Las paradojas, un vehiculo para superar obstáculos en el aprendizaje de la probabilidad

Héctor Agnelli – Susana Peparelli
Universidad Nacional de Río Cuarto
hagnelli@exa.unrc.edu.ar speparelli@exa.unrc.edu.ar

1.- Introducción

Existen numerosas investigaciones que provienen tanto del campo de la psicología como de la educación matemática relacionadas con heurísticas, sesgos y obstáculos en el abordaje de problemas probabilísticas. En estas investigaciones se sostienen que los estudiantes llegan a un curso de probabilidad con un bagaje de ideas acerca de la misma que han incorporado a través de experiencias informales de su vida cotidiana (Garfield y Ahlgren 1988). Así, pueden desarrollar su propia manera de razonar acerca de eventos cuya ocurrencia está caracterizada por la incertidumbre (Kanhneman y Tversky, 1973; Kanheman, Slovic, y Tversky 1982; y Konold 1991) y en consecuencia este proceso previo dificulta la comprensión correcta de la probabilidad formal. Muchas de las concepciones erróneas acerca de la probabilidad que tienen los estudiantes, a menos que se las trate específicamente, no desaparecen con un curso formal de probabilidades (Konold 1995, Leviatán 2002). Ante esta situación y considerando que el error constituye una fuente valiosa de información, que forma parte del proceso de construcción del conocimiento y que puede ser el motor que provoque un cambio en el aprendizaje del alumno, se hace necesario el diseño de actividades tendientes a superar fundamentalmente aquellas dificultades que persisten al finalizar la enseñanza. Desde este punto de vista parece recomendable para el tratamiento del tema en clase, trabajar con un conjunto de problemas prototípicos que permitan promover la discusión de los elementos básicos de la naturaleza aleatoria del fenómeno a modelar, la manera de construir el modelo, las herramientas a utilizar para hallar la solución y la interpretación que esta merece. Siendo la teoría de la probabilidad un campo especialmente rico en paradojas consideramos entonces, que el tratamiento de paradojas y cuasi-paradojas puede aportar elementos que permitan superar los conflictos y consolidar el aprendizaje de las nociones probabilísticas en el aula, posibilitando que el alumno argumente, discuta y revea sus conocimientos e intuiciones.

2.- Paradojas y cuasi-paradojas en la enseñanza

Las paradojas han desempeñado un papel importante en la evolución de las Matemáticas ya que su resolución ha exigido abandonar conceptualizaciones existentes estimulando el nacimiento de ideas matemáticas importantes.

Como ya se ha señalado la Probabilidad es un campo especialmente rico en paradojas las cuales, a diferencia de lo que ocurre en otras ramas de la matemática, se presentan tempranamente en el abordaje de nociones elementales de la teoría. El tratamiento en clase de las paradojas pueden ocasionar en el alumno el surgimiento de confusión e inseguridad temporal, pero estos conflictos cognitivos generados, creemos que son dispositivos pedagógicos útiles para la labor del docente.

Flores, en P*aradojas Matemáticas para la Formación de Profesores* (1999) presenta una secuencia para emplear en la formación de profesores basada en una paradoja y el análisis de la paradoja desde diversos campos de la matemática. El objetivo fundamental de su trabajo fue mostrar la necesidad de profundizar en los conceptos matemáticos y sus significados, que posibilitan la elucidación de la paradoja.

En el campo específico de la enseñanza de la probabilidad Leviatán (2002) propone un método que tiene como objetivo confrontar al alumno con sus dificultades para sortear posibles conflictos cognitivos. El método desarrollado tiene tres etapas: en la primera, previo al tratamiento de un tema se le solicita al alumno que responda un cuestionario sobre problemas que involucran el tema a desarrollar; en la segunda la discusión en la clase es acompañada por una selección de "cuasi-paradojas" probabilísticas y finalmente en la tercera se discute acerca de alguna famosa paradoja relacionada con el tema en tratamiento.

