

## Biografías

En esta ocasión presentamos la biografía de **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** uno de los matemáticos que revolucionó la matemática del siglo XX.

El texto original en inglés se puede leer en

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/G.html>



**Georg Cantor** nació el 3 de Marzo de 1845 en San Petersburgo, Rusia. Su padre Georg Waldemar Cantor, era un exitoso comerciante, y más tarde, corredor en la Bolsa de Valores en San Petersburgo. Georg Waldemar Cantor nació en Dinamarca y era un hombre con un profundo amor por la cultura y las artes. La madre de Georg, María Anna Böhm, era rusa y tenía notables talentos musicales. Ciertamente Georg heredó algunos talentos musicales y artísticos de sus padres ya que fue un eximio violinista. Georg creció como protestante, que es la religión de su padre. Su madre era católica.

Luego de la primera etapa de su educación formal, en su casa guiado por un tutor, Cantor asistió a la escuela primaria en San Petersburgo. En 1856, cuando Cantor tenía once años la familia se mudó a Alemania. Sin embargo, Cantor recordaba sus primeros años en Rusia con gran nostalgia y nunca se sintió a gusto en Alemania, aunque haya vivido allí durante el resto de su vida. Aparentemente nunca más escribió en ruso, idioma que seguramente debe haber sabido.

Las condiciones de salud del padre de Cantor eran malas y el traslado a Alemania fue para buscar un clima más cálido que los duros inviernos de San Petersburgo. Al principio vivieron en Wiesbaden, donde Cantor asistió al **Gymnasium**, luego se trasladaron a Frankfurt. Cantor estudió en la *Realschule* en Darmstadt, donde era pupilo. Se graduó en 1860 con un excelente informe, que menciona, en particular, su excepcional capacidad para las matemáticas, en particular, la trigonometría. Después de asistir a la *Höhere Gewerbeschule* en Darmstadt a partir de 1860 entró en el

Politécnico de Zurich en 1862. La razón por la que el padre de Cantor optó por mandarlo a la *Höheren Gewerbeschule* fue que quería que su hijo se convirtiera en “una brillante estrella en el firmamento de la ingeniería”.

Sin embargo, en 1862 Cantor solicitó el permiso de su padre para estudiar matemática en la universidad y su padre finalmente consintió. Sus estudios en Zurich, sin embargo, se truncaron por la muerte de su padre en junio de 1863. Cantor se trasladó a la Universidad de Berlín donde se convirtió en amigo personal de Hermann Schwarz quien fue su compañero de estudios. Cantor asistió a las clases de Weierstrass, Kummer y Kronecker. Pasó el verano de 1866 en la Universidad de Göttingen, y regresó a Berlín en 1867 para completar su tesis sobre teoría de números: *Aequationibus secundi Gradus indeterminatis*.

Mientras estuvo en Berlín, Cantor participó activamente de la Sociedad Matemática y llegó a ser su presidente entre 1864-65. Después de recibir su doctorado en 1867, Cantor dio clases en un liceo para niñas en Berlín. En 1868, se incorporó al Seminario *Schellbach* para profesores de matemática. Durante este tiempo trabajó en la tesis de su *habilitation*, una vez más sobre teoría de números, y en 1869, inmediatamente después de ser nombrado como profesor en Halle, la presentó y aprobó.

En Halle, la dirección de la investigación de Cantor se apartó de la teoría de los números y giró hacia el análisis. Esto se debió a que Heine, uno de sus colegas de trayectoria, le propuso a Cantor probar el problema abierto de la unicidad de la representación de una función como serie trigonométrica. Era un problema difícil que había sido atacado, sin éxito, por muchos matemáticos, entre ellos el propio Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann. Cantor resolvió el problema en abril de 1870. Publicó, además, otros artículos que se ocupan de series trigonométricas entre 1870 y 1872, todos ellos reflejan la influencia del de Weierstrass como su maestro y es donde se fue gestando su teoría sobre conjuntos infinitos.

Cantor fue promovido a Profesor Extraordinario en Halle en 1872 y en ese año comenzó su amistad con Dedekind a quien había conocido durante sus vacaciones en Suiza. Cantor publicó un artículo sobre series trigonométricas en 1872, en el que se definen los números irracionales como límite de sucesiones de números racionales. En 1872, Dedekind publica su definición de los números reales (*Dedekind cuts*) y allí cita este trabajo de Cantor.

