\theta) \qquad (10)$$

Reemplazando (2) en (10),

$$\frac{\delta s}{\delta\theta} = \frac{h}{2\pi}\theta + r_0$$

Tomando límite para $\delta\theta$ tendiendo a cero, se tiene que

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{h}{2\pi}\theta + r_0$$

Integrando y usando la condición inicial $s = 0$ cuando $\theta = 0$, se obtiene que la longitud de arco es:

$$s = \frac{h}{4\pi}\theta^2 + r_0\theta \qquad (11)$$

Ya se dispone de dos maneras para calcular la longitud de la bobina de papel y debemos comenzar a dar respuesta a los interrogantes planteados en *a)* y *b)*.

***Etapa 5:** Una visita al diario*

A los fines de dar respuesta al problema que se tiene es preciso, por un lado, recabar toda la información necesaria y, por otro lado, adquirir conocimiento sobre los aspectos esenciales del proceso de impresión de un diario. Para ello, lo más adecuado es realizar una visita guiada a la planta impresora. Se sugiere confeccionar previamente un listado de aquellos datos o información que se consideran relevantes y que serán utilizados en las etapas finales de proyecto.

***Etapa 6:** Resolviendo con el modelo elegido*

En esta etapa comenzaremos por estimar la longitud de una bobina de papel. Aplicaremos los modelos obtenidos de aplicar los métodos descriptos en la *Etapa 4*.

Modelo 1:
Se necesitan los siguientes datos:
- El espesor del papel, h
- El valor de r_0
- El número de vueltas, n (para poder evaluar θ en $2\pi n$)

Una de las cuestiones claves que se deberá afrontar es cómo medir adecuadamente el espesor del papel de diario. Una vez realizada la medición con un *micrómetro,* se obtiene el valor aproximado siguiente:

$$h = 0.0099 \text{ cm} \qquad (12)$$

De la visita a la planta se tiene la información de que el diámetro interno del cilindro en el que se enrolla el papel es de *7.8 cm.* y el diámetro externo es de *10 cm.* Por lo tanto este último dato es el que utilizamos para determinar r_0.
Es decir:

Figura 5

$$r_0 = \frac{10}{2} = 5 \qquad (13)$$

Se sabe además que el diámetro externo de la bobina de papel es de *101.6 cm.*, por lo tanto, su radio externo es $r_e = 50.8\ cm$. Conociendo r_0 , r_e y el espesor h, el número de vueltas que da el papel en el cilindro estará dado por:

$$n = \frac{r_e - r_0}{h} \tag{14}$$

Entonces si $\theta = 2\pi n = 2\pi\left(\frac{r_e - r_0}{h}\right)$, se puede estimar el valor de L en (9) de la siguiente manera:

$$L = \frac{2\pi}{h}\left[\frac{1}{2}r_e\sqrt{\frac{h^2}{4\pi^2}+r_e^2}+\frac{h^2}{8\pi^2}ln\left(r_e+\sqrt{\frac{h^2}{4\pi^2}+r_e^2}\right)-\frac{1}{2}r_0\sqrt{\frac{h^2}{4\pi^2}+r_0^2}-\frac{h^2}{8\pi^2}\ ln\left(r_0+\sqrt{\frac{h^2}{4\pi^2}+r_0^2}\right)\right]$$

Reemplazando en esta expresión r_0 , r_e y h, por sus valores *5, 50.8 y 0.0099* respectivamente se tiene que, con el *Modelo 1*, la longitud de una bobina de papel periódico es:

$$\boxed{L = 8.109{,}9\ metros} \tag{15}$$

<u>*Modelo 2*</u>:
Se necesitan los siguientes datos:

- El espesor del papel, h
- El valor de r_0
- El número de vueltas, n (para estimar θ)

Estos valores se calculan como en el caso anterior.