En los trabajos de Flores y Leviatán se explicita el rol que se le asigna a las "paradojas" y "cuasi-paradojas" cuando se las utiliza con fines de enseñanza

- *el empleo de paradojas matemáticas provoca conflictos cognitivos en el sujeto, de manera que se vea abocado a revisar de manera crítica sus concepciones y a adoptar nuevas soluciones*. (Flores).
- *La idea de tratarlas en clase no es la de socavar la confianza de los estudiantes en sí mismos, sino más bien reformular sus intuiciones.* (Leviatán)

Para la distinción entre paradojas y cuasi-paradojas que presentaremos, se asume que una paradoja probabilística es una situación problemática que puede arrojar más de un resultado, de allí que, siguiendo a Flores, pueda considerarse que en el abordaje de las mismas un sujeto se vea abocado a revisar de manera crítica sus concepciones y adoptar nuevas soluciones. Asimismo, tal como sostiene Leviatán, se asume como cuasi-paradoja a las situaciones que arrojan resultados contrarios a la intuición y al sentido común y que favorecen por tanto la reformulación de intuiciones.
Por otra parte, el análisis de las paradojas y cuasi-paradojas y sus resoluciones, permite considerar a las mismas como referentes de distintos campos de problemas y vehículo para generar situaciones de enseñanza que posibiliten la evolución de los conocimientos del alumno e integren el rechazo de obstáculos como parte del significado de un nuevo saber.

En este trabajo se presentaran algunas paradojas y cuasi-paradojas clásicas, señalando su *potencialidad educativa,* concluyendo con la determinación del significado de la probabilidad involucrado en cada una de ellas, los conceptos de la teoría de la probabilidad que contribuyen a su dilucidación y el obstáculo, heurística y/o sesgo que permitiría problematizar y por ende superar.
En algunos casos se presentará una tarea que pueda ser abordada en el aula, su resolución y análisis

2.1.- Paradojas

*** Paradoja de Bertrand**
Esta paradoja es un ejemplo de problemas relativos al azar cuyo resultado depende del método de resolución utilizado y forma parte de un conjunto de problemas de este tipo presentados por Joseph Bertrand en su libro *Calcul des probabilitiés* (1889), y cuyo enunciado es:

> *Dado un círculo y una cuerda sobre él, tomada al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud de dicha cuerda sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscripto en el círculo?*

Este problema plantea la cuestión de “seleccionar una cuerda al azar”, cabe preguntarse entonces, ¿qué significa seleccionar al azar?, ¿qué acción o mecanismo garantiza que una selección sea “al azar”?, ¿qué diferencia es posible establecer entre “trazar una cuerda” y “trazar una cuerda al azar”?. Teniendo en cuenta, además, que para que un razonamiento dé lugar a una paradoja es necesario situarlo, el trabajo con la paradoja de Bertrand en el aula debe garantizar la posibilidad de analizar distintas situaciones originadas a partir de diferentes maneras de trazar una cuerda y como cada una de ellas operativiza el azar de manera diferente. De allí que la tarea que se proponga debe reunir las características mencionadas.

Descripción de la tarea: se divide la clase en al menos 3 grupos de 2 o más integrantes. Cada grupo abordará el problema considerando una manera distinta para el trazado de la cuerda la cual es descripta en la tarea

> **Trazando cuerdas al “azar”**
> **Problema:** *Un triángulo equilátero de lado* ***a,*** *se inscribe en una circunferencia de radio* ***r****, si se traza sobre la circunferencia una cuerda al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el segmento de cuerda comprendido dentro del círculo sea mayor que la longitud del lado* ***a*** *del triángulo inscripto?*

Resolver el problema planteado suponiendo que el radio de la circunferencia es 1 y considerando los siguientes pasos para la determinación de la cuerda: (continua con una de las tres situaciones siguientes)

<u>Situación1</u>: Fijar un extremo P de la cuerda en la circunferencia y elegir al azar el otro extremo T en la circunferencia

<u>Situación 2</u>: Fijar un punto P en la circunferencia y elegir al azar un punto M del único diámetro que pasa por P. El punto M determina de forma única una cuerda perpendicular en M al diámetro.

<u>Situación 3</u>: Elegir al azar un punto M dentro del círculo y considerar la cuerda perpendicular en M al único radio que pasa por M.

En la resolución de esta tarea se pondrá en evidencia que la probabilidad buscada es diferente en cada una de las situaciones consideradas para el trazado de la cuerda, 1/3 en el caso 1, ½ en el 2, y ¼ en el 3.
Si se tiene en cuenta que el concepto de probabilidad se define como una función que a cada evento o suceso le asigna un número del intervalo [0; 1], ¿cómo es posible que la probabilidad de un evento tenga tres resultados distintos?
Es posible encontrar una explicación a esta aparente contradicción analizando los conceptos relacionados con la noción de probabilidad:
¿Cuál es el experimento aleatorio que debe modelizarse en cada uno de los casos? ¿y el espacio muestral asociado?
¿Cuál es el suceso o evento probabilizable en cada caso? ¿Cómo puede calcularse la probabilidad buscada?
Por lo tanto a partir del análisis de las distintas resoluciones es posible concluir que las mismas corresponden a problemas diferentes