Cantor demostró en 1873 que el conjunto de números racionales es numerable, es decir, que se puede dar una correspondencia uno-a uno con el conjunto de los números naturales. También mostró que los números algebraicos, es decir, los números que son

raíces de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros, es numerable. Además, logró demostrar que los números reales no son numerables en diciembre de 1873 y publicó el resultado en 1874. Es en este artículo donde la noción de correspondencia uno a uno aparece por primera vez, pero sólo implícitamente.

Un número trascendente es un número irracional que no es raíz de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Liouville demostró constructivamente en 1851 que existen números trascendentes. Veinte años más tarde, en 1874, con este trabajo, Cantor demostró que, en cierto sentido, "casi todos" los números son trascendentes al probar que los números reales no son numerables, pues él había demostrado que los números algebraicos si lo eran.

Cantor fue más allá con el intercambio epistolar con Dedekind. La siguiente pregunta que él mismo se hizo, en enero de 1874, fue la de si el cuadrado unidad podría ser mapeada en correspondencia uno a uno con el segmento unidad. En una carta a Dedekind fechada el 5 de enero de 1874 escribió:

*“¿Puede una superficie (digamos un cuadrado que incluye la frontera) mapearse biunívocamente a una línea (por ejemplo un segmento que incluye los puntos finales), de modo que por cada punto de la superficie exista un punto correspondiente de la línea y, por el contrario, por cada punto de la línea haya un punto correspondiente de la superficie? Creo que responder a esta pregunta no será tarea fácil, a pesar de que la respuesta parece ser tan claramente "no" que la prueba parece casi innecesaria”.*

El año 1874 fue muy importante en la vida personal de Cantor. En la primavera de ese año se comprometió con Vally Guttmann, una amiga de su hermana. Se casaron el 9 de agosto de 1874 y pasaron su luna de miel en Interlaken, Suiza, donde Cantor pasó mucho tiempo en discusiones matemáticas con Dedekind.

Cantor continuó con el contacto epistolar con Dedekind, compartiendo sus ideas y buscando sus opiniones. En 1877, le escribió contándole que había logrado demostrar que existe una correspondencia uno a uno de los puntos en el intervalo  $[0, 1]$  y los puntos del espacio  $p$ -dimensional. Cantor estaba muy sorprendido de su propio descubrimiento y escribió:

*“Lo veo, pero no lo creo!”*

Por supuesto, esto tuvo consecuencias para la geometría y la noción de dimensión de un espacio. Un importante paper sobre la dimensión que Cantor envió para su publicación en la revista Crelle en 1877, fue tratada con sospecha por Kronecker, y

publicada sólo después de que Dedekind intervino en nombre de Cantor. Esto le provocó Cantor un notable resentimiento en contra de Kronecker y nunca más envió sus artículos a la revista Crelle.

En este famoso artículo sobre dimensión que apareció en la Crelle en 1878, es donde precisa el concepto correspondencia uno a uno. El documento analiza la noción de conjuntos numerables, es decir, los que están en correspondencia uno a uno con los números naturales. Se estudian conjuntos de igual potencia, es decir, los conjuntos que están en correspondencia uno a uno consigo mismos. Cantor también discutió el concepto de dimensión y destacó el hecho de que su correspondencia entre el intervalo  $[0, 1]$  y el cuadrado unidad no es un mapa continuo.

Entre 1879 y 1884 Cantor publicó una serie de seis artículos en la revista *Mathematische Annalen* especialmente pensados para dar una introducción básica a la teoría de conjuntos. Klein debe haber tenido una influencia importante en el hecho de que *Mathematische Annalen* haya publicado estos papers. Sin embargo, hubo una serie de problemas que se produjeron durante estos años que resultaron difíciles para Cantor. Aunque había sido ascendido a un profesor titular en 1879 por recomendación de Heine, Cantor tenía la esperanza de una cátedra en una universidad de mayor prestigio. Su larga correspondencia con Schwarz terminó en 1880 ya que la oposición a las ideas de Cantor siguió creciendo y Schwarz ya no apoyó la dirección en la que el trabajo de Cantor se desarrollaba. Luego, en octubre de 1881 murió Heine y fue necesario un sustituto para ocupar el rectorado de Halle.

