Lógica Simbólica y Lógica Aplicada a la Matemática.

Hernán González

I. Introducción.

La función fundamental de la Lógica es ayudar a distinguir los razonamientos válidos de los no válidos. Se ocupa de la "forma" de los razonamientos. No debe estar dentro del ámbito de la Lógica opinar sobre la verdad o falsedad de las proposiciones elementales y de ciertas proposiciones no elementales.

Distinto es el caso de la Lógica Aplicada a una dada disciplina: con ayuda de la lógica se trata de encontrar el camino de una verdad a otra verdad.

En este artículo hablaremos primero de la Lógica Simbólica, cuyo objeto de estudio son expresiones formadas con símbolos y conectores lógicos. La Lógica Simbólica descubre la forma de expresiones llamadas tautologías. Cuando trabajamos dentro de una disciplina, en nuestro caso la Matemática, los símbolos de la Lógica Simbólica son reemplazados por proposiciones de la matemática, y entonces las tautologías adquieren el sentido de expresiones que nos conducen de proposiciones verdaderas a proposiciones verdaderas.

Luego de ver las cuestiones principales de la Lógica Simbólica, la aplicaremos a la Matemática, y siempre dentro de la matemática, concluiremos introduciendo las funciones proposicionales y los cuantificadores lógicos.

Este trabajo tiene como objetivo ayudar a armar un curso para alumnos del primer año de la universidad, con la pretensión que al final del mismo tengan herramientas no sólo para entender las demostraciones matemáticas sino también para encarar ellos mismos las más accesibles. Damos por descontado que si alcanzamos estos objetivos, necesariamente los alumnos tendrán más herramientas para resolver ejercicios y problemas.

II. La Lógica Simbólica.

Los objetos de la Lógica Simbólica son las variables o símbolos proposicionales.

Preferiblemente denotaremos las variables proposicionales con las letras del alfabeto posteriores a p, tanto minúsculas como mayúsculas, con y sin subíndices.

Como los **símbolos proposicionales no son proposiciones**, carece de sentido asignarles valor de verdad, por lo tanto **definimos**:

Cada símbolo proposicional puede tomar uno de los valores del conjunto de números {0,1}.

Se definen en la lógica simbólica **operadores lógicos** que aplicados a variables proposicionales nos permiten obtener estructuras complejas que llamaremos **expresiones**. Para simplificar la escritura diremos que una variable es una expresión simple.

Cuando el operador afecta a una única expresión se llama monádico, y cuando afecta a dos expresiones se llama diádico.

Tablas de Definición de los operadores lógicos.

Ya establecimos que una variable lógica puede tener el valor 0 o el valor 1. Los operadores se definen estableciendo la relación entre los valores de los operandos y el valor del resultado. Esto puede simbolizarse construyendo las siguientes tablas, que definen la acción de los operadores que utilizaremos:

El operador monádico "no":($\neg$)

p	$\neg$p
1	0
0	1

El operador diádico "o" (incluyente): ($\vee$)

p	Q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

El operador diádico "o" (excluyente): ($\underline{\vee}$)

p	Q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

El operador diádico "y": ($\wedge$)

P	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

El operador diádico "implica": ($\Rightarrow$)

P	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

El operador diádico "si y solo si" o "bicondicional": ($\Leftrightarrow$)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

En la relación: $p \Rightarrow q$, llamamos **antecedente** a p, y **consecuente** a q.

Existe un orden de precedencia para los operadores lógicos, pero teniendo en cuenta que todos ellos tienen distinta prioridad, la lectura sin paréntesis requiere cierto entrena-miento. Por otro lado aceptar que el $\neg$ tiene la máxima prioridad resulta natural, y nos permite escribir menos paréntesis. Hacemos entonces el siguiente convenio: solamente tendremos en cuenta que el de más alta prioridad es el $\neg$, y en los demás casos ordena-remos utilizando los paréntesis.

Tablas de valores lógicos.

Supongamos que P es una variable compleja (o expresión) que contiene en su estructura n variables simples o elementales.

Como cada una de las variables elementales puede valer 1 o 0, hay que analizar el comportamiento de P en cada uno de los 2^n casos posibles para determinar su valor en cada caso.

Una herramienta útil para analizar la relación entre los valores de las variables simples que forman una variable compuesta y el valor de esta última es la Tabla de valores lógicos. Se construye generalizando la idea que utilizamos para definir los operadores.

