El quinto postulado de Euclides:
Propuesta de clase para el último año de la escuela secundaria

Kyriakos Petakos y Natalia Sgreccia

Resumen
Muchas veces lo que se considera sencillo y claro esconde debajo una profundidad inmensa. Esta norma, aceptada por un escritor y pensador como Ernesto Sábato (1949), se experimenta casi a diario en las aulas de la escuela secundaria.
De esta manera procuramos causar un escepticismo sobre los bien conocidos postulados de Euclides y especialmente el último pasando por su propia evolución a lo largo de los siglos y empleando varias disciplinas, no sólo la Matemática, sino también otras -como la Navegación, la Física nuclear, etc.- por sus representativos como Omar Khayam (1050-1123).
Asimismo somos conscientes que en una disciplina -como la Matemática- que se asume en el imaginario de unas cuantas personas de todo el mundo como bastante -si no muy- difícil, recurrir a los fundamentos del pensamiento contiene también el riesgo de generar una nueva especie de miedo hacia ella.
Diseñamos una propuesta y la implementamos con estudiantes del último año de una escuela secundaria griega. Compartimos aquí algunos emergentes de los intercambios producidos. Nuestro objetivo fue generar un diálogo en el sentido platónico de la palabra, donde las respuestas de los estudiantes nos permitieran conocer cómo se reacciona -al menos en este caso- ante una desviación de lo tradicional, poniendo en duda lo conocido, durante el proceso de aprendizaje matemático.

Presentación
En nuestra experiencia en la formación de profesores de Matemática, y -por qué no decirlo- como alumnos de Profesorado en Matemática, hemos percibido y sentido las emociones encontradas -de extrañeza, desconfianza, admiración y gusto- cuando conocimos que podría haber “otros mundos posibles” a partir de la geometría, su historia y fundamentos. Pensamos que este tipo de vivencias pueden comenzar a palparse desde la escuela secundaria (Thomaidis, 1992). Por ello ideamos una propuesta que creemos viable y compartimos en esta oportunidad algunos de los emergentes resultantes de una puesta en escena de implementación con un grupo de 17 estudiantes del último año de una escuela secundaria griega.
En el diálogo generado, en el sentido platónico de la palabra, a partir de las respuestas de los estudiantes pudimos conocer su reacción ante una desviación de lo tradicionalmente establecido, poniendo en duda lo conocido. Para ello, nos pareció sumamente pertinente combinar esta intención con el conocimiento del famoso

postulado de las paralelas. Además, apostamos fuertemente a enseñar geometría con su historia, ya que percibimos -y esperamos mostrar algunos indicadores- su potencial didáctico.
Los estudiantes, distribuidos en 5 grupos de 3 personas y 1 de 2 personas, indagaron en variadas fuentes de información y prepararon lo que llamamos “lecturas”. Cabe señalar que tuvieron acceso a una nutrida biblioteca, con numerosos y variados documentos en papel y digitalizados. También se les otorgó un material-base cuya síntesis se presenta a continuación (donde lo que se presenta en letra *cursiva* representa consignas y/o preguntas dirigidas a los alumnos).

Síntesis del material-base

Poco se sabe con certeza de la vida de Euclides. Según el testimonio de Proclo, un matemático que vivió en Bizancio entre los años 410 y 485 d.C.: Euclides floreció durante el reinado de Ptolomeo I (que murió en 283 a.C.), pues es citado por Arquímedes, quien nació hacia fines del reinado de ese soberano. Incluso se dice que en una oportunidad Ptolomeo preguntó a Euclides si para aprender geometría existía un camino más corto que el de los Elementos, obteniendo la respuesta de que en geometría no existe camino real. Así, puede ubicarse a Euclides como posterior a Platón (428-348 a.C.) y a sus discípulos (como Aristóteles, 384-322 a.C.), pero anterior a Eratóstenes (aproximadamente 280-192 a.C.) y a Arquímedes (287-212 a.C.) (Santaló, 1966). Por lo anterior, suele situarse temporalmente a Euclides alrededor del año 300 a.C. Sin embargo, teniendo en cuenta que el comentario de Proclo fue escrito más de 700 años después, y que se carece de referencias más directas, se comprende que algunos historiadores pongan en duda tal fecha y aun la existencia de Euclides, atribuyendo sus obras a otro matemático griego o un grupo de personas integrantes de una escuela que habría pretendido sistematizar todos los conocimientos matemáticos de la época.
Su famoso libro Elementos no es lo que se suele considerar: el conglomerado del conocimiento griego de la época, solamente forma una introducción a eso (Strantzalos, 1988). En realidad, Euclides escribió ocho libros más avanzados en geometría, cuyo impacto fue grande en la época bizantina (Petakos, 2009). Destacados escolares, como el cardenal Besario, fueron influidos por esa obra, que probablemente se perdió durante los siglos y sólo partes de ella se rescataron en las bibliotecas del emperador hacia la toma de Constantinopla.
Si bien los babilonios, los egipcios y los griegos poseían conocimientos geométricos, le cabe a Euclides el mérito de haber organizado todos esos conocimientos en un sistema axiomático, el primero en la historia de la Matemática. *(¿Por qué es tan importante esto?).* Como cualquier axiomatización, el sistema construido por Euclides en los Elementos divide los enunciados en dos grandes tipos o categorías:

1) los enunciados que se aceptan sin demostración, que Euclides llamó principios, por ser los puntos de partida de las demostraciones;
2) los enunciados que se demuestran sobre la base de los primeros, a los que llamó con el ya conocido nombre de teoremas.

A los principios los subdividió, a su vez, en axiomas, enunciados válidos para cualquier ciencia -llamados también nociones comunes, precisamente por ser comunes a todas las ciencias-, y postulados, afirmaciones acerca de los objetos geométricos -por lo tanto, específicos de una ciencia- que debían postularse, es decir, aceptarse como verdaderas, para poder llevar a cabo las demostraciones.

Hoy algunos podrían decir que Euclides cometió el error de querer definir todos los términos que empleó en la formulación de sus postulados. Pero también puede decirse que, al definir incluso los términos que debían considerarse como primitivos (punto, línea y plano), Euclides tenía la intención de dar descripciones someras de los objetos con los que trata la geometría y de evitar que en la demostración de los teoremas de deslizaran razonamientos falaces a causa de la vaguedad de los términos usados.

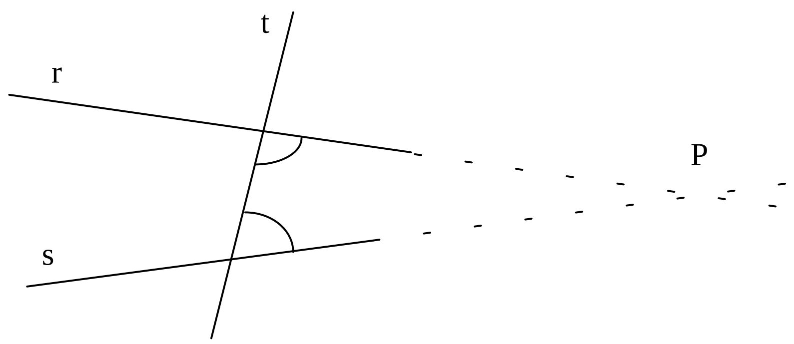
Se comparten algunas definiciones presentes en los Elementos.

Ahora focalicemos sobre los postulados de Euclides:

1. De un punto a otro puede trazarse solamente una línea recta.
2. Toda línea recta finita puede extenderse continuamente en línea recta.
3. Dados un punto y una distancia, puede trazarse solamente un círculo con este punto como centro y esta distancia como radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una línea recta corta a otras dos líneas rectas de manera que la suma de los dos ángulos interiores de un lado sea menor que dos ángulos rectos, entonces las otras dos líneas rectas, si se prolongan lo suficiente, se cortarán al mismo lado de la primera línea en que se encuentran aquellos ángulos.

Si reflexionamos en el significado de estos postulados, percibimos cuán diferente es el enfoque euclidiano de la geometría del enfoque empírico, inductivo que empleaban los egipcios y que había predominado hasta ese momento.