Cantor elaboró una lista de tres matemáticos para ocupar esta posición y la lista fue aprobada. Dedekind era el primero, seguido de Heinrich Weber y finalmente Mertens. Fue, sin duda un duro golpe para Cantor cuando Dedekind declinó la oferta a principios del año 1882, y fue peor aún cuando Heinrich Weber y luego Mertens también rechazaron la posición. Después, se elaboró una nueva lista y finalmente fue nombrado Wangerin, quien nunca estableció una relación estrecha con Cantor. La rica correspondencia matemática entre Cantor y Dedekind había terminado para fines de 1882.

Casi al mismo tiempo, Cantor inició otro importante contacto por correspondencia con Mittag-Leffler. Rápidamente, Cantor comenzó a publicar en la revista de Mittag-Leffler, *Acta Mathematica*, mientras su serie de seis artículos en *Mathematische Annalen* también siguió apareciendo. El quinto paper de esta serie, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, se publicó como una monografía y es especialmente importante por una serie de razones: En primer lugar, Cantor se dió cuenta de que su teoría de conjuntos no tenía la aceptación que esperaba y el

*Grundlagen* fue pensado para responder a las críticas que se le hacían. En segundo lugar, el logro más importante del *Grundlagen* fue la presentación de los números transfinitos como una extensión autónoma y sistemática de los números naturales.

Cantor mismo deja bastante claro en el artículo de que él era conciente de la fuerza que tenía la oposición a sus ideas. Escribió:

*“... Me doy cuenta de que en esta empresa me pongo en oposición a la visión generalizada de la matemática infinita y a opiniones usualmente defendidas sobre la naturaleza de los números”.*

A finales de mayo de 1884 Cantor tuvo el primer ataque de la depresión. Se recuperó después de unas semanas pero ahora parecía menos confiado. Él le escribió a Mittag-Leffler a finales de junio diciendo:

*“... No sé cuando voy a volver a la continuación de mi trabajo científico. Por el momento lo que puedo hacer es absolutamente nada, y me limitaré a cumplir con los deber más imprescindibles; cuánto más feliz sería si estuviese científicamente activo, si sólo pudiese recuperar frescura mental necesaria.”*

Durante algún tiempo se pensó que su depresión fue causada por preocupaciones matemáticas y como consecuencia de las dificultades de su relación con Kronecker. Recientemente, sin embargo, una mejor comprensión de esta enfermedad mental ha hecho que podamos estar seguros de que las preocupaciones matemáticas de Cantor y sus difíciles relaciones agravaron su depresión, pero no fueron su causa. Una vez superada esta enfermedad tomó unas vacaciones en las montañas de Harz, su lugar favorito, y por alguna razón decidió tratar de reconciliarse con Kronecker. Este aceptó el gesto, pero debe haber sido difícil para ambos olvidar sus enemistades, y los desacuerdos filosóficos entre ellos se mantuvieron intactos.

Las preocupaciones matemáticas comenzaron a afectar a Cantor en este momento, en particular, comenzó a preocuparse de que no podía probar la hipótesis del continuo, es decir, que el orden de infinitud de los números reales es el siguiente después del de los números naturales. De hecho, pensó que había demostrado que esta afirmación era falsa, y luego, al día siguiente encontró a su error. Una vez más, pensó que lo había demostrado para luego encontrar rápidamente su error.

Las cosas tampoco iban bien en otros aspectos. En 1885 Mittag-Leffler persuadió a Cantor de retirar uno de sus artículos des *Acta Mathematica*, cuando había llegado a la fase de final de edición porque él pensaba que los *“... resultados estaban adelantados*

en alrededor de cien años ". Cantor, bromeó al respecto, pero se sintió claramente herido:

*"Mittag-Leffler consiguió su propósito, pero yo debería esperar hasta el año 1984, lo que me parece una exigencia demasiado grande! ... Pero, por supuesto, no quiero saber nada, nunca más, sobre el Acta Mathematica".*

Mittag-Leffler hizo esto con la intención de hacerle un favor a Cantor, pero a su vez, muestra una falta de reconocimiento de la importancia de la labor de Cantor. La correspondencia entre Mittag-Leffler y Cantor se interrumpió poco después de este evento, y el flujo de nuevas ideas que habían llevado a Cantor al rápido desarrollo de la teoría de conjuntos durante los 12 años que duró su interacción, parecía haber terminado.

