El contraejemplo en la producción de conjeturas de propiedades geométricas

Götte, Marcela - Renzulli, Fernanda - Scaglia, Sara
Santa Fe (FHUC- UNL)
mgotte@fhuc.unl.edu.ar

1. Introducción

Uno de los principales desafíos que afrontan los educadores matemáticos es promover en los alumnos la comprensión del rol que cumplen el razonamiento y la demostración en matemática (Hanna y de Villiers, 2008). La geometría, por su parte, constituye "el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, culminando en la enseñanza secundaria con el trabajo con demostraciones" (NCTM, 2003; p. 43). Atendiendo a estas consideraciones, un objetivo de nuestro trabajo es el diseño de propuestas que recreen en el aula (en la medida de lo posible) el tipo de actividades propias del quehacer matemático, en particular, el planteo de conjeturas y la validación de las mismas a partir de argumentos matemáticos.

En esta comunicación nos centramos en el análisis previo y en el estudio de las respuestas de los alumnos de una propuesta de actividades diseñada con el fin de generar la exploración, el planteo de conjeturas y la búsqueda de contraejemplos para el enunciado de las propiedades de las diagonales de los paralelogramos.

La propuesta se implementó en un curso de futuros profesores de Educación Especial en Sordos e Hipoacúsicos de un instituto de nivel terciario (en la ciudad de Santa Fe, Argentina).

2. Marco teórico

Desde el punto de vista del sujeto, "una conjetura es una observación hecha por una persona quien no tiene dudas acerca de su verdad. La observación de la persona deja de ser una conjetura y se convierte en un hecho según su visión una vez que la persona obtiene certeza de su verdad" (Harel y Sowder, citados en Balacheff, 2008, p. 504).

Desde el punto de vista escolar, Itzcovich (2007; p.17) sostiene que la idea de la conjetura "es la producción de una 'sospecha', de un 'parecer', producto de una experiencia de trabajo. Es decir, confluyen en ella exploraciones, ensayos y errores, el uso de los datos conocidos y saberes disponibles que permiten establecer una información con cierto margen de certeza, aunque no es del todo posible, por los recursos utilizados hasta el momento, dar cuenta de que lo afirmado es así y no podría ser de otra manera".

Diversos autores destacan la importancia del planteo de conjeturas como una actividad previa a la de demostrar (Boero, 1999; Mariotti, 2006; Pedemonte, 2008; Reiss, 2008). Durante la producción de la conjetura, el estudiante elabora progresivamente su afirmación a través de una actividad argumentativa intensa. Posteriormente, durante el proceso de demostrar esta afirmación, el estudiante conecta de un modo coherente algunas de las justificaciones ("argumentos") producidas durante la construcción de la afirmación de acuerdo a una cadena lógica. En general, se ha puesto de manifiesto en algunas investigaciones que las actividades en las que se exige "probar que…" una determinada afirmación es verdadera no resultan efectivas para desencadenar la producción de argumentos (Mariotti, 2006). Las propuestas más efectivas, sostienen, están relacionadas con aquellas actividades en las que se requiere de la producción de una conjetura. "En este último caso es posible esperar que los argumentos surjan para alimentar el razonamiento y este tipo de situación es sugerida como útil para aproximar el tema de la demostración en la escuela por esta razón" (Mariotti, 2006; p. 189).

Para abordar la enseñanza de la demostración, Boero (1999) sostiene que "una mediación apropiada por parte del docente es necesaria para todos aquellos aspectos en los cuales hay una ruptura significativa con la cultura de todos los días: la forma de los enunciados, la estructura textual de las pruebas matemáticas, la naturaleza de los razonamientos permitidos, la organización peculiar de las teorías matemáticas, etc."

Pensar en la demostración en el aula, supone considerar la dimensión social de la demostración. En efecto, "la demostración tiene sentido respecto de una comunidad que comparte (más o menos implícitamente) los criterios de aceptabilidad de los argumentos en juego" (Mariotti, 2006; p.188). En la comunidad de matemáticos, existe una serie de criterios de aceptabilidad compartidos que son respetados por sus miembros para la elaboración de demostraciones. En la comunidad escolar, resultaría complicado trabajar a partir de estos cánones de aceptabilidad, por lo que es necesario 'aliviar' las exigencias si se espera tener algún éxito en la producción de justificaciones de las conjeturas enunciadas. El rol del profesor es el de "mediador cultural" que debe proponerse introducir a los estudiantes en los estándares de la validación matemática (Mariotti, 2006).

- Un contraejemplo es suficiente para invalidar un enunciado.
- En matemática, para debatir se puede apoyar en cierto número de propiedades o definiciones claramente enunciadas sobre las cuales se está de acuerdo.
- En matemática no se puede decidir la validez de un enunciado apoyándose sobre el hecho de que la mayoría de las personas presentes están convencidas de que ese enunciado es verdadero.
- En matemática los ejemplos que verifican un enunciado no son suficientes para probar que el mismo es verdadero.
- En matemática una constatación sobre un dibujo no es suficiente para probar que un enunciado es verdadero.