También podemos percibir que el 5º postulado es más complicado que los anteriores. *(Representémoslo gráficamente).*



Se puede decir, con otras palabras (por haberse probado su equivalencia), que de un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una recta paralela a la dada.
Puesto que la sistematización de Euclides tiene carácter axiomático, los postulados, junto con los axiomas, constituyen los puntos de partida para las demostraciones de los teoremas.
Antiguamente se creía que los axiomas de un sistema tenían que ser "evidentes". Puesto que no se los demuestra, esta evidencia era la única garantía de su verdad. En cambio, los teoremas, que sí se demuestran, no necesitaban ser evidentes. El postulado 5 de Euclides, a diferencia de lo que ocurría con los otros cuatro, no parecía evidente a los matemáticos de la época.
¡El propio Euclides parece haber tenido alguna duda con respecto a este postulado!, ya que en lo posible evitó su utilización en las demostraciones, aun a costa de hacerlas más complicadas.
Los geómetras posteriores creyeron que la explicación para esta falta de evidencia consistía en que el 5º postulado era, en realidad... ¡un teorema!; es decir, que no era independiente de los otros cuatro, pudiendo, por lo tanto, ser demostrado a partir de ellos.
A lo largo de veinte siglos trataron de demostrarlo, pero, siempre que creyeron haberlo hecho, partieron de los cuatro primeros postulados (lo cual es correcto, *¿por qué?*) agregándoles algún otro enunciado que en todos los casos resultó ser equivalente al postulado en cuestión.
Si bien los árabes se sintieron más atraídos por problemas algebraicos y trigonométricos que por la geometría pura, cabe mencionar que ¡también invirtieron esfuerzos por demostrar el 5º postulado de Euclides!
Alhazen (Ibn al Haytham, 965-1039), quien es una persona muy destacada considerada por algunos el primer científico, en su famosa obra "Kitab al Manazir" -un libro de óptica traducido ligeramente al castellano- pone una importancia inmensa en la prueba matemática de cada hipótesis de la naturaleza. Una vez más aparece la geometría aplicada a un aspecto de la vida cotidiana -la óptica- desde los tiempos pasados. En el siglo 13 su obra ganó mucho respecto dentro del mundo europeo a causa del aporte que le ofreció el castellano, cuando las dos culturas árabe y española se encontraron. Su traducción de aquella época -bajo el título "De aspectibus"- afectó todo el pensamiento matemático de las generaciones siguientes, como se revela en el conocido libro "Perspectiva" -de nuevo del castellano provenido- por Roger Bacon.
Alhazen, en su intento por demostrar el 5º postulado de Euclides, comenzó considerando un cuadrilátero trirrectángulo, el llamado cuadrilátero de Lambert (Rosenfield, 1988), y supuso que el lugar geométrico de un punto que se mueve permaneciendo a una distancia constante de una recta dada es siempre otra recta paralela a la dada. Esta proposición, según se demuestra en la época moderna, resultó ser equivalente a la presentada originalmente por Euclides, lo que le quita su carácter de demostración, permaneciendo así su carácter de postulado (*¿por qué?*).