Supongamos que P contiene las variables elementales: q, r, y s, entonces armamos la tabla de valores lógicos de la siguiente forma:

Q	R	s	P
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

Luego completamos la columna correspondiente a P analizando los valores que corresponden a cada fila. Veamos: En la primera fila de la tabla precedente las tres variables elementales toman valor 1. Corresponde que debajo de cada operador que actúe sobre las variables elementales se coloque el valor que toma por definición, cuando las variables valen 1. Luego nos ubicamos debajo de los operadores que actúan sobre los valores que calculamos en el primer paso, y usando las definiciones calculamos los valores que les corresponden. Así seguimos hasta llegar al último operador, cuyo valor, será el de toda la expresión, para la combinación de valores de la primera fila.

Luego operamos de la misma forma en el resto de las filas.

Después de dar la siguiente definición haremos un ejemplo.

Expresiones lógicas equivalentes

Dadas dos expresiones que contienen las mismas variables simples, si cualesquiera sean los valores de las variables simples las expresiones tienen el mismo valor, diremos que son **lógicamente equivalentes**. En este caso el bicondicional que las une siempre tiene valor 1.

Ejemplo:

Si construímos la tabla de valores lógicos para:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\neg (p \wedge \neg q)$
1	1	1	1	1 0 0
1	0	0	1	0 1 1
0	1	1	1	1 0 0
0	0	1	1	1 0 1

Encontramos que p $\Rightarrow$ q es equivalente a $\neg$ (p $\wedge$ $\neg$ q)

El orden en que construímos la tabla es el siguiente: primero completamos las columnas de la "implicación" y la del "no" de la q. Luego seguimos con la columna del "y", y después con la del "no" de la conjunción. Terminamos con la columna de la doble implicación.

Leyes lógicas o Tautologías.

Las **expresiones que siempre tienen valor 1** se llaman **Tautologías** o **Leyes lógicas**.
Algunas de las Leyes más importantes de la Lógica Simbólica son:

Ley del tercero excuido:

$p \vee \neg p$

Idempotencia:

$(p \vee p) \Leftrightarrow p$ $\qquad$ $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

Asociativa:

$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ $\qquad$ $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

Conmutativa:

$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ $\qquad$ $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

Distributiva:

$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ $\qquad$ $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

De Morgan:

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Razonamiento válido

Un **razonamiento:** $[\{p_1, ..., p_n\},q]$ cuenta con un conjunto de expresiones llamadas premisas: $\{p_1, ..., p_n\}$, y una expresión llamada conclusión: q.

Si la implicación: $((p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \Rightarrow q)$ **es una tautología**, decimos que **es un razonamiento válido**.

El razonamiento válido más utilizado es el llamado

Modus Ponens, y se deriva de la tautología:

$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

Mencionemos otros razonamientos válidos:

Modus tollendo ponens, se deriva de cada una de las tautologías:

$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$ $((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p$

Modus tollendo tollens, se deriva de la tautología:

$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

Ley aditiva, se deriva de la tautología:

$p \Rightarrow (p \vee q)$

Silogismo condicional o ley transitiva, se deriva de la tautología:

$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Ley del contrarrecíproco, se deriva de las tautologías:

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

que implican:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

Ley de traslación, se deriva de las tautologías:

$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow$ $((p \wedge q) \Rightarrow r)$

Cuando apliquemos la lógica a la matemática no trabajaremos con variables simbólicas sino con auténticas proposiciones. Entonces, aunque las tablas de verdad mantengan su utilidad para descubrir razonamientos válidos, lo hacen a pesar de estar pensadas para trabajar con variables y no con auténticas proposiciones que tienen un valor de verdad definido. Entonces, seguir utilizando las tablas de verdad dentro de la Matemática puede contribuir a confundir los conceptos de lógica pura y lógica aplicada.

Preparando entonces un método que se adapte mejor a la Matemática, veremos ahora una forma de estudiar razonamientos válidos sin utilizar las tablas de valores.

Para eso comenzaremos observando que los operadores lógicos podrían haberse definido de la siguiente forma:

$\neg p$ tiene valor 1 sii p tiene valor 0

$p \wedge q$ tiene valor 1 sii p tiene valor 1 y q tiene valor 1

$p \vee q$ tiene valor 0 sii p tiene valor 0 y q tiene valor 0

$p \veebar q$ tiene valor 1 sii p y q tienen distinto valor

$p \Rightarrow q$ tiene valor 0 sii p tiene valor 1 y q tiene valor 0

$p \Leftrightarrow q$ tiene valor 1 sii p y q tienen el mismo valor

Prueba alternativa de la validez o invalidez de un razonamiento:

Para **probar la invalidez** de un razonamiento $[\{p_1,...,p_n\},q]$ procedemos así: Damos a q el valor 0. Ahora se analizan las premisas. Si podemos conseguir que todas las premisas tengan valor 1 manteniendo el valor 0 para q, habremos demostrado que la implicación asociada tiene valor 0, o lo que es igual, la **invalidez del razonamiento** que simboliza.