En este trabajo en particular se retomará el uso del contraejemplo, que constituye "un caso que desaprueba algo que podríamos haber considerado como un argumento válido" afirma Grimaldi (1998; p. 94). Este autor sostiene que "cuando queremos mostrar que una implicación […] no es una tautología, todo lo que debemos hacer es encontrar un caso para el que la implicación sea falsa; es decir, un caso en el que todas las premisas sean verdaderas pero que la conclusión sea falsa. *Este* caso proporciona un *contraejemplo* para el argumento y muestra que no es válido".

3. Metodología y diseño de la propuesta

El diseño, implementación y análisis de la propuesta lo encuadramos en el método investigación – acción (Elliot, 1990). Los métodos de recolección de datos utilizados son la observación (no participante), la recolección de artefactos escritos (producciones de los alumnos) y grabaciones en video (McKnight y col., 2000). Para analizar los datos se lleva a cabo la codificación (revisión del conjunto de datos como notas, transcripciones, etc., con la finalidad de determinar patrones que describan características particulares del fenómeno estudiado) y el análisis de contenido (que supone el desarrollo de procedimientos de categorización de datos) (McKnight y col., 2000).

La secuencia se implementó en un grupo de 3º año de futuros profesores de Educación Especial en Sordos e Hipoacúsicos de un instituto de nivel terciario (en la ciudad de Santa Fe, Argentina) conformado por 18 alumnos. El docente a cargo de la asignatura es integrante del equipo de investigación.

3.1. Actividades propuestas y dinámica de la clase

Para el estudio de las propiedades de las diagonales de los distintos paralelogramos se proponen una serie de actividades grupales. El curso fue dividido en 6 equipos de 3 alumnos cada uno. Dos equipos trabajaron sobre el rectángulo, otros dos sobre el rombo y los dos restantes sobre el cuadrado. Como los enunciados de las actividades son similares (salvo el tipo de paralelogramo involucrado), se describen a continuación únicamente las actividades propuestas para los dos grupos que trabajaron sobre el rectángulo.

> *ACTIVIDAD 1*
> *¿Qué condiciones deben cumplir las diagonales de un cuadrilátero para que sea un rectángulo? Escribir la respuesta en este papel.*
>
> *ACTIVIDAD 2*
> *Pensar y dibujar cuadriláteros que no sean rectángulos pero que cumplan las condiciones dadas.*

Una vez que los dos equipos que trabajan sobre el mismo cuadrilátero terminan la actividad 1, se retiran sus producciones y se intercambian para que cada equipo responda a la consigna de la actividad 2. Cuando el grupo receptor logra dibujar un cuadrilátero que invalida las condiciones planteadas por el grupo emisor, se da esta información al grupo que las ha elaborado, para que rehaga su trabajo, tratando de producir nuevas condiciones que superen la limitación de la figura. Luego las nuevas condiciones regresan al grupo que controla, para que busque nuevos contraejemplos. El objetivo de este intercambio es que se puedan elaborar las condiciones necesarias y suficientes para las diagonales de cada paralelogramo.

La razón por la que se decide el intercambio es la de evitar situaciones en las que sea el profesor el que termina validando las producciones de cada grupo en la actividad 1. Se obliga así a los estudiantes a ejercer el control sobre las producciones propias y las de sus compañeros. Ante la posibilidad de que los estudiantes no encuentren contraejemplos aunque estos existan, la docente del grupo prepara dibujos de cuadriláteros especiales, que satisfacen determinadas características. En la siguiente sección se describen las figuras preparadas por el docente, que están en relación directa con las posibles respuestas dadas por los estudiantes a la actividad 1.

Una vez que se ha logrado un enunciado de condiciones satisfactorio para las propiedades de las diagonales de los paralelogramos, se pasa a las actividades de enunciar la conjetura referida a las diagonales de cada cuadrilátero y a su justificación, aunque el estudio de esta última no se abordará en el presente trabajo.

3.2. Análisis previo de las actividades

3.2.1. Análisis de la actividad 1

La resolución de esta actividad supone conjeturar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las diagonales de un cuadrilátero para que sea rectángulo, rombo o cuadrado[1].
Las respuestas de los alumnos podrían conducir a alguno de los siguientes casos:

I. Enunciado de condiciones necesarias y suficientes para la obtención de cada paralelogramo especial. Se trata de la respuesta adecuada.

II. Enunciado de condiciones suficientes pero no necesarias, para el caso del rectángulo y del rombo[2]. En este caso, las condiciones definen un subconjunto propio de esos paralelogramos especiales. Con el objeto de depurar el conjunto de condiciones (que definen un paralelogramo que cumple más condiciones que las que se necesitan) el equipo receptor deberá construir una figura que desde el punto de vista lógico no constituye un contraejemplo[3].

III. Enunciado de condiciones necesarias pero no suficientes para la obtención de cada paralelogramo especial. En este caso, se podrían obtener figuras que no son los paralelogramos deseados[4]. Estas respuestas ameritan de parte del equipo receptor la construcción de un contraejemplo.

IV. Enunciado de condiciones no necesarias ni suficientes. En este caso, se pueden obtener cuadriláteros no deseados. Como en el caso anterior, el equipo receptor deberá construir un contraejemplo.