Omar Khayyam (1050-1123) forma otro caso de combinación de las ciencias, donde el pensamiento geométrico tiene un lugar predominante (Strantzalos, 1988; Lambrou, Papadaki, Petresku, Strantzalos y Strantzalos, 2000). A los estudiantes les encanta ver, conocer y vivir la combinación de disciplinas, que incluso muchas veces se consideran antípodas, lo cual fortalece su espíritu de aprender, aun de lo que consideraban como ajeno a sus incumbencias. Así, acerca de Khayyam pueden apreciar que su estampa en la poesía contemporánea es tan importante como la que dejó sobre la geometría. Su obra "Sharh ma ashkala min musadarat Kitab Uqlidis", es decir, "Explicaciones de las dificultades encontradas en los postulados de Euclides", es trabajo pionero en su región y fuente de inspiración para la formación de geometrías no euclidianas en el futuro. Así como sus escritos -primeros en la historia- sobre el triángulo de Pascal, lo que le otorga justamente el título de gran matemático.
Khayyam no acordó con la supuesta demostración de Alhazen, por considerar los principios de Aristóteles sobre la ausencia de inclusión de movimientos en geometría. Este matemático propuso otra "demostración". Se esforzó en derivar ese postulado por alguno equivalente suyo. Aceptó la existencia de tres posibilidades y, razonando por el absurdo, rechazó ambas geometrías no euclidianas cometiendo de nuevo el error de usar como hipótesis lo que tenía que probar. Esas posibilidades tenían que ver con los ángulos formados cuando dos perpendiculares a la misma recta intersecan a otra. El caso de ángulos rectos coincide con lo establecido por Euclides, las otras dos se demostraron irreales, al menos según la propia opinión de Khayyam. Sin quererlo, había supuesto la verdad del postulado bajo prueba para llegar al fin.
A continuación se presentan en la clase otros intentos de demostraciones del 5º postulado. Para cada uno de ellos, los alumnos en sus grupos deben comentar con qué acuerdan y con qué no, y justificar sus apreciaciones: a) Intento de Ptolomeo (S. II d.C.); b) Intento de Boljai W. (1775-1856); c) Intento usando una propiedad de los triángulos; d) Intento de Saccheri (1667-1733). En todas ellas se incluyó la "demostración" respectiva (Guasco y Crespo Crespo, 1996).
Gauss (1777-1855), Lobatchewski (1793-1856) y Boljai (1802-1860) comenzaron a trabajar aceptando que pasa más de una paralela (esto coincide con la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri) y Riemann (1826-1866) aceptando que no pasa ninguna (coincide con la hipótesis del ángulo obtuso). Y... ¡en los desarrollos de estos trabajos no apareció contradicción alguna! *(Averiguar sobre estos matemáticos, básicamente sus nacionalidades y trabajos vinculados con los aspectos aquí mencionados).*
Cabe señalar que At-Tusi (1201-1274), oriundo de Tus, en Jorasán, también se esforzó por demostrar el 5º postulado de Euclides. Su "demostración" se basa en la siguiente hipótesis, que es equivalente al 5º postulado de Euclides: "Si una recta u corta perpendicularmente a otra recta w en el punto A, y si la recta v corta oblicuamente a w en B, entonces las perpendiculares trazadas desde v a u son

menores que AB del lado en que v forma un ángulo agudo con w, y mayores del lado en que v forma un ángulo obtuso con w”. *(Representar gráficamente).*

La obra sobre el problema de las paralelas (como también se lo llamó al 5º postulado de Euclides) de At-Tusi, el último de los tres precursores árabes de la geometría no euclídea, fue traducida y publicada por Wallis en el siglo XVII, y parece ser que esta obra fue el punto de partida de los desarrollos llevados a cabo por Saccheri durante el primer tercio del siglo XVIII.

Girolamo Saccheri intentó demostrar el postulado 5 por reducción al absurdo, es decir, intentó demostrar que si se parte de los cuatro primeros postulados y la negación del 5º, se puede llegar a una contradicción. Aunque suene un tanto paradójico, su intento fue muy importante ¡precisamente porque no tuvo éxito! (dejando a un lado lo que él mismo creyera al respecto). En efecto, al hacer demostraciones a partir de un conjunto de axiomas distinto del euclidiano estaba construyendo, aunque no fuera ésa su intención, la primera geometría no euclidiana.

En el siglo XIX varios geómetras construyeron deliberadamente geometrías de este tipo reiterando el procedimiento inaugurado por Saccheri, es decir, haciendo demostraciones a partir de sistemas de axiomas que incluían alguna manera de negar el 5º postulado. Esta historia nos muestra que el método axiomático no es solamente un método de justificación sino también un poderoso método de descubrimiento; fue, en efecto, su aplicación la que condujo al descubrimiento de las geometrías no euclidianas.

¿Cómo?

Que el 5º postulado (P5) se pueda demostrar a partir de los otros cuatro (P1... P4) significa, en símbolos, que: $(P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge P4) \Rightarrow P5$

Para demostrar que P5 no depende de los otros cuatro, es decir, que no es un teorema, basta con encontrar un ejemplo para el cual se verifique la negación de la implicancia. Esto es:

$\exists$ modelo matemático / $\neg[(P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge P4) \Rightarrow P5]$

O equivalentemente,

$\exists$ modelo matemático / $(P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge P4) \wedge \neg P5$

Puesto que dicho postulado, en una de sus versiones, establece la existencia y unicidad de la recta paralela a una recta dada que pasa por un punto dado, podemos negarlo de dos maneras: negando la existencia de esa paralela o negando su unicidad.