<u>Resolución</u>
La representación grafica de cada situación se muestra en cada una de las figuras siguientes:

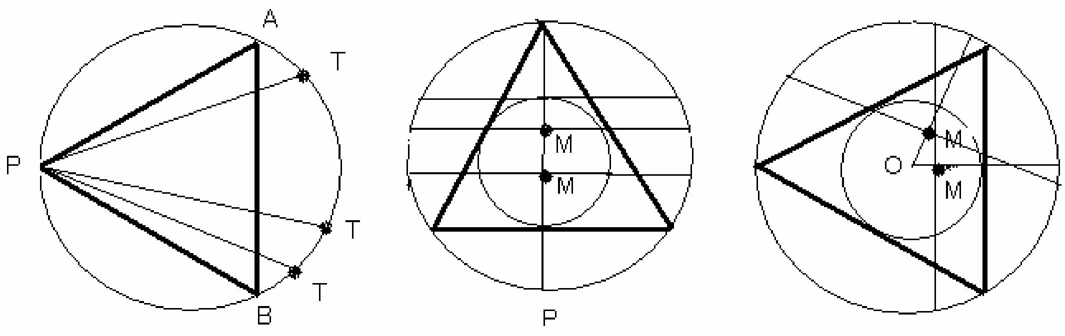

Fig.1 Fig.2 Fig.3

En todos los casos se asume que el círculo unitario está centrado en el origen
Situación 1:
El punto P se elige al azar sobre la circunferencia, luego, el espacio muestral es el conjunto de puntos de la circunferencia

$$S_1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\}$$

y el evento de interés E_1,está compuesto por los puntos del arco AB que no contiene a P (ver fig1),por lo tanto la probabilidad buscada, calculada utilizando probabilidad geométrica, es el cociente de dos longitudes

$$P(E_1) = \frac{2\pi / 3}{2\pi} = \frac{1}{3}$$

Situación 2:
En este caso el punto se elige al azar sobre el diámetro determinado por P (ver fig.2), así que el espacio muestral es

$$S_2 = \{(x,y)/\, x^2 + y^2 < 1 \;\wedge\; x = 0\}$$

y el evento de interés E_2 , está compuesto por los puntos que pertenecen al diámetro de la circunferencia inscripta en el triángulo, por lo tanto la probabilidad buscada, calculada utilizando probabilidad geométrica, es el cociente de dos longitudes

$$P(E_2) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Situación 3
En este caso el punto se elige al azar en el círculo, luego

$$S_3 = \{(x,y)/\, x^2 + y^2 < 1\}$$

y el evento de interés E_3 , está compuesto por los puntos que pertenecen al círculo inscripto, por lo tanto la probabilidad buscada es el cociente de dos áreas

$$P(E_3) = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi} = \frac{1}{4}$$

<u>Potencialidad educativa</u>
El trabajo con esta paradoja posibilitaría reflexionar sobre:

- la diferencia entre procedimientos determinísticos (trazar una cuerda) y procedimientos aleatorios (trazar una cuerda al azar)
- distintas maneras de operativizar el azar
- el hecho de que distintas maneras de operativizar el azar determina distintos espacios muestrales y distintos eventos de interés
- la existencia de espacios muestrales ni finitos ni numerables y el uso de la probabilidad geométrica para la determinación de las probabilidades buscadas.

*** Paradoja de Monty**
El Problema de Monty Hall es un problema de probabilidad inspirado por el concurso televisivo estadounidense *Let's Make a Deal* (*Hagamos un trato*). El nombre del problema tiene su origen en el nombre del presentador del mencionado concurso: *Monty Hall*.
En el concurso televisivo se requiere a un concursante que elija una puerta entre tres (todas cerradas), y su premio consiste en llevarse lo que se encuentra detrás de la puerta elegida. Se sabe que una de ellas oculta un auto, y tras las otras dos hay una cabra. Una vez que el concursante ha elegido una puerta comunica al público y al presentador su elección, Monty abre una de las otras puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. En este momento se le da la opción al concursante de cambiar, si lo desea, su elección original. ¿Debe el concursante mantener su elección o elegir la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?
A primera vista parecería que al tener que elegir sólo entre dos puertas, cada una de estas elecciones tendría probabilidad ½ y por lo tanto no existiría ninguna ventaja a favor del cambio. Sin embargo la respuesta correcta es que para el participante es ventajoso el cambio, ya que esta elección tiene probabilidad 2/3. Esta contradicción entre la opinión preliminar y el resultado analítico puede considerarse como una paradoja. La respuesta se basa en suposiciones que no son obvias y que no se encuentran expresadas en el planteamiento del problema.
El enunciado más famoso del problema es el presentado en una carta de Craig F. Whitaker a la columna de Marilyn vos Savant en Parade Magazine en 1990