Ejemplo:

Queremos descubrir si la siguiente implicación permite construir un razonamiento válido:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \Leftrightarrow s)) \Rightarrow s$$

Para esto, suponemos que:

i) s tiene valor 0.

ii) Pero entonces para que $r \Leftrightarrow s$ tenga valor 1, también r debe tener valor 0.

iii) Ahora, de $(q \vee r)$ deducimos que q debe tener valor 1 para que la disyunción tenga valor 1.

Y finalmente:

iv) Si q vale 1, cualquiera sea el valor de p, la primera premisa tiene valor 1.

Como es posible asignar estos valores, deducimos que la implicación asociada no es válida y por lo tanto el razonamiento tampoco lo es. Observemos que la invalidez de una implicación se prueba dando un ejemplo en que sin violar las leyes de la lógica, las premisas tengan valor 1 y la conclusión valor 0 .

Para probar la **validez de un razonamiento** debemos suponer que las premisas tienen valor 1 y deducir que entonces, forzosamente la conclusión debe tener valor 1.

Ejemplo:

Estudiar la validez del siguiente razonamiento:

$(((p \vee q) \Rightarrow p) \wedge (q \vee p)) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Supongamos que $((p \vee q) \Rightarrow p)$ y $q \vee p$ tienen valor 1. Entonces por la conmutatividad: $p \vee q$ también tiene valor 1. Pero entonces por Modus Ponens, p tiene valor 1. Pero entonces, cualquiera sea el valor de q, $q \Rightarrow p$ tiene valor 1. Hemos probado que si las premisas tienen valor 1, entonces forzosamente la conclusión tiene valor 1. Por lo tanto la expresión analizada es un razonamiento válido.

Si no alcanzáramos el exito intentando encontrar el camino expuesto, debemos intentar probar la validez de la implicación contrarrecíproca.

En lógica podríamos hablar de un método de la contradicción para construir un razonamiento válido, pero resultará más claro explicar el Método de Reducción al Absurdo cuando estemos trabajando dentro de la Matemática.

Principio o Regla de Sustitución.

Si una expresión que es parte de una más compleja, es reemplazada por otra expresión equivalente, la nueva expresión compleja es equivalente a la original.

III. Lógica Simbólica Aplicada a La Matemática

Hasta recién nos estuvimos moviendo en un Universo de variables que podían tomar los valores 0 o 1. Ahora vamos a movernos dentro de un Universo completamente distinto: el de La Matemática. Los objetos de este Universo son muchos más, y distintos: Los Números Naturales, los Enteros, los Racionales, los Reales, y los Complejos. Se trabaja con las operaciones de suma(+), resta(-), etc. Se trabaja con funciones de muchos tipos, con Relaciones no funcionales, por ejemplo: la desigualdad, etc.

En este mundo existen los conceptos de Proposición Matemática y Verdad Matemática. Por ejemplo, simbolizan proposiciones de la Matemática: $1 \neq 0$, $3>2$, $-1<-4$, $2=1+1$, etc. De estas cuatro expresiones, la tercera simboliza una proposición que es Falsa.

Entonces: En la Lógica Aplicada **una proposición** es una afirmación perteneciente a la Teoría en la que estemos trabajando (En este caso La Matemática), que tiene uno y sólo uno de los dos valores de verdad: Verdadero o Falso. Generalmente simbolizaremos una proposición con alguna de las letras: p, q, r, s, ... etc.

En adelante, por abuso de lenguaje, también diremos que las proposiciones son expresiones.

En Matemática existen proposiciones primeras, llamadas Axiomas. También existen objetos primeros, por ejemplo los Naturales, y Relaciones primeras, todos establecidos en los Axiomas a partir de los cuales se comienza a trabajar. Con ayuda de La Lógica Aplicada descubrimos las propiedades de los objetos que se construyen. Para esto procedemos de esta forma:

i) Nuestros objetos de trabajo son los de la Matemática, y nos referimos a ellos construyendo proposiciones matemáticas. Cada proposición tiene entre otras, una propiedad: su valor de verdad. Este valor puede ser: Verdadero(V) o Falso(F)

ii) Simbolizamos de la misma forma que en la Lógica los conectores u operadores de la Lógica Matemática, y los definimos estableciendo una correspondencia entre el valor 1(0) de la variable lógica y el valor de verdad V(F) de la proposición

Matemática. Recordemos que las proposiciones matemáticas además de valor de verdad tienen significado, aunque en este momento no consideremos esa propiedad.

Insistimos sobre un punto: los operadores de la lógica de proposiciones no son los mismos que los de la lógica simbólica, pero los simbolizamos igual, pues están relacionados unos con otros. En matemática es común usar el mismo símbolo para distintos operadores, cuando estos operadores tienen algunas propiedades en común. Por ejemplo tanto para sumar reales, como para sumar matrices, usamos el símbolo: "+".