A continuación se enuncian algunas posibles respuestas que podrían formular los alumnos respecto de las condiciones que deben cumplir las diagonales de un cuadrilátero para obtener los paralelogramos especiales:

p: Las diagonales son perpendiculares.

q: Las diagonales son iguales.

r: Cada diagonal corta a la otra en su punto medio.

t: Sólo una diagonal corta a la otra en su punto medio.

$p \wedge q$: Las diagonales son iguales y perpendiculares.

$p \wedge r$: Las diagonales son perpendiculares y cada una corta a la otra en su punto medio (respuesta correcta para el ROMBO).

$p \wedge t$: Las diagonales son perpendiculares y sólo una de ellas corta a la otra en su punto medio.

$q \wedge r$: Las diagonales son iguales y cada una corta a la otra en su punto medio (respuesta correcta para el RECTÁNGULO).

$q \wedge t$: Las diagonales son iguales y sólo una corta a la otra en su punto medio.

$p \wedge q \wedge r$: Las diagonales son perpendiculares, iguales y cada una corta a la otra en su punto medio (respuesta correcta para el CUADRADO).

$p \wedge q \wedge t$: Las diagonales son perpendiculares, iguales y sólo una corta a la otra en su punto medio.

3.2.2. Análisis de la actividad 2

Como se ha indicado, en caso de que las condiciones formuladas por un equipo no sean necesarias y suficientes, el equipo receptor debe dibujar figuras que permitan mejorarlas. Esas figuras pueden constituir o no contraejemplos desde el punto de vista lógico (según se vio en la sección anterior) razón por la cual de aquí en adelante las denominamos ‘figuras superadoras’. En la sección 3.1 se indica que el docente tiene preparadas un conjunto de figuras que podrían utilizarse en caso de que el grupo receptor no encuentre cuadriláteros que funcionen como contraejemplos o que sirven para depurar las condiciones. A continuación presentamos el análisis realizado desde un punto de vista lógico, con el objeto de construir un número mínimo de figuras adecuadas para utilizar en estas situaciones.
En la primera columna de los cuadros 1, 2 y 3 se enumeran las filas. En la segunda columna se indica si la respuesta del alumno corresponde a los casos I, II, III o IV señalados en la sección 3.2.1. Las posibles respuestas se encuentran enumeradas en la columna 3 de cada cuadro. En la columna 4 se enuncian afirmaciones que son consecuencias lógicas de las afirmaciones incluidas en la columna 3. En la columna 5 se describen las condiciones que habría que añadir a la figura para que los alumnos del equipo emisor se vean ‘obligados’ a mejorar la respuesta a la actividad 1. En la columna 6 se señalan las condiciones que deben reunir las diagonales para obtener figuras superadoras de la respuesta inicial (inadecuada, que figura en la columna 3) del grupo emisor.

RECTANGULO RESPUESTA ADECUADA: $q \wedge r$					
Nº fila	Casos determinados por las condiciones	Posibles respuestas para el rectángulo	Proposiciones resultantes	Para que sea figura superadora se debe añadir	Características de las diagonales de la figura superadora
1	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	p		$\neg q \vee \neg r$	$p \wedge (\neg q \vee \neg r)$
2	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	q		$\neg r$	$q \wedge t$
3	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	r		$\neg q$	$r \wedge \neg q$
4	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	t			t
5	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$p \wedge q \Rightarrow$	p q	$\neg r$	$p \wedge q \wedge t$
6	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$p \wedge r \Rightarrow$	p r	$\neg q$	$p \wedge r \wedge \neg q$ ROMBO NO CUADRADO
7	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$p \wedge t \Rightarrow$	p t		$p \wedge t$
8	I. Respuesta adecuada.	$q \wedge r$			
9	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$q \wedge t \Rightarrow$	q t		$q \wedge t$
10	II. No se trata de contraejemplo, pero deben depurarse condiciones	$p \wedge q \wedge r \Rightarrow$	p q r $p \wedge q$ $p \wedge r$ $q \wedge r$		$p \wedge q \wedge r$ CUADRADO
11	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$p \wedge q \wedge t \Rightarrow$	p q t $p \wedge q$ $p \wedge t$ $q \wedge t$		$p \wedge q \wedge t$ ROMBOIDE CON DIAGONALES IGUALES

Cuadro 1. Estudio de respuestas para la construcción de figuras superadoras en el caso del rectángulo

En primer lugar notemos que en la fila 2 hemos tomado como característica de las diagonales de la figura superadora la condición $q \wedge t$, en lugar de $q \wedge \neg r$, ya que si se cumple la primera también se cumple la segunda dado que $t \Rightarrow \neg r$.
En efecto, sea ABCD cuadrilátero y sean las proposiciones m: “AC interseca a BD en su punto medio” y n: “BD interseca a AC en su punto medio”. La proposición t (sólo una diagonal corta a la otra en su punto medio) equivale a afirmar que en ABCD se cumple $\neg m \wedge n$ (o de manera análoga $m \wedge \neg n$), y la proposición r (cada diagonal corta a la otra en su punto medio) equivale a afirmar $m \wedge n$.
Pero: $\neg m \wedge n \Rightarrow \neg m$ (por la regla de simplificación conjuntiva) $\Rightarrow \neg m \vee \neg n$ (por la regla de amplificación disyuntiva) $\Rightarrow \neg(m \wedge n)$ (por De Morgan). Luego, $t \Rightarrow \neg r$.
Este razonamiento también es válido para la fila 5.
El objetivo de la descripción exhaustiva de las posibles respuestas es hallar un número mínimo de figuras que constituyan figuras superadoras. En ese sentido, se observa que las figuras resultantes en las filas 6, 10 y 11 permiten abarcar todos los casos. En efecto, la figura resultante:

- en la fila 6 cumple las condiciones $p \wedge r \wedge \neg q$ y por lo tanto cubre los casos correspondientes a las filas 1, 3 y 6. Se trata de una figura cuyas diagonales son perpendiculares, se cortan en su punto medio y no son iguales, por tanto, es un ROMBO NO CUADRADO.
- en la fila 10 cumple las condiciones $p \wedge q \wedge r$ y por lo tanto cubre los casos correspondientes a las filas 1, 2, 3, 5, 6 y 10. Sus diagonales son perpendiculares, se cortan en su punto medio y son iguales. Se trata de un CUADRADO.
- en la fila 11 cumple las condiciones $p \wedge q \wedge t$ y por lo tanto cubre los casos correspondientes a las filas 1, 2, 4, 5, 7 9 y 11. Sus diagonales son perpendiculares, sólo una corta a la otra en su punto medio y son iguales. Se trata de un ROMBOIDE CON DIAGONALES IGUALES.

ROMBO RESPUESTA ADECUADA: $p \wedge r$					
Nº fila	Casos determinados por las condiciones	Posibles respuestas para el rectángulo	Proposiciones resultantes	Para que sea figura superadora se debe añadir	Características de las diagonales de la figura superadora
1	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	p		$\neg r$	$p \wedge t$
2	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	q		$\neg p \vee \neg r$	$q \wedge (\neg p \vee t)$
3	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	r		$\neg p$	$r \wedge \neg p$
4	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	t			t
5	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$p \wedge q \Rightarrow$	p q	$\neg r$	$p \wedge q \wedge t$
6	I. Respuesta adecuada.	$p \wedge r \Rightarrow$	p r		
7	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$p \wedge t \Rightarrow$	p t $\neg r$		$p \wedge t$
8	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$q \wedge r \Rightarrow$	q r	$\neg p$	$q \wedge r \wedge \neg p$ (cubre casos correspondientes a filas 2,3,8) RECTÁNGULO NO CUADRADO
9	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$q \wedge t \Rightarrow$	q t		$q \wedge t$
10	II. No se trata de contraejemplo, pero deben depurarse condiciones	$p \wedge q \wedge r \Rightarrow$	p q r $p \wedge q$ $p \wedge r$ $q \wedge r$		$p \wedge q \wedge r$ (cubre casos correspondientes a filas 1,2,3, 5,6,10) CUADRADO
11	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$p \wedge q \wedge t \Rightarrow$	p q t $p \wedge q$ $p \wedge t$ $q \wedge t$		$p \wedge q \wedge t$ (cubre casos correspondientes a filas 1,2,4, 5,7,9, 11) ROMBOIDE CON DIAGONALES IGUALES

Cuadro 2. Estudio de respuestas para la construcción de figuras superadoras en el caso del rombo

Mediante un análisis similar al realizado para el cuadro 1, se observa en el cuadro 2 que las figuras resultantes en las filas 8, 10 y 11 permiten abarcar todos los casos.

CUADRADO RESPUESTA ADECUADA: $p \wedge q \wedge r$					
Nº fila	Casos determinados por las condiciones	Posibles respuestas para el rectángulo	Proposiciones resultantes	Para que sea figura superadora se debe añadir	Características de las diagonales de la figura superadora
1	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	p		$\neg r \vee \neg q$	$p \wedge (t \vee \neg q)$
2	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	q		$\neg p \vee \neg r$	$q \wedge (\neg p \vee t)$
3	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	r		$\neg p \vee \neg q$	$r \wedge (\neg p \vee \neg q)$
4	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	t			t
5	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	$p \wedge q \Rightarrow$	p q	$\neg r$	$p \wedge q \wedge t$
6	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	$p \wedge r \Rightarrow$	p r	$\neg q$	$p \wedge r \wedge \neg q$ (cubre casos correspondientes a filas 1,3,6) ROMBO NO CUADRADO
7	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$p \wedge t \Rightarrow$	p t $\neg r$		$p \wedge t$
8	III. Contraejemplo Respuesta incompleta	$q \wedge r \Rightarrow$	q r	$\neg p$	$q \wedge r \wedge \neg p$ (cubre casos correspondientes a filas 2,3,8) RECTÁNGULO NO CUADRADO
9	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$q \wedge t \Rightarrow$	q t		$q \wedge t$
10	I. Respuesta adecuada.	$p \wedge q \wedge r \Rightarrow$	p q r $p \wedge q$ $p \wedge r$ $q \wedge r$		
11	IV. Contraejemplo Respuesta inadecuada	$p \wedge q \wedge t \Rightarrow$	p q t $p \wedge q$ $p \wedge t$ $q \wedge t$		$p \wedge q \wedge t$ (cubre casos correspondientes a filas 1,2,4, 5,7,9, 11) ROMBOIDE CON DIAGONALES IGUALES