Suponga que Usted participa de un juego en el que le dan a elegir entre tres puertas, detrás de una de ellas hay un auto, detrás de las otras cabras. Usted elige una puerta, digamos la nº 1, y el conductor del juego, quién conoce que hay detrás de las puertas, abre otra puerta, digamos la nº 3, la cual tiene una cabra. Ahora el conductor le dice: ¿Quiere usted abrir la puerta nº 2?

Pregunta: ¿es ventajoso para el jugador cambiar la elección?

Potencialidad educativa

Este problema pone en evidencia que el proceso de modelización implica el análisis minucioso del enunciado y la incorporación de supuestos no incluidos en el mismo. La resolución del problema requiere:

- Identificar etapas en la realización del experimento.
- Distinguir entre información pre y post experimental.
- De una configuración y descripción adecuada de espacios muestrales.
- Recursos tales como diagramas de árboles y notación conjuntista.
- Asignación de probabilidades por etapas.
- Diferenciar entre probabilidad condicional y no condicional
- Realización de simulaciones como instrumento reafirmatorio de lo analítico y no necesariamente supletorio.

*** Paradoja de los dos perritos**

La siguiente situación es un ejemplo de paradojas que en realidad no lo son tanto

Una señora tenía dos perritos, una amiga le preguntó: ¿es macho alguno de los perritos?, sí en efecto le contestó la señora. Por lo tanto podemos concluir que la probabilidad de que la señora tenga dos perros machos es $\frac{1}{3}$*, ¿por qué?*

Otro amigo le preguntó: ¿es macho el perrito blanco?, sí le contestó la señora; por lo que podemos afirmar que la probabilidad de que la señora tenga dos perros machos es $\frac{1}{2}$.

¿Cómo es posible que preguntando por un perrito en concreto la probabilidad de que ambos sean machos aumente de un tercio a un medio?

Potencialidad educativa

Debe notarse que, si bien el suceso que interesa es el de tener dos perritos machos la probabilidad que se calculó en ambos casos no es la misma ya que en cada situación se dispone de información distinta. Estas informaciones configuran distintas restricciones sobre el espacio muestral y por lo tanto se están calculando distintas probabilidades condicionales.

El abordaje de la enseñanza de la probabilidad condicional requiere de situaciones que posibiliten la distinción de las probabilidades P(A); P(A/B) y P(A/C). En este sentido este problema por su simplicidad podría constituirse en una situación que permita la construcción del significado del espacio muestral asociado a un experimento y como él mismo se va modificando cuando se incorpora nueva información.

*** Paradoja de Yule-Simpson**

Esta paradoja, también conocida como efecto *Yule-Simpson*, describe como una relación que está presente en dos grupos se revierte cuando estos grupos son combinados.

Supongamos tener el siguiente escenario:

Sobre una mesa hay una caja etiquetada con la letra E y otra etiquetada con la letra N, ambas conteniendo bolas. La caja E tiene 5 bolas negras y 6 bolas blancas, mientras que la caja N contiene 3 bolas negras y 4 bolas blancas. Encima de otra mesa hay otras dos cajas, también etiquetadas con las letras E y N. La caja E, contiene 6 bolas negras y 3 blancas, y la N tiene 9 bolas negras y 5 bolas blancas.
a) De la primera mesa se quiere sacar una bola negra. ¿Es preferible sacar una bola de la caja E o de la caja N?
b) De la segunda mesa se quiere sacar una bola negra. ¿Es preferible sacar una bola de la caja E o de la caja N?
c) Si se juntan las bolas que están en las cajas E en una única caja con la letra E y las bolas que están en las cajas N en una única caja con la letra N., se tiene una nueva situación:
Caja E = {11 bolas negras y 9 bolas blancas}
Caja N = {12 bolas negras y 9 bolas blancas}
¿De qué caja se debe extraer la bola si la intención, nuevamente es extraer una bola negra?

