

Problemas y Soluciones

Coordinador: Leandro R. Cagliero

Invitamos a los lectores a proponer nuevos problemas para compartir y a enviar soluciones. Los problemas propuestos deben ser acompañados de una solución y de cualquier comentario que crean apropiado.

Los problemas y soluciones pueden ser enviados por correo a la dirección de la REM o preferentemente por correo electrónico a revm@mate.uncor.edu en un archivo de algún procesador de textos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sucesiones casi Cauchy

Problema 1.

Recordemos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es de Cauchy si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{N < m, n} |a_m - a_n| = 0.$$

En este problema decimos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es *casi Cauchy* si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{N < m, n < 2N} |a_m - a_n| = 0$$

¿Es verdadero o falso que toda sucesión casi Cauchy es convergente?

Matrices hermitianas

Problema 2.

Si A es una matriz $n \times n$ con entradas complejas, denotamos con $|A|$ la matriz $n \times n$ tal que $(|A|)_{ij} = |A_{ij}|$. ¿Para qué valores de n es verdadera la siguiente afirmación?

Si A es una matriz $n \times n$ hermitiana y semidefinida positiva, entonces $|A|$ es también una matriz hermitiana y semidefinida positiva.

Funciones aritméticas

Problema 3.

Una función aritmética $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice *completamente multiplicativa* si $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo par de números naturales a, b . Demostrar que f es completamente multiplicativa si y sólo si

$$\sum_{ab=n} f(a)f(b) = \delta(n)f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

donde $\delta(n)$ es la cantidad de divisores naturales de n .