Extendiendo la correspondencia antes señalada, vamos a construir la Lógica Matemática.

Las Tablas de Valores no encuentran un correlato en la Lógica Matemática pues las proposiciones tienen un valor de verdad definido. No tiene sentido analizar en una misma tabla qué ocurre cuando $1 \neq 0$ es Verdadero y que ocurre cuando $1 \neq 0$ es Falso. Por lo tanto, los nuevos conectores, que llamaremos **conectores de la Lógica Proposicional Matemática**, se definen manteniendo el significado que surge de la correspondencia con los lógicos, o sea:

$\neg$ p es Verdadera sii p es Falsa

p $\wedge$ q es Verdadera sii p es Verdadera y q es Verdadera

p $\vee$ q es Falsa sii p es Falsa y q es Falsa

p $\underline{\vee}$ q es Verdadera sii p y q tienen distinto valor de verdad

p $\Rightarrow$ q es Falsa sii p es Verdadera y q es Falsa

p $\Leftrightarrow$ q es Verdadera sii p y q tienen el mismo valor de verdad

Si p $\Rightarrow$ q es Verdadera diremos que: "si p entonces q", "q si p", "p solo si q".

Si p $\Leftrightarrow$ q es Verdadera diremos que p si y solo si q y lo simbolizaremos p sii q

Decimos que una proposición es simple si no contiene conectivos lógicos, y compleja en caso contrario.

Trabajando en Lógica Aplicada no tiene sentido hablar de Tautologías, pues éstas son expresiones de la Lógica Simbólica, pero al querer avanzar en una demostración, muchas veces debemos recurrir a la **forma de una tautología** para dar el paso siguiente.

Ejemplo: Supongamos que bajo ciertas hipótesis, debe valer: $a \leq 0$, y en cierto paso de nuestra demostración llegamos a una implicación con consecuente: a<0. Entonces, teniendo en cuenta la **Ley Aditiva** podemos continuar así: $a<0 \Rightarrow (a<0) \vee (a=0)$. Luego usando la definición de $\leq$, damos el último paso: $((a<0) \vee (a=0)) \Rightarrow (a \leq 0)$.

Las implicaciones Matemáticas.

Cuando estamos trabajando dentro de una Teoría encontramos relaciones entre proposiciones que no están explicadas por la lógica sino por las propiedades de los objetos que estamos estudiando. Por ejemplo, trabajando con los Naturales podemos afirmar: si $a=1 \wedge b=2$, implica: $a+b=3$.

Conviene tener claro que el "implica" recién utilizado no tiene fundamento lógico, está fundamentado en una propiedad de los naturales y la suma entre naturales.

Ahora supongamos estar trabajando en $\mathbf{Z_3}$. En este caso podemos decir: si $(a=1 \wedge b=2)$, entonces: $a+b=0$.

Este tipo de relación tiene una explicación distinta, a la que tiene la implicación: $p \Rightarrow (p \vee q)$. Solamente hasta tener clara la cuestión, la simbolizaremos así:

En **N:** $(a=1 \wedge b=2) \rightarrow (a+b=3)$. En $\mathbf{Z_3}$**:** $(a=1 \wedge b=2) \rightarrow (a+b=0)$.

Veamos otro ejemplo: Supongamos que a y b son números reales. Si sabemos que a=0, podemos deducir que a.b=0 cualquiera sea b. Simbólicamente: $(a \in \mathbf{R} \wedge b \in \mathbf{R} \wedge a=0) \rightarrow a.b=0$

Otro ejemplo: Si a entero, entonces: $a=1 \rightarrow a+a=2$

Todas las implicaciones anteriores son **implicaciones de la Matemática**, pero siempre que aparezca una de ellas, podremos reemplazarla por una implicación de la lógica aplicada de acuerdo al siguiente razonamiento: Recordemos que definimos: $p \Rightarrow q$ es Falsa sii p es Verdadera y q es Falsa.

Por lo tanto si p y q son dos proposiciones y $p \rightarrow q$ es verdadera, se cumple que: si p es Verdadera, entonces q es Verdadera, pero entonces: $p \Rightarrow q$ es Verdadera, lo que nos permite afirmar que:

$(p \rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

De acuerdo a todo lo dicho anteriormente, la lógica nos autoriza a afirmar que en **N,** la implicación: $(a=1 \wedge b=2) \Rightarrow (a+b=3)$, es verdadera, y en $\mathbf{Z_3}$ la implicación: $(a=1 \wedge b=2) \Rightarrow (a+b=0)$, es verdadera, y la implicación: $(a \in \mathbf{R} \wedge b \in \mathbf{R} \wedge a=0) \Rightarrow a.b=0$, es verdadera, y también: $(a \in \mathbf{Z} \wedge a=1) \Rightarrow a+a=2$, es verdadera.