Tanto en la situación *a* como *b*, es preferible sacar la bola negra de la caja E, ya que en ambos casos la probabilidad de sacar negra es mayor que la probabilidad de sacar bola blanca. Por otra parte en la situación *c*, al reunirse las bolas, la probabilidad de extraer bola negra es mayor para la caja N que para la caja E.
Este resultado paradójico adquiere más relevancia en un contexto estadístico en el que las bolas son personas, cada mesa representa el sexo de las personas, hombres y mujeres, las cajas E que estas personas estén expuestas a un factor de riesgo, por ejemplo el habito de fumar y las cajas N que las personas no estén expuestas a ese factor de riesgo. Además las bolas negras representan las personas que presentan un daño pulmonar y las bolas blancas las personas que no presentan este daño. Por la tanto la probabilidad de extraer una bola negra de la caja E representa el riesgo que tiene una persona (hombre) de estar enferma cuando esta expuesta al hábito de fumar. Así con los datos anteriores el riesgo de estar enfermo es mayor para los hombres que están expuestos que para aquellos que no lo están. Haciendo el mismo análisis para las mujeres, se llega a la misma conclusión. Pero en cambio, cuando se agrupan los hombres con las mujeres se llega a la conclusión contraria, el hábito de fumar no ocasiona daño.

<u>Potencialidad educativa</u>
Este tipo de situaciones muestra que las relaciones causa efecto no están gobernadas exclusivamente por las leyes de la probabilidad. En estadística este fenómeno muestra la necesidad de tener en cuenta que algunas variables pueden, permaneciendo ocultas, modificar el sentido del vínculo entre dos variables principales. En el caso mencionado el rol de variable "confusora" lo desempeñó la variable sexo. Por otra parte desde el punto de vista aritmético también se debe notar que con las proporciones para algunos números se puede verificar que

$$\frac{a}{b} > \frac{A}{B}$$

$$\frac{c}{d} > \frac{C}{D}$$

y $$\frac{a+c}{b+d} < \frac{A+C}{B+D}$$

*** Paradoja de las billeteras**

Esta paradoja se debe al matemático francés Maurice Kraitchik (1882-1957), que la presentó en su libro "Mathematical Recreations" (1953), con corbatas en lugar de con billeteras.

Tres personas estaban cenando. La primera de ellas decide hacer un juego a las otras dos:
Persona 1: *les propongo un juego. Pongan sus billeteras sobre la mesa.*
Contaremos el dinero que lleve cada uno. El que tenga menos dinero ganará todo el dinero que lleve el otro.
Los dos pensaron:
Persona 2: *Si yo tuviera menos dinero que la otra persona, ganaré todo el dinero que ella tenga. Si pierdo, pierdo lo que tengo, pero si gano, ganaré más dinero del que tengo. Es decir, que puedo ganar más de lo que puedo perder. El juego está a mi favor.*
Persona 3: Si *tengo más dinero que la otra persona, perderé lo que tengo. Pero si tengo menos dinero que la otra persona, ganaré lo que tenga. Puedo ganar más dinero del que pueda perder. El juego está a mi favor.*
¿Cómo es posible que el juego sea favorable para las dos personas?

Potencialidad educativa
El problema está centrado en el hecho de que los jugadores no saben con certeza que cantidad de dinero lleva cada uno, por lo que la conjetura acerca de la probabilidad de que el otro lleve más dinero es *subjetiva* y no tiene porque que ser del 50%, ni coincidir con la que estime el otro jugador. En rigor la cantidad de dinero que tiene cada jugador es una variable aleatoria y de estas variables aleatorias se desconoce su distribución. Para desentrañar la paradoja, surge la necesidad de calcular esperanzas para establecer la ganancia para cada jugador y así se pone en evidencia que el juego será equilibrado según sean los supuestos distribucionales establecidos para las variables aleatorias que representan las cantidades de dinero de cada persona. Se pueden asignar distribuciones de manera que el juego sea equilibrado o distribuciones para los que el juego sea, a la larga, ventajoso para uno de los jugadores. Por lo tanto este problema es importante para distinguir entre lo que ocurre en la realización de una sola prueba o lo que puede ocurrir a la larga
También cabe señalar que una variante de este problema lo constituye el llamado problema de los dos sobres.

.2.- Cuasi – paradojas

*** El problema del reparto de apuestas**

El llamado problema de los puntos o de reparto de apuestas fue abordado por diferentes matemáticos generando diversas soluciones, algunas de la cuales resultaron erróneas, encontrando su punto culminante en los trabajos de Pascal y Fermat a partir de los problemas propuestos por Chevalier de Meré, momento que es considerado como el nacimiento de la Teoría de Probabilidades. La formulación general de este problema es:

Dos jugadores compiten por un premio que es otorgado después que uno de ellos haya ganado n lances en un juego. El jugador A ha ganado más que el jugador B y, debido a alguna intervención externa, deben abandonar el juego antes de llegar al número n. ¿Cómo debe dividirse la apuesta entre los jugadores?.