Considerando que $\theta = 2\pi n = 2\pi\left(\frac{r_e - r_0}{h}\right)$, se puede estimar el valor de s en (11) de la siguiente manera:

$$s = \frac{h}{4\pi}\theta^2 + r_0\,\theta = \frac{h}{4\pi}\left(2\pi\frac{r_e - r_0}{h}\right)^2 + r_0\left(2\pi\frac{r_e - r_0}{h}\right)$$

Así se tiene que la longitud de una bobina de papel periódico, usando el *Modelo 2*, es también:

$$\boxed{s = 8.109{,}9\ metros}$$

<u>*Un tercer modelo*</u>*:*

La longitud de la bobina de papel también se puede estimar rápidamente de la siguiente manera:
Se calcula el radio promedio r_p de los radios r_0 y r_e , es decir:

$$r_p = \frac{r_0 + r_e}{2} = 27{,}9 \text{ cm.}$$

y se toma este valor como una estimación puntual para los radios que se consideran constantes e iguales a r_p.
Se calcula s a partir de (1), considerando que $\theta = 2\pi n$ y teniendo en cuenta que el número de vueltas es $n = \frac{r_e - r_0}{h} = 4.626{,}3$. Luego,

$$s = 2\pi n\, r_p = 2\pi(4.623{,}3)(27{,}9) = 8.109{,}9\ metros$$

Como puede observarse, con este método de aproximación, se obtiene como resultado el mismo valor que con los métodos anteriores.

¿Un cuarto modelo?

El nuevo encargado de compras observa que la bobina de papel posee un rótulo en el que figura el siguiente dato: *48.8 gramos/m²*, lo cual se sabe, corresponde al valor típico del papel periódico cuando éste responde al tipo estándar. Por otra parte, también en el rótulo, aparece el peso en kilos de la bobina de papel.
¿Podrías con estos datos y los disponibles hasta el momento encontrar otra manera de calcular la longitud del papel en la bobina?

Etapa 7: *Validando el modelo*

Antes de proceder a dar repuesta a los interrogantes planteados, el modelo debe someterse a análisis y pruebas a los fines de identificar y corregir fallas si las hubiere. Para ello, en esta etapa se construirán situaciones de prueba simples, como por ejemplo, se utilizarán rollos de papel de cocina o una cinta métrica perfectamente enrollada para calcular la longitud con los distintos métodos analizados. De esta manera se estará en condiciones de poder comparar con el valor de longitud real y determinar si hay discrepancias, analizar el grado de las mismas y cuál de los métodos produce resultados más exactos.

Etapa 8: *Respondiendo a los interrogantes*

Acudiendo a los datos recolectados en la visita realizada a la empresa, se pudo obtener la siguiente información:

- Las dimensiones de una hoja de papel de diario son *56 cm*. de ancho x *38 cm*. de alto.
- Se imprimen simultáneamente dos hojas enfrentadas (Ver *Figura 6*), siendo la impresión a doble faz.
- El ancho de la bobina de papel (*76 cm.*) es el doble de la altura de la hoja del diario (*38 cm.).*
- La tirada es de ocho mil ejemplares en promedio de lunes a sábado y diez mil los domingos.
- El diario tiene en promedio *20* hojas de lunes a sábado y *24* hojas los domingos.

Figura 6

Respondiendo al interrogante a)

Calculamos primero la cantidad de papel que se requiere para imprimir un ejemplar del día domingo.
Como consta en los datos, con una longitud de papel del rollo igual al ancho de la hoja del diario (*56 cm.*) se pueden imprimir *4* hojas. Como los días domingo el diario incluye *24* hojas, aplicando regla de tres simple se obtiene que, para imprimir un ejemplar el día domingo, se necesitan

$$(24 \text{ x } 569) / 4 = 336 \text{ cm.}$$

Por ser la tirada de *10.000* ejemplares los días domingo, se tiene que el insumo de papel ese día será de:

$$10.000 \text{ x } 336 \text{ cm.} = 3.360.000 \text{ cm} = 33600 \text{ m.}$$

Dado que, según los modelos analizados, cada bobina de papel tiene una longitud de *8.109,9 metros,* harán falta

$$33600 / 8.109{,}9 = 4{,}143$$

es decir, algo más de 4 bobinas de papel para cubrir la tirada de diario del día domingo.