A partir de este momento, todas las relaciones y leyes que hemos descubierto en la Lógica Simbólica pueden trasladarse a la Lógica Matemática con los cambios de significado correspondientes.

Diremos que dos **proposiciones** son **equivalentes** cuando cada una implica a la otra y viceversa.

Ley General de una Demostración: Si una proposición que es parte de una más compleja, es reemplazada por otra proposición equivalente, la nueva expresión compleja es equivalente a la original. Si en una proposición se reemplaza una parte por su igual matemático se obtiene una proposición equivalente.

Tenemos todas las herramientas para generar los procedimientos deductivos que la Lógica Matemática considera válidos.

Teorema y Demostración Matemática: Decimos que el **enunciado de una implicación** es un **Teorema** si su conocimiento implica consecuencias de cierta importancia. Un Teorema tiene una Hipótesis y una Tesis relacionadas por una implicación: H)$\Rightarrow$T). Por ahora, tanto nuestra hipótesis como nuestra tesis son proposiciones de la Matemática. **La hipótesis incluye, en general implícitamente, todos los axiomas relacionados al tema que estamos estudiando.**

Demostrar un Teorema significa encontrar un camino de la Hipótesis a la Tesis, una serie de proposiciones, tales que sea aceptado que la Hipótesis implica a la primera, una cualquiera que no sea la última implica a la siguiente, y la última implica a la Tesis. Esto es: encontrar un camino de H) a T).

Las proposiciones intermedias pueden ser complejas y para "recorrer" el camino de una a otra puede ser necesario demostrar varias implicaciones. Cada implicación puede ser de uno de los dos tipos mencionados: una implicación estrictamente **matemática**, o una implicación derivada de la **lógica** que estemos usando. En este momento, estamos estudiando la aplicación de la lógica simbólica a la matemática, que resulta en la **lógica de proposiciones**.

El concepto de razonamiento válido de la Lógica Simbólica, aplicado a la matemática, nos lleva a la siguiente:

Definición: $[\{H, p_2, p_3, ..., p_n\}, T]$ es la **demostración** de H)$\Rightarrow$T) sii es la **demostración** de que las siguientes implicaciones son **verdaderas**:

$(H \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge ... \wedge (p_n \Rightarrow T)$.

Entonces, demostrar un teorema equivale a demostrar que las **proposiciones**:
$H \Rightarrow p_2, ..., p_k \Rightarrow p_{k+1}, ..., p_n \Rightarrow T$, son todas verdaderas;

Antes dijimos que una demostración consiste en demostrar que un implica es verdadero. La definición que damos, simplemente pretende mostrar que la implicación puede resultar de aplicar la transitividad a varias implicaciones, y entonces comprender que:

En cada paso debemos tener en cuenta lo que sigue:
Siempre que debamos probar que $p \Rightarrow q$, debemos plantearnos 3 posibilidades:
i) Hacerlo utilizando el camino directo: suponer p Verdadera, y utilizando nuestros conocimientos previos, deducir la verdad de q. En este caso, en ningún momento debemos suponer la verdad de q.
ii) Hacerlo utilizando el camino contrarrecíproco: suponer que $\neg q$ es Verdadera, y utilizando nuestros conocimientos previos, deducir la verdad de $\neg p$. En este caso, en ningún momento debemos suponer la verdad de $\neg p$. Luego, utilizando la correspondencia con la Ley Lógica del contrarrecíproco, deducimos la validez de la implicación: $p \Rightarrow q$.
iii) Utilizando el **Absurdo:** Suponer que $p \wedge \neg q$ es Verdadera y utilizando nuestros conocimientos previos llegar a una contradicción. Si razonamos bien, esto indicaría que la suposición original era falsa, y si p es verdadera, no queda otra posibilidad que deducir la negación de $\neg q$, o sea: la verdad de q.

Por lo tanto cada vez que nos enfrentemos a la demostración de un teorema o de una implicación, debemos imaginar cuales de esos tres caminos será el más fácil de recorrer, para comenzar por él.

Cuando decimos que queremos demostrar T) sin mencionar una hipótesis, asumimos que tomamos por hipótesis todo lo que sabemos hasta el momento. Estos conocimientos previos siempre se agregan implícitamente a nuestras hipótesis. O sea, cuando escribimos H)$\Rightarrow$T), queremos decir:

H$\wedge${Todos los conocimientos previos})$\Rightarrow$T)

Algunas formas de demostraciones en la Lógica Simbólica Aplicada.

Los casos que mencionaremos no constituyen una lista exhaustiva ni mucho menos, son solamente algunos de los más comunes. Pero pensamos que reflexionando sobre ellos se adquiere el método para construir la forma de encarar cualquier demostración, rompiendo la parálisis que suele impedirnos comenzar a transitar un camino que puede llevarnos al objetivo.