Potencialidad educativa
A partir del análisis del desarrollo de la teoría de la probabilidad es posible concluir que resulta indispensable introducir en la enseñanza situaciones vinculadas al reparto de apuestas ya que es necesario "provocar" el cambio de razonamiento desde lo cierto a lo incierto para poder construir el significado de la noción de probabilidad.

Descripción de tareas para el aula: la clase dividida en grupos de 3 o 4 alumnos abordará la resolución de las siguientes tareas

¿Cómo se pueden repartir, equitativamente, apuestas en un juego interrumpido?

Tarea 1

> *Dos jugadores A y B, igualmente hábiles, participan en un juego a varias partidas, en cada una de las cuales el ganador obtiene un punto. Cada uno de ellos coloca sobre la mesa 30 pesos. Acuerdan que el primero que consiga 3 puntos gana el total de la apuesta. Por algún motivo el juego debe interrumpirse cuando el jugador A lleva ganados 2 puntos y el B un punto. ¿Cómo puede repartirse la apuesta inicial? Justificar el reparto*

Tarea 2:

> *Dos jugadores A y B, igualmente hábiles, participan en un juego a varias partidas, en cada una de las cuales el ganador obtiene un punto. Cada uno de ellos coloca sobre la mesa 30 pesos. Acuerdan que el primero que consiga 3 puntos gana el total de la apuesta. Por algún motivo el juego debe interrumpirse cuando al jugador A le falta ganar un punto y al B dos puntos. ¿Cómo puede repartirse la apuesta inicial? Justificar el reparto*

Resolución de las tareas

Ambas tareas describen la realización de un juego cuyo ganador se decide al obtener 3 puntos. Las mismas solo difieren en la descripción de la situación al momento de interrumpirse el juego: los puntos **ganados** por cada jugador, en la 1, y los puntos que le **faltan ganar** a cada uno, en la 2.

Si se consideran los puntos ganados parece razonable considerar que la apuesta deberá repartirse de manera proporcional a ellos, es decir 2/3 para el jugador A y 1/3 para el B. A recibiría, entonces, 40 pesos y B 20 pesos.

En el caso de considerar los puntos que a cada uno le faltan ganar, se hace necesario analizar los posibles escenarios. Es claro que el ganador se decide en a lo sumo en 2 partidas. Por la manera en que se desarrolló el juego hasta la suspensión, A puede ganar ya sea porque triunfe en la cuarta partida o en caso de que sea B el que gane esta partida, cuando gané la quinta. Por su parte B gana únicamente acumulando dos triunfos consecutivos, en la cuarta y quinta partida.

Partida	Ganador de la partida	Ganador del juego
4	A	**A**
4	B	No esta definido
5	A	**A**
5	B	**B**

La situación puede ser descripta, también, mediante un diagrama de árbol, como sigue:

Partida 4   Partida 5

A (finaliza el juego)

B — A (finaliza el juego)
   — B (finaliza el juego)

Al igual que con la tarea 1 podría pensarse que de 3 situaciones posibles hay 2 favorables para A y por lo tanto corresponde el mismo reparto, es decir: 2/3 de 60 para A y 1/3 para B, pero ¿cómo influye en este razonamiento el hecho de que dependiendo del resultado obtenido en la cuarta partida el juego puede finalizar o continuar?, ¿cómo debe analizarse la situación de A si el puede ser el ganador ganando solo una partida más?

Algunas reflexiones sobre el contenido matemático

Es claro que los sucesos A_G : A gana el juego y B_G : B gana el juego, son complementarios así que $P(A_G) = 1- P(B_G)$.

Por otra parte si p es la probabilidad de que A gane una partida y q es la probabilidad de que la gane B, se cumple que p+q = 1 y asumiendo que el resultado de una partida no influye en el resultado de las siguientes se tendrá que: $P(B_G) = q^2$, $P(A_G) = 1- q^2$
Es posible entonces plantearnos los siguientes interrogantes

* *¿Para qué valores de p será* $P(A_G) > P(B_G)$?

$$1-q^2 > q^2 \Rightarrow q < \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.708$$

Así que basta que p > 0.292 para que sea más probable que A gane la partida.
Para el caso particular en que $p = 0.30$, $P(A_G) = 1 - q^2 = 0.51$.
Pero también se debe notar que si p < 0.29 será más probable que B gane la partida a pesar de estar en desventaja al momento de la suspensión.