Postulados 1, 2, 3 y 4

+

Negación del Postulado 5

Por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela a dicha recta	Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela a dicha recta
=	=
Geometría hiperbólica	Geometría elíptica

Cuentan que el primero en darse cuenta de la independencia del postulado 5 y de la posibilidad de obtener nuevas geometrías fue el matemático alemán Gauss (1777-1855), que, por temor a las críticas, no publicó sus trabajos (*¿puede haber estado vinculada esta reacción con el hecho de que a él se lo conocía como "el príncipe de las matemáticas"?, ¿por qué lo llamaban así?*).
En próximas clases se inició el estudio sobre algunos modelos matemáticos (*¡que existen!* -se les anticipó a los alumnos-) de cada una de las geometrías no euclidianas.

Preguntas-eje

Unas de las preguntas iniciales frente al 5° postulado (o a cualquier otra enunciación equivalente, como por ejemplo: "Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a la misma") fueron:

- *¿Será verdadero? Es decir, ¿pasará una y sólo una paralela? ¿Y si no pasara ninguna? ¿Y si pasaran dos o más? Podría ser verdadero. Pero, en este caso, ¿no podrá deducirse de los otros cuatro y de las nociones comunes?*

Cuando el docente lo consideró oportuno, se fueron efectuando socializaciones (Cadoche, 2007) en todo el grupo-clase a partir de ciertas preguntas problematizadoras, del estilo:

- *¿Por qué es tan famoso el 5º postulado de Euclides? ¿Está bien expresado su nombre? Es decir, ¿se trata de un postulado o se lo sigue llamando así por tradición? ¿Qué requisitos debe cumplir una proposición para ser un postulado?, ¿y para no serlo? ¿Qué dicen los postulados 1, 2, 3 y 4?, ¿por qué consideras que la comunidad matemática no cuestiona el carácter de postulado de estas cuatro proposiciones?*

- *A lo largo de la historia, veinte siglos, los matemáticos se han esforzado por demostrar el quinto postulado de Euclides, o sea, quitarle su carácter como tal. ¿Lograron ese objetivo? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo? Si la respuesta es negativa, ¿qué lograron al respecto?*

- *¿Podrías dar detalles pertinentes sobre el surgimiento de las geometrías no euclidianas? Que hayan surgido otras geometrías, ¿significa el derrumbamiento de la geometría euclidiana?, ¿por qué?*

Algunos emergentes a partir del diálogo con los estudiantes

Pudimos categorizar las intervenciones de los estudiantes asociándolas a diversos aspectos, como se muestra a continuación.

En la etapa de recolección del material para las lecturas, se notó en los estudiantes una participación cargada de sentimientos, es decir, con comentarios acerca del rechazo o no del famoso postulado, que trascendían la lectura interpretativa de la bibliografía. Incluso su participación en el diálogo se fue dando mejor de lo esperado.

En el primer grupo, después de un primer contacto con el material y algunas explicaciones de los conceptos básicos por parte del profesor, dijeron: *Ni lo puedo imaginar. No se puede dibujar de ninguna manera. ¿Cómo podemos dudarlo?*

La siguiente declaración también se constituye en un indicador de la forma en que funciona frecuentemente el ser humano cuando se desvía de lo tradicional durante el proceso de aprendizaje (Moraleda, 1995): *¡Ahora viene esa duda!, cuando ya estoy en un lugar que he probado una cadena de ejercicios usándolo, algo que recuerdo muy bien. Todo el trabajo llevado a cabo desde hace años era ¡nada! en otras palabras. ¿Tengo que dudar también de otros axiomas y propiedades derivadas de ellos, dejándome en consecuencia el rechazo de su utilidad?*

Aunque hay una confusión entre las propiedades y los axiomas, que en la última etapa de secundaria se podría considerar ya bien resuelta, sin embargo cuando su sentimiento de seguridad y de autoestima -cultivada durante años- del propio estudiante, un comportamiento así tiene su justificación. En un tópico internacionalmente caracterizado como difícil en el imaginario de mucha gente, recurrir a los fundamentos del conocimiento podría llegar a generar, en parte, una especie de miedo. Este miedo constituye un reto indudable para el profesor de Matemática, que es equivalente a mantener el equilibrio entre lo didácticamente establecido, lo seguro, y lo que quiere generar como conocimiento contra la fuerza de la costumbre (Sábato, 1949).