Cuadro 3. Estudio de respuestas para la construcción de figuras superadoras en el caso del cuadrado

Nuevamente se observa que las figuras resultantes de tres filas (6, 8 y 11 respectivamente) resultan útil para cubrir todos los casos.
Resumiendo los cuadros anteriores, se pone de manifiesto que las figuras superadoras que deben construirse son sólo 4 (ver fig. 1):

- Rombo no cuadrado (P de la fig. 1)
- Rectángulo no cuadrado (R de la fig. 1)
- Cuadrado (S de la fig. 1)
- Romboide con diagonales iguales (M de la fig. 1).

Como se pondrá de manifiesto en el estudio de respuestas, algunas de estas figuras fueron utilizadas en la implementación de la secuencia, para que los alumnos mejoren el enunciado de condiciones.

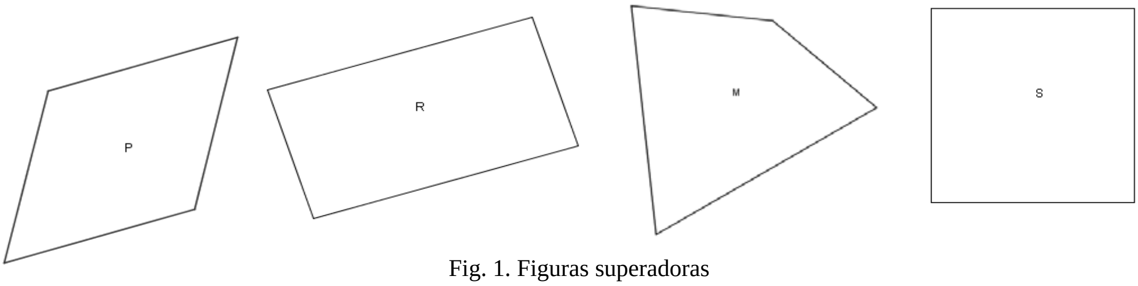

Fig. 1. Figuras superadoras

4. Estudio de respuestas
En la presente comunicación, por limitaciones de extensión, se focaliza el estudio en el análisis de las condiciones planteadas por los equipos emisores y en las figuras superadoras construidas por los receptores como respuesta a las condiciones planteadas por cada grupo emisor.

Análisis del intercambio Grupo Emisor GRE1-Grupo Receptor GRE2

Actividad 1: Las condiciones enunciadas por el Grupo Emisor GRE1 son las siguientes:

> "Las diagonales tienen que ser iguales, congruentes, y q' se corten en su pto. medio."

Se trata de una descripción completa de las condiciones que deben cumplir las diagonales de un rectángulo (q $\wedge$ r de la sección 3). Es una respuesta correspondiente al caso I (condiciones necesarias y suficientes) Por tanto no es posible encontrar para estas respuestas figuras superadoras.

Actividad 2: El grupo Receptor GRE2 construye las siguientes figuras:

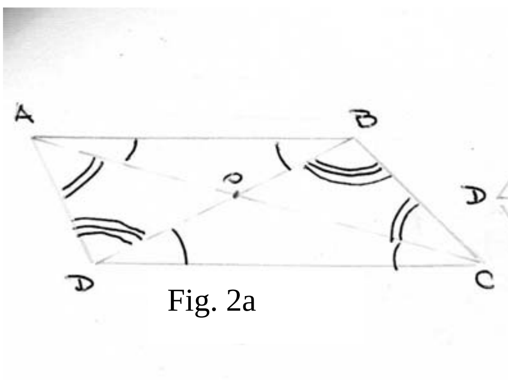

Fig. 2a

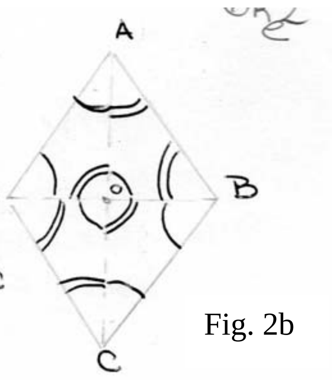

Fig. 2b

A partir de las marcas de ángulos inferimos que las figuras son paralelogramos. Cabe señalar que se observan algunos errores en la identificación de ángulos congruentes (por ejemplo, en la primera figura es inadecuado afirmar la congruencia de los ángulos ODC y OAB). Los dos cuadriláteros (por tanto) cumplen con la condición r, en tanto que el segundo cumple también la condición p.
Se evidencia en la respuesta de este grupo una dificultad para interpretar globalmente la consigna. Deben dibujar cuadriláteros que cumplan con las tres condiciones mencionadas y las figuras dibujadas sólo cumplen la primera y la última.

Análisis del intercambio Grupo Emisor GRE2-Grupo Receptor GRE1

Las condiciones enunciadas por el grupo emisor GRE2 son las siguientes:

> "Las diagonales deben ser congruentes y unirse en un punto medio".

El enunciado de condiciones es adecuado (q $\wedge$ r respectivamente de la sección 3). La respuesta corresponde nuevamente al caso I de la sección 3.2.1.