Comencemos analizando algunas formas elementales de Demostración(FD0, FDI,.., FDV, A0):

FD0: $p \Rightarrow r$

En este tipo de Demostración se parte de p y se trata de encontrar un camino que conduzca a r. Los conocimientos necesarios para recorrer este camino no son solamente las leyes lógicas, sino que esencialmente pertenecen a la disciplina en la que estemos trabajando.

FDI: $p \Rightarrow (r \wedge s)$

Debemos hacer 2 Demostraciones del tipo **FD0:**

i) $p \Rightarrow r$ y ii) $p \Rightarrow s$

FDII: $p \Rightarrow (r \vee s)$

Podemos hacer una de dos Demostraciones del tipo **FD0:**

i) $(p \wedge \neg r) \Rightarrow s$ o ii) $(p \wedge \neg s) \Rightarrow r$

FDIII: $(p \vee q) \Rightarrow r$

Debemos hacer 2 Demostraciones del tipo **FD0:**

i) $p \Rightarrow r$ y ii) $q \Rightarrow r$

FDIV: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

Es del tipo **FDIII**. Debemos hacer 2 Demostraciones del tipo **FD0:**

i) $\neg p \Rightarrow r$ y ii) $q \Rightarrow r$

FDV: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Es del tipo **FDII**.Podemos hacer una de dos Demostraciones del tipo **FD0:**

i) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ o ii) $(p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q$

A0: Es el absurdo de $p \Rightarrow r$:

Se prueba demostrando que: $p \wedge \neg r \Rightarrow$ Contradicción

El contrarrecíproco y el Absurdo

Ahora para algunos casos unamos las observaciones de recién con las otras 2 posibilidades de hacer una dada demostración: además del camino directo, por el contrarrecíproco y por el absurdo.

1) H) p **T)** r

i) Contrarrecíproca: Partimos de $\neg r$ y llegamos a $\neg p$

ii) Absurdo: Partimos de $p \wedge \neg r$ y utilizando conocimientos de la disciplina en donde estemos trabajando llegamos a una contradicción.

2) H) p **T)** $r \wedge s$

i) Contrarrecíproca: Debemos partir de $\neg r \vee \neg s$ y llegar a $\neg p$. Para eso debemos partir de $\neg r$ y llegar a $\neg p$. También debemos partir de $\neg s$ y llegar a $\neg p$.

Debemos poder recorrer los dos caminos.

ii) Absurdo: Debemos partir de p y $\neg r \vee \neg s$ y llegar a un absurdo. Esto equivale a demostrar 2 absurdos: $p \wedge \neg r$ por un lado y $p \wedge \neg s$ por el otro.

3) H) p **T)** $r \vee s$

i) Contrarrecíproca: Debemos probar que $\neg r \wedge \neg s$ implican $\neg p$.

ii) Absurdo: La condición: $p \wedge \neg r \wedge \neg s$ debe conducir a una contradicción.

4) H) $p \wedge q$ **T)**r

i) Contrarrecíproca: Hay que probar que: $\neg r \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Entonces hay que probar uno de los dos teoremas:

a) $(\neg r \wedge p) \Rightarrow \neg q$

b) $(\neg r \wedge q) \Rightarrow \neg p$

ii) Absurdo: Debemos probar que partiendo de:

$p \wedge q \wedge \neg r$ llegamos a una contradicción.

5) H) $p \vee q$ **T)** r

i) Contrarrecíproca: Debemos probar que $\neg r$ implica $(\neg p \wedge \neg q)$. Generalmente son 2 demostraciones:

$\neg r \Rightarrow \neg p$, y $\neg r \Rightarrow \neg q$

ii) Absurdo: Debemos probar que $(p \vee q) \wedge \neg r$ es un Absurdo.

Son 2 teoremas:

$p \wedge \neg r$ es un Absurdo, y $q \wedge \neg r$ es un Absurdo.

IV. Lógica de Primer Orden aplicada a la Matemática.

La Lógica de Primer Orden introduce las funciones proposicionales, y los cuantificadores lógicos que aplicados a funciones proposicionales nos devuelven proposiciones. Como finalmente trabajaremos con proposiciones, la Lógica Simbólica Aplicada resulta una parte de la Lógica de Primer Orden Aplicada.

Función proposicional: Función cuyo codominio es un conjunto de proposiciones de la Matemática.

Los conectivos de la lógica aplicada se extienden para que también actuen sobre una función proposicional, o entre funciones proposicionales dando por resultado otra función proposicional.

Los conectivos de la lógica aplicada pueden actuar entre una proposición y una función proposicional, si entendemos la proposición como una función proposicional constante.

Cuantificadores de la Lógica Aplicada.