En otro grupo, el estudiante protagonista verdaderamente posee talento en Matemática, aunque quizás demuestre a menudo cierta indolencia juvenil -que, no desconocemos, se afronta diariamente en las aulas y esto no es tan reciente (Krathwohl, 1949)-. Él manifestó: *Personalmente la versión de que hay más que dos rectas (versión de Lobatsevsky) satisface mi intuición, aunque nunca lo diría* *así, ni siquiera lo pensaría. La frontera que separa las dos categorías, las que intersecan y las que no intersecan, me hace pensar que esta recta se cuenta dos veces, así la conclusión se justifica inmediatamente.*

Para aclarar este último comentario, señalamos que este estudiante había encontrado en la biblioteca, y lo había subrayado como algo destacado -como lo es-, el famoso comentario que genera la geometría hiperbólica: "Todas las líneas rectas del plano con un punto en común, referenciándose con una recta dada, se separan en dos grupos: las que la intersecan y las que no. La línea divisoria de las dos clases de líneas es la deseada" (Rosenfield, 1988).

Nos sorprende bastante el uso de la palabra "frontera" por parte del estudiante, un uso topológico, aunque él no ha escuchado -y quizás no escuche en el futuro una introducción a la topología-.

El comentario del estudiante produce un diálogo con otro (de otro grupo, que se había limitado a registrar bibliográficamente lo que sucede cuando se pone en duda el famoso postulado) como consecuencia, donde este último dijo: *Yo me inclino más a la versión de dos o más rectas que a la de ninguna. Diría que puedan ser más que dos, infinitas, ya que la recta, como lo hemos aprendido desde las clases del principio, no tienen anchura, de manera que una pueda considerarse como muchas.*

Naturalmente no fue lo anterior lo que condujo a Lobachevsky a inventar su geometría. No obstante forma un punto de vista, que sostiene un comportamiento activo hacia el proceso de aprendizaje y especialmente en la región de lo desconocido. Aunque se exprese un pensamiento falso, la libertad propia de expresarse así, directamente, adecuadamente como si fuera un interlocutor adiestrado afecta el resto de la clase. Es la asertividad como objeto de desarrollar cuando se enseña Matemática.

Uno de los grupos de estudiantes, que se había dedicado a encontrar a Khayyam preparando su lectura: *Para nosotros, el descubrimiento de un nombre así, el de Khayyam, nos aumentó las ganas en seguir una etapa más para refutar el postulado, porque estamos involucrados en la Literatura y nos pareció muy interesante que un representativo de las Letras se haya encargado de la teoría de Euclides. Su poesía famosa nos hizo recordarlo años antes de esta clase, ¡ahora encontrarlo de nuevo en la Matemática!*

El profesor les preguntó: *¿Les parece tan raro que un famoso hombre de la Literatura se dedicó tan profundamente a la Matemática?*

Inmediatamente respondieron: *Claro que sí. Nos intriga el hecho que se puede combinar el pensamiento de las ciencias llamadas románticas con eso de las aplicadas, que define una contradicción con lo que estamos acostumbrados desde la escuela primaria, los que tienen talento en Matemática, Física, etc. y, los demás, que están inclinados al material teorético.*

Acá vemos que el tan importante sentido de autoestima (Branden, 1995), con el consiguiente alentamiento para participar en la clase, se reforzó con la combinación

de disciplinas, disminuyendo lo más posible la frontera entre los tradicionalmente divididos tópicos de la enseñanza.
A partir de la parte de sus cuadernos que dedicaron a analizar cada uno de los intentos de demostración -del 5° postulado- presentados en el material-base, inferimos que la mayoría de los estudiantes no manifestó ninguna inclinación específica hacia alguno de ellos en particular. Asimismo se puede insinuar una tendencia a los intentos más recientes que los antiguos.