* *¿Para qué valor de p será* $P(A_G) = 2/3$?

$$P(A_G) = 1-q^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \quad q = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.58 \Rightarrow p \cong 0.42$$

* *¿Para qué valor de p será* $P(A_G) = 3/4$?

$$P(A_G) = 1-q^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

este es justamente el caso de equiprobabilidad en cada partida.

Adicionalmente podemos preguntarnos
¿Cuál es la probabilidad de la configuración "A ganó dos partidas y B ganó una" cuando se suspende el juego?
Teniendo en cuenta lo anterior, al momento de la suspensión la configuración (dos A y una B) tiene probabilidad dada por $3p^2q$. Esta probabilidad expresada en función de p es

$$f(p) = 3(p^2-p^3)$$

y tiene su máximo en p = 2/3. Por lo tanto si p es pequeño la configuración es poco probable.

*** Paradoja de Blyth**

Frecuentemente los alumnos emplean el concepto de transitividad aún en situaciones en la que el mismo no se cumple. Esta propiedad tan utilizada en razonamientos matemáticos encuentra límites de aplicación en el contexto probabilística

> *Consideremos cuatro dados cúbicos A, B, C y D, siendo sus seis caras las siguientes:*
>
> *A = {0,0,4,4,4,4}* *B = {3,3,3,3,3,3}*
>
> *C = {2,2,2,2,7,7}* *D = {1,1,1,5,5,5}*
>
> *Se seleccionan dos dados y se lanzan, quién mayor puntuación obtenga gana*

Potencialidad educativa

Si se concibe la construcción de un conocimiento como emergente de un conjunto de prácticas y que es necesario además reconocer no solo las situaciones en donde dicho concepto aporta soluciones adecuadas sino también las situaciones donde no resulta pertinente su utilización; el análisis de la situación, involucrada en la paradoja de Blyth, que conduce a un resultado sorprendente posibilitaría el reconocimiento de los límites de aplicación en el contexto probabilístico de una propiedad tan utilizada en razonamientos matemáticos, como lo es la propiedad transitiva

*** El problema de los Cumpleaños**

La paradoja del cumpleaños establece que si hay 23 personas reunidas hay una probabilidad del 50,7% de que al menos dos personas de ellas cumplan años el mismo día. Para 60 o más personas la probabilidad es mayor del 99%. Este problema puede considerarse una paradoja en el sentido que es una verdad matemática que contradice la intuición ya que en general se piensa que la probabilidad de coincidencias en un grupo de 23 personas es bastante menor que 1/2, y que hacen falta muchas más personas para que se alcance este valor de probabilidad.

La formulación mas conocida de este problema es:

> ¿Cuántas personas son necesarias para que sea mayor que 1/2 la probabilidad de que al menos dos personas de *n*, que se encuentran en una habitación, cumplan años el mismo día?

Notemos que en este problema se pide hallar un *n*, más precisamente el tamaño de un conjunto de personas que verifiquen una condición pero establecida ésta en términos de probabilidad. La condición hace referencia a la coincidencia en la fecha de cumpleaños entre las distintas personas que conforman un grupo, partiendo de la base que esta coincidencia no necesariamente ocurre, a menos que se impongan condiciones de integración de las personas al grupo que hagan obvias las coincidencias, por ejemplo una reunión de hermanos mellizos. Por lo que, sin imponer condiciones constitutivas obvias podrían o no existir coincidencias en el grupo examinado. Es interesante observar que podrían existir distintos tipos de coincidencias: pares, ternas, etc., de personas con igual fecha de nacimiento. Pueden por lo tanto ocurrir resultados diversos y de allí la naturaleza aleatoria del problema. En este caso se pide probabilidad mayor que ½, es decir que sea más probable que ocurran las coincidencias a que todas las personas reunidas hayan nacido en días distintos. Pero es importante tener en cuenta que una vez hallado *n*, no necesariamente cada vez que se encuentre otra muestra de ese tamaño *n* hallado ocurrirán coincidencias, nuestra probabilidad sólo nos indica la posibilidad de ocurrencia a la larga. Si bien el cálculo de *n* se hará mediante un proceso de cálculo determinístico el fenómeno modelado es aleatorio.

Potencialidad educativa

La resolución del problema planteado implica la elección de un modelo el cuál a su vez requiere la especificación de supuestos no incorporados explícitamente en el enunciado. En este caso dichos supuestos son de dos tipos, supuestos relacionados con la construcción del espacio muestral y supuestos que tiene que ver con la asignación de probabilidades.