Grupo Receptor GRE1

Como en el caso anterior, no existen contraejemplos dado que las condiciones planteadas por el grupo emisor son correctas.

En un primer abordaje de la actividad, las alumnas dibujaron dos cuadrados en los que se cumple que las diagonales son congruentes y se cortan en su punto medio ($q \wedge r$), y además son perpendiculares (p). Posteriormente anulan esta resolución y añadieron la frase "no se puede". En definitiva, este grupo logra reconocer que no existen contraejemplos.

Análisis del intercambio Grupo Emisor GRO1-Grupo Receptor GRO2

Las condiciones enunciadas por el grupo emisor GRO1 son las siguientes:

> "Un cuadrilátero para que sea rombo debe tener las diagonales perpendiculares y éstas deben ser iguales."

Se trata de las condiciones $p \wedge q$ de la sección 3.2.1, en tanto que la respuesta adecuada incluye las condiciones $p \wedge r$. Se trata de una respuesta del tipo IV (condiciones no necesarias ni suficientes) y corresponde a la fila 5 del cuadro 3, por tanto, un contraejemplo debe reunir las condiciones $p \wedge q \wedge \neg r$ o $p \wedge q \wedge t$. Es decir, cabe aquí el uso como contraejemplo de un romboide con diagonales iguales.

Grupo Receptor GRO2

La producción del grupo receptor GRO2 se conforma por el dibujo de cuatro cuadriláteros. Las leyendas correspondientes a cada cuadrilátero fueron añadidas por el grupo emisor GRO1 en la siguiente fase.

Para las condiciones dadas por el grupo emisor existen contraejemplos, pero los dibujados por este grupo no son los adecuados. En primer lugar dibujan un cuadrado que es un rombo especial, por tanto no cumple con el pedido de que la figura no sea rombo.

Los restantes cuadriláteros dibujados no son rombos, como se pide para que sea un contraejemplo. Ninguno de los tres posee las diagonales perpendiculares y en el segundo dibujo (paralelogramo propiamente dicho) tampoco son iguales. Por lo tanto este grupo no cumplió con la consigna pedida.

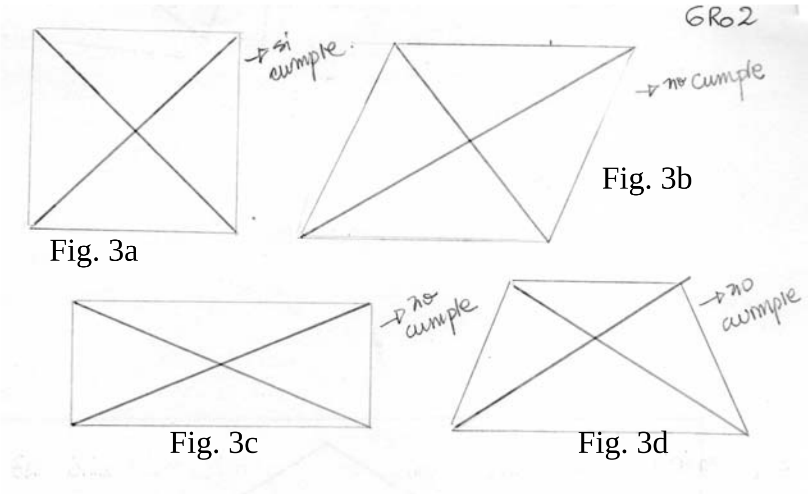

Fig. 3a Fig. 3b Fig. 3c Fig. 3d

Grupo Emisor GRO1:

Debido a que los contraejemplos no son adecuados, interviene el docente que entrega al grupo emisor GRO1 dos figuras: P (rombo no cuadrado) y M (romboide con diagonales iguales) con el fin de que se rehaga la actividad 1. A partir de esta intervención los alumnos enuncian correctamente las condiciones que deben cumplir las diagonales de un cuadrilátero para que sea rombo.

Análisis del intercambio Grupo Emisor GRO2-Grupo Receptor GRO1

Las condiciones enunciadas por el Grupo Emisor GRO2 son las siguientes:

- "las diagonales deben cortarse en su punto medio
- " " son perpendiculares entre sí".

Las condiciones planteadas por el grupo emisor son correctas ($p \wedge r$ respectivamente).

Grupo Receptor GRO1:

> "NO SE PUEDE!!!!
> Al no ser las diagonales iguales no se puede cortar en su punto medio."

Se evidencian dos respuestas. En primera instancia los alumnos contestan que "NO SE PUEDE!!!". Hasta aquí se interpreta que resuelven correctamente la consigna, dado que no es posible encontrar cuadriláteros que no sean rombos, tengan sus diagonales perpendiculares y se corten en su punto medio. Sin embargo la siguiente frase "Al no ser las diagonales iguales no se puede cortar en su punto medio" complica la interpretación pues es falso que las diagonales deben ser iguales para que puedan cortarse en su punto medio. Por lo tanto esta resolución resulta ambigua y confusa y una interpretación más profunda requiere una indagación mediante algún otro instrumento de recolección de datos como por ejemplo una entrevista.