Respondiendo al interrogante b)

Por lo analizado para *a),* en el lapso de quince días se deben cubrir dos domingos, por lo que harán falta por un lado

$2 \text{ x } 4{,}1431 = 8{,}2862$ bobinas,

es decir, algo más de *8* bobinas de papel.

Un razonamiento análogo al realizado para *a)* con las condiciones sobre cantidad de tirada y cantidad de hojas que figuran en los datos sobre los diarios que salen de lunes a sábado, permite concluir que, para los diarios que tienen salida estos días se requiere *33,1452* bobinas de papel.

Este resultado, sumado al insumo de los domingos da como respuesta final que se requieren

$41.4314 \cong 41.5$ bobinas de papel.

Dado que la disponibilidad es de *52* bobinas, concluimos que dicha cantidad alcanza para cubrir la tirada de dos semanas.

C) Actividades de cierre

A los fines de desarrollar habilidades de comunicación, se solicitará a los estudiantes la narración escrita y oral sobre lo actuado

Etapa 9: *Confección de reporte escrito*

La escritura de un reporte final que incluya todos los aspectos tratados en cada una de las etapas es una tarea que realizará cada grupo de trabajo en forma domiciliaria. Los estudiantes pueden consultar al docente en lo que se refiere a la organización del mismo como así también versiones preliminares del producto final.

Etapa 10: *Exposición oral*

Para dar por finalizado el Proyecto cada grupo de estudiantes elaborará un poster conteniendo los resultados principales del trabajo, la construcción del modelo junto con una descripción del o los métodos utilizados. Los detalles del mismo serán expuestos al resto de los compañeros en el aula.

CONCLUSIONES

Como se dijo anteriormente, el trabajo en proyectos es *una* de las formas posibles de organizar experiencias de aprendizaje conectando las matemáticas con la realidad.

En particular, la propuesta de proyecto presentada en este trabajo, consiste en un conjunto de tareas que, además de permitir a los estudiantes interactuar con el medio al implicar trabajo en clase y fuera de ella, les ofrece la oportunidad de recorrer el proceso de modelación matemática, desde la elaboración de una idea inicial a la discusión de resultados parciales y finales. Dichas tareas les brindan además, la posibilidad de ser activos en una construcción por etapas, permitiéndoles en el transcurso de su desarrollo desplegar y potenciar sus habilidades en investigación.

Como reflexión final quiero dejar expreso mi reconocimiento del valor educativo que posee la modelación matemática por constituir un medio favorecedor tanto del desarrollo de habilidades matemáticas como de la construcción de conocimientos matemáticos. Es en este sentido que, como educadores, tenemos la responsabilidad de crear ambientes de aprendizajes adecuados para que, teniendo como base la modelación y el proceso que ella implica, se brinde a los estudiantes la posibilidad de vivenciar este proceso tan rico y dinámico por sí mismo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- BELLOMO, NICOLA y PREZIOSI, LUIGI (1995). Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation. (CRC Press).
- BENDER, EDWARD (2000). An Introduction to Mathematical Modeling. Dover Publicaions,Inc.
- BOSCH, MARIANNA, CHEVALLARD, IVES y GASCÓN, JOSEP (1997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Editorial Horsori.
- DE LANGE, J., HUNTLEY, ID, KEITEL, C. y NISS, M. (1993). Innovation in Maths Education by Modelling and Applications . Ellis Horwood, Chichester.
- GUZMÁN, MIGUEL DE (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular-ISBN: 84-7884-092-3 - Depósito Legal: M-9207.
- MEERSCHAERT, MARK (1999). Mathematical Modeling. 2da. Edición. Academic Press
- PÓLYA, G. (1994). Métodos matemáticos de la ciencia. Madrid Euler Editorial
- STEWART, JAMES (1999). Cálculo multivariable. 4ta. Edición. Thomson & Learning.