

Misceláneas

Matrices Nilpotentes

Recordemos que una matriz cuadrada A de n filas y por tanto n columnas se dice nilpotente, si alguna potencia de A es igual a la matriz nula, esto es, si es posible encontrar un número natural $k \geq 1$ de manera que $A^k = 0$.

Ejemplos de matrices nilpotentes son:

(i)=la matriz nula

$$(ii) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (iii) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(iv) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (vi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que dos matrices cuadradas A, B del mismo número de filas se dicen conjugadas si es posible encontrar una matriz invertible P de manera que

$$A = P^{-1}BP$$

Por ejemplo si

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calculando la inversa de P y las multiplicaciones indicadas se tiene que

$$(iii) = P^{-1}(ii)P.$$

Esto es, (ii) es conjugada a (iii) . Este no es un hecho casual, se demuestra que si A es una matriz no nula, nilpotente de dos filas, siempre A es conjugada a la matriz (ii) .

Para esto, construir un vector $v = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \neq 0$ de manera que

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = Av = A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \neq 0.$$

La matriz $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se calcula del modo siguiente, a, c son las soluciones de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

b, d son las soluciones de

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Con un poco de esfuerzo, aunque con las mismas técnicas, se demuestra que si A es una matriz distinta de la matriz nula, cuadrada de tres filas y nilpotente, entonces A es conjugada a una de las matrices $(iv), (v)$.

Para el caso de una matriz A nilpotente, un teorema nos dice que es conjugada a su forma de Jordan¹. Por cierto, en este texto no definiremos matrices en la forma de Jordan, para sugerimos al lector algunos de los libros de Gentile; libro de Larrotonda de álgebra, libro de Hoffman-Kunze, Algebra Lineal; wikipedia, <http://www.wikipedia.org>; o pregunte en google: Forma de Jordan.

Para finalizar deseamos comentar que las matrices nilpotentes deparan sorpresas agradables, hay problemas no resueltos alrededor de ellas. Un problema es el siguiente.

Fijamos una matriz nilpotente A . Calculamos el centralizador de A . Esto es, calculamos

$$\{B \text{ matriz} : AB = BA\}$$

El problema es: Para cada matriz nilpotente B que conmuta con A calcular su forma de Jordan.

Para el caso de la matriz (ii) , un cálculo directo permite verificar que las matrices que conmutan con (ii) , son las matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \text{ números arbitrarios} \right\}.$$

¹Camille Jordan, matemático francés (1838, 1922)