Análisis del intercambio Grupo Emisor GCU1-Grupo Receptor GCU2

Grupo Emisor GCU1

"En todo cuadrilátero, para que sea cuadrado:

- las diagonales deben cortarse en un punto medio.
- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Las diagonales deben ser iguales entre sí."

Las condiciones enunciadas son incompletas, dado que falta mencionar la perpendicularidad de las diagonales. Además, se plantea una condición relacionada con los ángulos opuestos por el vértice que resulta superflua (s: los ángulos opuestos por el vértice son iguales). Las alumnas no logran diferenciar entre condiciones específicas para este caso particular (el cuadrado), de características que se cumplen en todos los cuadriláteros (las diagonales de cualquier cuadrilátero convexo se intersecan determinando ángulos opuestos por el vértice, y cualquier par de ángulos opuestos por el vértice son iguales).

Grupo Receptor GCU2

"Rombo: Cuadrilátero que no es cuadrado, pero que cumple con las mismas condiciones:

- Las diagonales se cortan en un punto medio.
- Los $\angle$ opuestos por el vértice son iguales.
- Las diagonales son perpendiculares."

El contraejemplo presentado no cumple todas las condiciones pedidas por el grupo emisor. Las alumnas dibujan un rombo cuyas diagonales se cortan en el punto medio pero no son congruentes. Además, añaden una condición (perpendicularidad de las diagonales) que no fue planteada por el grupo emisor. Se trata por tanto de un contraejemplo inadecuado.

Grupo Emisor GCU1

Interviene el docente entregando al grupo para que rehaga las respuestas la figura R (rectángulo no cuadrado). Las nuevas condiciones enunciadas son las siguientes:

"• Las diagonales deben cortarse en un punto medio.
• Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
• Las diagonales deben ser congruentes."

A pesar de que el grupo dispone de un contraejemplo introducido por el docente (una figura que cumple con las condiciones planteadas y que sin embargo no es cuadrado), las nuevas condiciones planteadas son las mismas, sólo se cambia el término 'iguales' por 'congruentes'.
En definitiva, el grupo emisor no logra plantear las condiciones necesarias y suficientes para las diagonales del cuadrado.

Análisis del intercambio Grupo Emisor GCU2-Grupo Receptor GCU1

Grupo Emisor GCU2

"Las diagonales se deben cortar en un punto medio."

De las tres condiciones que deben exigir a las diagonales para que la figura resulte un cuadrado ($p \wedge q \wedge r$), este grupo sólo menciona una: las diagonales se cortan en su punto medio (r).

Grupo Receptor GCU1

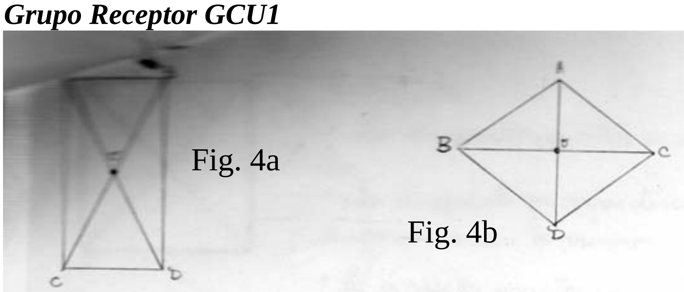

Fig. 4a

Fig. 4b

Dibuja dos contraejemplos adecuados: un rectángulo y un rombo no cuadrados ($q \wedge r \wedge \neg p$ y $p \wedge r \wedge \neg q$ respectivamente). Estas figuras cumplen con la condición de que sus diagonales se cortan en el punto medio. Al grupo emisor le falta enunciar dos condiciones: igualdad y perpendicularidad de las diagonales. Los contraejemplos tienen cada uno una de esas condiciones. La producción del grupo receptor ha sido, por tanto, óptima.

Grupo Emisor GCU2

"Cuadrado:

- Las diagonales se cortan en un punto medio.

- Las diagonales son perpendiculares y ambas diagonales miden lo mismo.
- Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
- Las zonas en las que queda dividida el cuadrado por las diagonales son iguales."

En la segunda oportunidad enuncian las tres condiciones necesarias y suficientes, pero además añaden dos condiciones redundantes s: "Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes" y u: "Las zonas en las que queda dividida el cuadrado por las diagonales son iguales".

5. Resumen de respuestas y algunas reflexiones

En el cuadro 4 se pone de manifiesto que la mitad de los grupos enuncia correctamente las condiciones para las diagonales de los cuadriláteros en la primera instancia. De ellos, dos grupos receptores interpretan adecuadamente la ausencia de contraejemplos y uno propone contraejemplos inadecuados (GRE2).

Tres grupos deben mejorar las condiciones. En estos casos, un solo grupo receptor (GCU1) elabora dos figuras superadoras adecuadas. En los casos restantes interviene el docente.

Cabe mencionar que los dos grupos que trabajaron sobre el cuadrado tuvieron dificultades, coincidiendo con el hecho de que es la figura cuyas diagonales cumplen el mayor número de condiciones.