En 1886 Cantor compró una casa nueva en la *Händelstrasse*, una calle en honor al compositor alemán Handel. Antes de fin de año, nació su sexto hijo. Su investigación cambió de la teoría de conjuntos hacia dos nuevas direcciones, en primer lugar discutir los aspectos filosóficos de su teoría con varios filósofos (publicó estas cartas en 1888). En segundo lugar, después de la muerte de Clebsch, tomó su idea de fundar la *Deutsche Vereinigung Mathematiker*, que finalmente logró en 1890. Cantor presidió la primera reunión de la Asociación en Halle en septiembre de 1891, y a pesar de la amargo antagonismo entre él y Kronecker, Cantor invitó Kronecker para dar una conferencia en la primera reunión.

Kronecker no pudo asistir a la reunión, ya que su esposa resultó gravemente herida en un accidente de escalada al final del verano y murió poco tiempo después. Cantor fue electo presidente de la *Deutsche Vereinigung Mathematiker* en la primera reunión y ocupó este puesto hasta 1893. Él ayudó a organizar la reunión de la Asociación, celebrada en Múnich en septiembre de 1893, pero se enfermó de nuevo antes de la reunión y no pudo asistir.

Cantor publicó un extraño paper en 1894, en el que listaba todas la formas en las que los números pares hasta 1000 podían escribirse como la suma de dos números primos. Dado que la verificación de la conjetura de Goldbach hasta 10.000 se había hecho 40 años antes, es probable que este artículo de Cantor diga más acerca de su estado de salud mental de lo que lo hace acerca de la conjetura Goldbach.

Sus últimos grandes artículos sobre teoría de conjuntos aparecieron en 1895 y 1897, de nuevo en la revista *Mathematische Annalen* bajo la dirección de Klein, y son una excelente recopilación sobre aritmética transfinita. El largo lapso de tiempo entre los

dos documentos se debe al hecho de que, si bien Cantor terminó de escribir la segunda parte seis meses después de que la primera parte fuese publicada, él tenía la esperanza de incluir una prueba de la hipótesis del continuo en la segunda parte. Sin embargo, no pudo, pero el segundo paper describe su teoría de conjuntos bien ordenados y números ordinales.

En 1897 Cantor asistió al primer Congreso Internacional de Matemáticos en Zurich. Hurwitz, en sus conferencias en el Congreso, expresó abiertamente su gran admiración por Cantor y lo proclamó como uno de los que había enriquecido la teoría de funciones. Jacques Hadamard dijo que las nociones de la teoría de conjuntos eran reconocidas y que se habían transformado en instrumentos indispensables.

En el Congreso se reunieron Cantor y Dedekind y renovaron su amistad. Durante el Congreso, sin embargo, Cantor ya había descubierto las primeras de las paradojas de la teoría de conjuntos. Las encontró mientras trabajaba en sus papers de 1895 y 1897, y le escribió a Hilbert en 1896 para explicárselas. Burali-Forti descubrió la paradoja de forma independiente y lo publicó en 1897. Cantor comenzó una serie de cartas con Dedekind para tratar de entender la forma de resolver estos problemas, pero los recurrentes episodios de su enfermedad mental lo obligaron a dejar de escribirle en 1899.

Siempre que Cantor sufría de períodos de depresión, tendía a alejarse de las matemáticas y su interés giraba hacia la filosofía y la literatura, en particular hacia la creencia de que Francis Bacon había escrito las obras de Shakespeare. Por ejemplo, en 1884, durante un rebrote de su enfermedad, había solicitado que se le permitiera dar clases sobre filosofía en lugar de matemáticas y había comenzado un intenso estudio de literatura isabelina con el intento de demostrar la teoría sobre Bacon y Shakespeare. Comenzó a publicar panfletos sobre cuestiones literarias en 1896 y 1897. Agregó estrés adicional a la vida de Cantor la muerte de su madre en octubre de 1896 y la de su hermano menor, en enero de 1899.