Los cuantificadores son dos: el universal: $\forall$, y el existencial: $\exists$. Simbolizan funciones que tienen por dominio el conjunto de funciones proposicionales y por codominio un conjunto de proposiciones. Si D es un universo de funciones proposicionales y P un universo de proposiciones, y Dom(f) es el dominio de la función proposicional f, la forma de simbolizar estas funciones es la siguiente:

$\forall$:D->P, $\forall$(f)= ($\forall x \in$ Dom(f),f(x)). (Se lee: para todo x, efe de x). El significado es el siguiente: Cualquiera que sea el x en el dominio de f, f(x) es una proposición verdadera. Si el Dom(f) se sobreentiende puede escribirse: $\forall$x,f(x).

Ahora definimos:

Una función proposicional **f es Verdadera** sii $\forall x \in$ Dom(f),f(x) es verdadera. O sea: f(x)=($\forall$x,f(x)).

Veamos cual es la definición del $\exists$:

$\exists$:D->P, $\exists$(f)= ($\exists x \in$ Dom(f)/f(x)). (Se lee: existe x, tal que efe de x). El significado es el siguiente: Hay por lo menos un x en el dominio de f, tal que f(x) es una proposición verdadera. Si el Dom(f) se sobreentiende, podemos escribir: $\exists$x/f(x)

La Lógica de Primer Orden Aplicada se distingue de la Simbólica Aplicada sólo si los Dominios de las Funciones Proposicionales son infinitos. Si los dominios son finitos, las dos lógicas coinciden pues los cuantificadores expresan:

$$\forall x,\ p(x) \text{ es lo mismo que } p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \ldots \wedge p(x_n)$$

y

$$\exists x/\ p(x) \text{ es lo mismo que } p(x_1) \vee p(x_2) \vee \ldots \vee p(x_n)$$

Por lo tanto, la Lógica de Primer Orden Aplicada usa fuertemente a la Lógica Simbólica Aplicada. Una Demostración Matemática que involucre proposiciones está dentro del ámbito de la Lógica Simbólica Aplicada, y si hay Funciones Proposicionales con

Dominio infinito habrá que estudiar como operar con los cuantificadores.

Negación de la cuantificación de una función proposicional.

Observemos que el $\forall$ es una extensión del $\wedge$, y el $\exists$ es una extensión del $\vee$. Esto nos ayudará a comprender que:

$\neg(\forall x\in \text{Dom}(f), f(x))$ es equivalente a: $\exists x\in \text{Dom}(f)/(\neg f(x))$

y

$\neg(\exists x\in \text{Dom}(f)/f(x))$ es equivalente a: $\forall x\in \text{Dom}(f),(\neg f(x))$

Ahora podemos definir:

Una función proposicional f es **Falsa** sii no es Verdadera sii $\exists x\in \text{Dom}(f)/(\neg f(x))$

Observemos que la cuantificación de una proposición es la misma proposición.

Función proposicional simple y función proposiciónal compuesta: Una función proposicional que no contiene níngún conectivo lógico es simple, en caso contrario es compuesta.

Proposición simple y proposición compuesta: Una proposición que no resulta de una cuantificación y no contiene níngún conectivo lógico es simple. Una proposición que no resulta de una cuantificación y contiene algún conectivo lógico es compuesta.

Ampliaremos las nociones de Teorema y de Demostración utilizando los elementos de la Lógica de Primer Orden:

Teorema y Demostración Matemática: Agregamos a lo dicho cuando definimos estos conceptos para una Matemática de proposiciones las cuestiones referentes a las funciones proposicionales. Si la Hipótesis y la Tesis son funciones proposicionales, por ejemplo: h(x) y t(x), $h(x)\Rightarrow t(x)$ significa: $\forall x,(h(x)\Rightarrow t(x))$. Por supuesto que los dominios de h y t son los mismos.

Ahora, Demostrar un Teorema significa encontrar una serie de proposiciones o funciones proposicionales, según corresponda, tales que sea aceptado que la Hipótesis implica a la primera, una cualquiera que no sea la última, a la siguiente, y la última implica a la Tesis. Esto es: encontrar un camino de h(x)) a t(x)).

En este momento proponemos una tarea que permite avanzar mucho en la comprensión de la definición de la implicación lógica: Demostrar que: $P(x)=(x>5 \Rightarrow x>3)$ es verdadera. Ante todo hay que plantear lo intuitivo del resultado. Luego, para demostrarlo, tenemos que ver que para todo x, P(x) debe ser verdadera. Al estudiar los casos: x=6, x=4, y x=2, vemos que la implicación debe ser verdadera en: $V \Rightarrow V$, $F \Rightarrow V$, y $F \Rightarrow F$. Por supuesto, no debe ocurrir: $V \Rightarrow F$. Esto nos ayuda a comprender que la definición del implica permite que este resultado esté de acuerdo con nuestra intuición.