	Grupo	**Respuesta grupo emisor**	**Figura grupo receptor**	**Figura superadora presentada por el docente**
Rectángulo	GRE1	$q \wedge r$ (Adecuada)	GRE2: Fig. 2a: r Fig. 2b: $p \wedge r$ (Inadecuadas)	No corresponde
	GRE2	$q \wedge r$ (Adecuada)	GRE1: No propone figuras superadoras.	No corresponde
Rombo	GRO1	$p \wedge q$ (Inadecuada)	GRO2: Fig. 3a: $p \wedge q \wedge r$ Fig. 3b: $r \wedge \neg p \wedge \neg q$ Fig. 3c: $q \wedge r \wedge \neg p$ Fig. 3d: $q \wedge \neg p$ (Inadecuadas)	$p \wedge q \wedge \neg r$ $p \wedge q \wedge t$
	GRO2	$p \wedge r$ (Adecuada)	GRO1: No propone figuras superadoras	No corresponde
Cuadrado	GCU1	$q \wedge r \wedge s$ (Inadecuada)	GCU2: $r \wedge p \wedge s$ (Inadecuada)	$q \wedge r \wedge \neg p$
		$r \wedge s \wedge q$ (Inadecuada)		
	GCU2	R (Inadecuada)	GCU1: Fig. 4a: $q \wedge r \wedge \neg p$ Fig. 4b: $r \wedge p \wedge \neg q$ (Adecuadas)	
		$r \wedge p \wedge q \wedge s \wedge u$ (Adecuada)		

Cuadro 4: Resumen de los intercambios

Cuando fue necesario mejorar las condiciones, el intercambio entre grupos dio el resultado esperado en un solo caso: a raíz del contraejemplo presentado por el GCU1, el grupo GCU2 rehace correctamente las condiciones. En los otros dos casos, interviene el docente proveyendo los contraejemplos adecuados.

De los seis grupos, uno solo (GCU1) termina las actividades con un enunciado erróneo de las condiciones. Se observa aquí una limitación de la implementación de la propuesta, dado que no se tuvo la oportunidad de que los grupos expongan sus conclusiones. En la puesta en común, suponemos que se hubiese puesto de manifiesto esta situación.

Siguiendo a Sessa (2008), consideramos importante ofrecer la oportunidad en la clase de que los alumnos "junto a docentes produzcan matemáticas, es decir, en donde resuelvan problemas, discutan, elaboren ideas a partir de las resoluciones y formulen nuevas preguntas; no en un lugar fosilizado donde se reproduce matemática, en donde el alumno intente recordar de memoria o mecánicamente los conceptos ya elaborados". Las actividades han posibilitado la generación de conjeturas (adecuadas o no) y la búsqueda de contraejemplos (aunque algunos grupos fracasaron en hallarlos). La riqueza de este tipo de trabajo en el aula de matemática amerita continuar explorando y mejorando el diseño de propuestas similares.

6. Bibliografía

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. y Mante, M. (1992). Iniciación al razonamiento deductivo en el colegio. Versión no publicada, trad. por I. Saiz. Press Universitaire de Lyon-IREM.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 501-512.

Boero, P. (1999). Argumentación y Demostración: Una Relación Compleja, Productiva, e Inevitable en Las Matemáticas y en la Educación Matemática. Disponible en http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html. Fecha de captura: 01/06/08.

Elliot, J. (1990). *La investigación-acción en educación.* Madrid: Morata.

Grimaldi, R. (1998). *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. México: Addison Wesley Longman.

Hanna, G. y de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 40, 329-336.

Itzcovich, H. (coord.) (2007). *La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: Aique

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotterdam: Sense Publishers; 185-216.

McKnight, C., Magid, A., Murphy, T. y McKnigt, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. Rhode Island: American Mathematical Society.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada: S.A.E.M. Thales.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 385-400.

Reiss, K.M., Heinze, A., Renkl, A., y Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM Mathematics Education*, 40, 455-467.

Sessa, C. (2008). *Problemas y soluciones. Derribando metáforas: docentes y alumnos productores*. Entrevista diario El Litoral, 11/06/08.

---

[1] Un cuadrilátero es rectángulo sí y solo sí sus diagonales son iguales y se cortan en su punto medio. Un cuadrilátero es rombo sí y sólo sí sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio. Un cuadrilátero es cuadrado sí y sólo sí sus diagonales son iguales, perpendiculares y se cortan en su punto medio.

[2] El enunciado: "Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, se cortan en su punto medio y son iguales, entonces el cuadrilátero es un rombo" constituye una implicación verdadera. El recíproco, sin embargo, es falso, dado que en todo rombo se verifica que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio. La exigencia de igualdad no es necesaria, y conduce a la obtención de un tipo particular de rombo: el cuadrado.

[3] El cuadrado, siguiendo con el ejemplo de la nota anterior, no constituye un contraejemplo de rombo, dado que el cuadrado es rombo.

[4] El enunciado: "Si un cuadrilátero es un rombo, entonces sus diagonales son perpendiculares" es verdadero. La posesión de diagonales perpendiculares es una condición necesaria pero no suficiente para obtener un rombo. Por ejemplo el romboide también posee las diagonales perpendiculares, y sin embargo no es un rombo. Por ello afirmamos que el enunciado de condiciones necesarias puede conducir a la obtención de algún otro cuadrilátero no deseado.