En octubre de 1899 Cantor solicitó, que le fuese concedida licencia de enseñanza por el semestre de invierno de 1899-1900. El 16 de diciembre de 1899, falleció su hijo menor. A partir de ese momento y hasta el final de su vida luchó contra la depresión. Siguió dando clases, pero tuvo que pedir su licencia de enseñanza en varios semestres de invierno, los de 1902-03, 1904-05 y 1907-08. Desde 1899 en adelante, Cantor también pasó algún tiempo en sanatorios durante los peores ataques de su enfermedad mental. Continuó con su trabajo y publicaciones sobre la teoría de Shakespeare y Bacon y, desde luego, no se dio por vencido por completo con la matemática. Él habló sobre las paradojas de la teoría de conjuntos en una conferencia durante una reunión

de la *Deutsche Vereinigung Mathematiker* en septiembre de 1903 y asistió al Congreso Internacional de Matemáticos en Heidelberg en agosto de 1904.

En 1905 Cantor escribió un trabajo religioso después de regresar a casa del hospital luego de un ataque. También mantuvo una interesante correspondencia con Jourdain sobre la historia de la teoría de conjuntos y también sobre sus tratados religiosos. Después de estar de licencia durante gran parte de 1909 en razón de su mala salud, cumplió regularmente con sus tareas en la universidad en 1910 y 1911. Fue en ese año que él recibió una invitación de la Universidad de St Andrews en Escocia para asistir al 500 ° aniversario de la fundación de la Universidad como un distinguido erudito extranjero. Las celebraciones fueron del 12 al 15 de septiembre 1911. Durante esta visita comenzó a comportarse excéntricamente, hablando en profundidad sobre la cuestión de Shakespeare-Bacon. Luego viajó a Londres durante unos días.

Cantor esperaba encontrarse con Russell quien acababa de publicar *Principia Mathematica*. Sin embargo su mala salud y la noticia de que uno de sus hijos se había enfermado, hizo que Cantor regresara a Alemania sin ver a Russell. Al año siguiente, Cantor fue galardonado con el grado honorífico de Doctor en Leyes de la Universidad de St. Andrews, pero estaba demasiado enfermo para recibir el título en persona.

Cantor se retiró en 1913 y pasó sus últimos años enfermo durante la guerra en Alemania. Un gran evento fue planeado en Halle para celebrar el 70 ° cumpleaños de Cantor en 1915 que tuvo que ser cancelado debido a la guerra. Sin embargo, igual se hizo una pequeña celebración en su casa. En junio de 1917 ingresó en un sanatorio por última vez y durante la internación le escribió continuamente a su mujer pidiéndole que le permitieran volver a casa. Murió el 6 de junio de 1918 de un ataque al corazón.

Hilbert describe el trabajo de Cantor como:

*“... el mejor producto del genio matemático y uno de los logros supremos de la actividad humana puramente intelectual”.*

Aparentemente, una de las motivaciones de Cantor para llegar a la definición de punto de acumulación de un subconjunto del conjunto de los números reales fue el análisis del siguiente problema planteado años antes por Cauchy-Fourier.

Supongamos,  $a_n, b_n$  son sucesiones de números complejos de manera que para todo número real  $x$  se tiene que



$$\lim_{\{k \rightarrow \mu\}} \sum_{1 \leq n \leq k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = 0$$

entonces, vale que  $a_n = b_n = 0$  para todo  $n$ .

Cantor demostró que esta conjetura es cierta. Después se preguntó, si en lugar de la hipótesis converge a cero para todo número real  $x$ , suponemos para todo número fuera de un conjunto finito  $F$  la serie converge a cero. Cantor obtuvo la conclusión deseada. Para continuar se preguntó la serie converge a cero fuera de un conjunto  $F$  con un punto de acumulación, vale la conclusión? Esto lo condujo a analizar la estructura de los subconjuntos de números reales  $F$ .

**Autores:** *J.J. O'Connor y E.F. Robertson.*

Colaboración de la Dra. Carina Boyallán.  
Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.