Reflexiones finales

Para que enseñar geometría con su historia tenga sentido, consideramos que los objetivos de ese espacio deberían superar el mero dato anecdótico o estrictamente biográfico, desde lecturas predeterminadas, y enmarcarse en propuestas con preguntas desafiantes, que problematicen, del estilo -creemos- de las presentadas.
Además, pensamos que enseñar geometría con su historia puede mejorar la actitud de los alumnos hacia la geometría, y quizás Matemática en general, porque precisamente así no debería el docente esforzarse en "vender" un producto armadito para que el alumno lo "consuma" a-críticamente. Las interpretaciones de los acontecimientos históricos, donde se utilizaban conocimientos específicos en circunstancias puntuales, estarían permitiendo alimentar la justificación de esta faz "utilitaria" de la Matemática ante los aprendices. También, mediante la historia de la geometría, se pueden ir recorriendo situaciones que muestren la otra faz de la Matemática, la que tiene que ver más bien con lo "formal".
Además, ¡cuánto nos queda por aprender aún de nuestros antecesores en relación al amor por el conocimiento! (Aunque también evidenciamos el retroceso de aportes al conocimiento por eventuales críticas a personas puntuales). Sobre este aspecto también se puede dialogar con los alumnos.
Al incluir en forma integrada el aspecto histórico-epistemológico de la construcción del conocimiento matemático, y en particular geométrico, no se lo ubica al alumno desde una posición pasiva de receptor de verdades acabadas; sino, por el contrario, se estaría presentando el contenido desde una posición más cercana a su construcción, desde sus limitaciones, marchas y contramarchas, lo cual le daría un carácter más humano y más acorde a una concepción de aprendizaje científico como proceso permanente de construcción. Aquí, particularmente lo hicimos involucrando uno de los descubrimientos -el de las geometrías no euclidianas- que cambiaron la forma de pensar los conceptos matemáticos desarrollados desde la Antigüedad hasta el Renacimiento.
En este sentido, consideramos que la historia de la geometría debe ocupar un espacio en las clases de la escuela secundaria porque así se les estaría mostrando, y sobre todo permitiendo experimentar, a los alumnos una imagen de ciencia viva (Zapico, 2006), en el sentido de que no es algo de lo que ya no se discute o que siempre fue así; sino más bien que los estudiantes vayan teniendo ideas sobre las sucesivas evoluciones de la construcción del conocimiento científico, así como

saber que los resultados y procedimientos asociados no fueron siempre como los conocemos hoy, con lo cual queda la puerta abierta sobre cómo serán mañana.

Bibliografía

Branden, N. (1995). *Los seis pilares de la autoestima*. Barcelona: Paidós.

Cadoche, L. (2007). Habilidades sociales y rendimiento en un entorno de aprendizaje cooperativo. *Premisa 9* (34), 31-36.

Guasco, M.J. y Crespo Crespo, C. (1996). *Geometría, su enseñanza*. Buenos Aires: Red Federal de Formación Docente Continua, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación y CONICET.

Krathwohl, W.C. (1949). Effects of industrious and indolent work habits on grade prediction in college mathematics. *Journal of Educational Research 43*, 32-40.

Lambrou, M., Papadaki, M., Petresku, T., Strantzalos, A. y Strantzalos, P. (2000) *Mia kainourgia prosegisi tis didaskalias tis Euklideas Geometrías sto Likio*. Likio Athinon: Piramatiko.

Moraleda, M. (1995). *Comportamientos sociales hábiles en la infancia y adolescencia.* Valencia: Promolibro.

Petakos, K. (2009). Mathematical thought before the fall of an empire the Cardinal Bessarions vita sum numa et arte Plato. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 71-77.

Rosenfield, B.A. (1988). *A history of Non Euclidean geometry, Evolution of the concept of a geometric space*. New York: Springer Verlag.

Sábato, E. (1949). *El túnel*. Buenos Aires.

Santaló, L. (1966). *Geometrías no euclidianas*. (3ª. Ed.). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Strantzalos, P. (1988). *Ekseliksi efklidion ke mi efklidion geometrion*. Athina: Kardamitsas.

Thomaidis, I. (1992). I sxoliki geometría i enia xoru ke i mi efklidies. *Efklidis G* (32), 23-42.

Zapico, I. (2006). Enseñar matemática con su historia. *Premisa 6* (28), 3-8.

Instituto Educativo Superior Tecnológico de Atenas (ATEI) y Academia Turística Rhodes (ASTER) (Grecia).

Universidad Nacional de Rosario (UNR) y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) (Argentina).