El abordaje de este problema requiere además:

- un lenguaje adecuado.
- la comparación entre sucesos, particularmente entre un suceso y su complemento.
- propiedades de la probabilidad.

El análisis de la solución favorecería:

- el avance en la distinción entre fenómenos determinísticos y fenómenos aleatorios.
- el análisis del significado de la probabilidad.

Este problema es particularmente rico por la variedad de situaciones alternativas que permite abordar tales como: coincidencias en meses, semanas y en años de distinta duración.

*** Problema de las tres cartas.**

Esta paradoja aparece en un juego de azar en el que la intuición y el sentido común fallan. Fue inventado por el matemático Warren Weaver (1894-1978), cofundador de la teoría de la información y presentado el artículo "*Probabilidad*", en *Scientific American* (1950). El juego presentado es una variante de la conocida paradoja de las cajas de Bertrand que data de 1889.

Una persona nos propone un juego en el que hay tres cartas, con ases por ambas caras.
La primera carta *tiene una pica por ambos lados. La segunda tiene una pica en una cara y un diamante en la otra cara. La última carta tiene un diamante por ambas caras.*
La persona nos explica que el juego consiste en que luego de mezcladas las cartas, nos deja seleccionar una para ponerla sobre una mesa. Nos apuesta un 100 pesos a que el palo de la cara oculta es igual que el de la cara visible. Supongamos que sacamos un diamante. Para convencernos de que el juego es justo, la persona nos explica que la carta extraída no puede ser la carta pica-pica. Por tanto, o bien es la carta diamante-pica, o bien es la diamante-diamante. En un caso, la cara oculta es un diamante, y en el otro, una pica. Así que las posibilidades de ganar son iguales para ambos.

Notemos que el juego no resulte justo ya que hay tres casos posibles
1) la cara observada es un diamante, y la cara oculta una pica.
2) la cara observada sea un diamante, y la cara oculta sea diamante.
3) la cara observada sea un diamante, pero el de la cara inversa, al observado en el caso 2 y la cara oculta sea el diamante de la cara frontal.

Por lo tanto, la persona que nos propone el juego gana dos de cada tres apuestas.

Potencialidad educativa

Este problema plantea la distinción entre los resultados posibles, que la persona que aborda la situación considera distinguibles, y la equiprobabilidad de los sucesos elementales que conforman el espacio muestral. Abordar en la enseñanza problemas con estas características posibilitaría la reflexión sobre:

- la naturaleza de los elementos de los espacios muestrales
- el alcance de la equiprobabilidad y por ende de la definición clásica de probabilidad
- la introducción de la definición frecuencial de la probabilidad.

3.- Consideraciones finales

Si ahondamos en las resoluciones de las paradojas presentadas, es posible clasificar las según:

- el significado de la probabilidad involucrado en cada una de ellas
- los conceptos de la teoría de la probabilidad que contribuyen a su dilucidación.

Paradoja	***Significado involucrado***	***Conceptos que permiten la dilucidación***
Bertrand	Probabilidad geométrica	Experimento aleatorio, espacio muestral, suceso aleatorio
Monty	Probabilidad condicional	Explicitación del espacio muestral
de los perritos	Probabilidad condicional	Espacio muestral y restricciones del espacio muestral.
Simpson	Probabilidad clásica	Comparación de probabilidades
Las billeteras	Probabilidad subjetiva	Principio de indiferencia

En cuanto a las cuasi-paradojas la diferenciación podría realizarse teniendo en cuenta el obstáculo, heurística y/o sesgo que permitiría problematizar y por ende superar.

Cuasi-paradoja	***Obstáculo, heurística y/o sesgo***
Reparto de apuestas	Determinismo
Blyth	Propiedad transitiva
Los cumpleaños	Disponibilidad
Las tres cartas.	Equiprobabilidad

Referencias Bibliográficas

Flores,P. (1999) *Paradojas Matemáticas para la Formación de Profesores.*SAEM THALES

Garfield, J., Ahlgren, A.(1988).*Difficulties in Learning Basic Concepts of Probability and Statistics:Implications for Research*.Journal for Research in Mathematics Education,19, 44-63

Kahneman (1973) *Availability: a heuristic for judging frequency and probability,* CognitivePsychology

Konold (1991) *Understanding students' beliefs about probability*. En E. von Glasersfeld(Ed.), *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Konold, C. (1995). *Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics*.Journal of Statistics Education, 3(1).

Leviatán (2002) *On the use of paradoxes in the teaching of probability.* ICOTS6.

Tversky, A.; Kahneman, D.; Slovic, P. (eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.