Las Verdades de la Matemática.

Supongamos haber demostrado que H)$\Rightarrow$T). Si además sabemos que H) es Verdadera, de las dos proposiciones Verdaderas:

H)$\Rightarrow$T) y de H) podemos deducir que T) es Verdadera. Este esquema es llamado por algunos autores: **Principio de Deducción** y es el que permite ir encontrando nuevas verdades a partir de otras ya conocidas. Es importante tener claro que la Verdad de H)$\Rightarrow$T) significa que suponiendo H) Verdadera, hemos razonado correctamente hasta llegar a T). Entonces la Verdad de H) implica la Verdad de T). Pero partiendo de una hipótesis falsa, un razonamiento correcto puede conducirnos a tesis verdaderas o falsas.

Se asume implícitamente que al demostrar un teorema o una implicación utilizamos como punto de partida todos los conocimientos de la Matemática adquiridos hasta ese momento. Insistimos en que si nos preguntamos como comienza este proceso, encontramos que en algún momento debimos partir de verdades que no hemos demostrado a partir de otras anteriores. Estas verdades primeras, en algún momento pueden ser reemplazadas por otras que permitan deducirlas. Pero en cada momento, existen algunas que consideramos primeras verdades. Estas proposiciones primeras son llamadas Axiomas.

Las demostraciones en la Lógica de Primer Orden Aplicada.

Observemos algunas cuestiones elementales:

i) p(x) es lo mismo que: $\forall$ x, p(x)

ii) si p(x) = p = cte, entonces:

$\forall$ x, p(x) y $\exists$ x / p(x) son iguales a p

iii) Si queremos probar que: $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x))$, basta probar que cualquiera sea x:

$p(x) \Rightarrow q(x)$

¿Qué significa probar que es válido el Teorema:

H) p(x) T) r(x)?

Debemos probar que para cada x que haga verdadera la Hipótesis p(x), se cumpla que la Tesis r(x) también es verdadera. No nos importa que pasa cuando p(x) es falsa. En este caso habremos probado que la implicación es siempre verdadera, que es el objetivo a perseguir para demostrar un teorema, pues cada vez que la Hipótesis sea cierta, será cierta la Tesis.

Veamos distintas formas de probar:

L0) H) f(x) T) g(x)

i) Directa: Suponemos que f(x) es verdadera para cierto valor de x. Utilizando recursos de la disciplina en que estemos trabajando debemos probar que g(x) también es verdadera para ese x.

ii) Contrarrecíproca: Debemos negar g(x) y llegar a la negación de f(x). Esto significa tomar un x tal que g(x) sea falsa. Para este x debemos probar que f(x) también resulta falsa. Observemos que desde el punto de vista operativo, todo lo visto para Lógica Simbólica Aplicada resulta suficiente para completar la demostración.

iii) Absurdo: Suponiendo que existe un x tal que $f(x) \wedge \neg g(x)$ sea verdadera debemos llegar a una contradicción.

L1) H) f(x) T) $\exists$ y/g(x,y)

i) Directa: Suponiendo que para un dado x, f(x) es verdadera, debemos encontrar un y, en general función de x, que haga verdadera a g(x,y). Este es el camino de la demostración, y se logra recorrer con recursos de la Matemática.

ii) Contrarrecíproca: Dado un x, debemos probar que:

$\forall$ y, $\neg$ g(x,y) implica $\neg$ f(x), o sea: $\neg$ g(x,y) implica $\neg$ f(x).

Para esto, suponiendo que (x,y) haga falso a g, debemos poder probar que f(x) también es falsa.

iii) Absurdo: Tomando como Hipótesis:

$f(x) \wedge (\forall y, \neg g(x,y))$ debemos llegar a una contradicción.

Por supuesto que pueden tratarse más casos, pero las ideas del camino que proponemos están expuestas.

Bibliografía

AGAZZI, EVANDRO. (1967) La Lógica Simbólica. EDITORIAL HERDER, Barcelona.

COPI, IRVING M. (1983) Introducción a la lógica. EUDEBA MANUALES. Buenos

Aires. Argentina.
HALMOS, PAUL R. (1967) Teoría intuitiva de los conjuntos. CECSA, España.
KLIMOVSKY, GREGORIO. (1999) Las desventuras del conocimiento científico. a-Z editora, Buenos Aires.
NOVELLI, ALFREDO. (1995) Elementos de Matemática. Editorial de la UNLu, Argentina.
REY PASTOR, J. Y OTROS. (1952) Análisis Matemático (1). Editorial Kapelusz, Buenos Aires.

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco.
Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería.
hernangonzalez@infovia.com.ar