Título: Un espacio para el razonamiento conjetural en la formación inicial de profesores.

Autores: María Elena Markiewicz - Silvia Catalina Etchegaray

Institución: Universidad Nacional de Río Cuarto (Río cuarto, Pcia. Córdoba)

e-mail: mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Categoría: Trabajo de investigación.

Nivel: Formación inicial.

Modalidad: oral.

RESUMEN

Este trabajo está planteado en el marco de un proyecto de investigación en Didáctica de la Matemática, que está sustentado por el Enfoque onto-semiótico y que tiene como objetivo general promover al mejoramiento de la formación inicial del profesor de matemática.
En particular, el objetivo de este trabajo es proponer algunas reflexiones en torno al papel del razonamiento conjetural o plausible (aquel que permite formular, contrastar y reformular conjeturas) en la formación de los profesores de matemática, movilizados por la pregunta ¿es posible pensar una manera de trabajo sobre la matemática que se estudia en la formación inicial como un conocimiento que dé otra perspectiva a la matemática de la escuela secundaria?
En este sentido, planteamos la importancia de generar y sostener, en asignaturas del profesorado de matemática (más específicamente, en una materia como Estructuras algebraicas), espacios colectivos de discusión de sistemas de prácticas que necesiten poner en funcionamiento elementos de significado vinculados al razonamiento conjetural, y que promuevan la reflexión acerca del mismo con el objetivo de sacarlo de la esfera de lo personal.
Proponer al razonamiento plausible como objeto a cuestionar es ofrecer otra perspectiva epistemológica y ayudar a construir herramientas para incorporar en la futura práctica profesional.

1. Fundamentación

El presente trabajo se enmarca en el Proyecto de investigación: "**Artículación de significados en procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática**" que forma parte del Programa de Investigaciones interdisciplinarias sobre el aprendizaje de las ciencias y que se desarrolla en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Río Cuarto.

Hace ya algún tiempo, desde nuestro proyecto, venimos trabajando en el estudio del razonamiento conjetural o plausible, entendido como aquel que nos permite elaborar, contrastar y reformular conjeturas (Polya, 1954).

El estudio de este objeto tan controvertido y especial, surgió a partir de un problema didáctico detectado en el ámbito de la escuela media, vinculado esencialmente con la escasez de espacios que permitan al alumno de secundario elaborar conjeturas y, por sobre todo, reflexionar sobre el alcance y fortalezas del razonamiento utilizado al hacerlo.

Este tipo de razonamiento, tal como lo expresan Chevallard, Bosch y Gascon (1997) tiene un papel fundamental en las fases exploratorias del proceso de estudio matemático, y, como además lo indica Panizza (2005) tiene un gran valor en sí mismo, tanto en la construcción del conocimiento matemático como de la racionalidad matemática de los alumnos.

Todo esto nos llevó a emprender un estudio más profundo acerca de este objeto matemático, generando una agenda de investigación acerca del mismo, en base a lineamientos teóricos que propone el Enfoque Ontológico-semiótico (EOS) cuyo iniciador es el Dr. Juan Godino (2003) (Markiewicz, 2006) y a tratar de comenzar a dar respuestas a algunas de las preguntas planteadas en dicha agenda.

Uno de los principales aspectos que abordamos en nuestra investigación fue la construcción de un **primer significado de referencia institucional acerca del razonamiento conjetural**, que intenta poner de manifiesto algunos de los "elementos de significado" esenciales que hacen a nuestro objeto de estudio en los ámbitos de producción de la matemática, esto es las **situaciones** en las que se pone en juego el razonamiento conjetural, **las acciones o procedimientos** fundamentales que se llevan a cabo al momento de elaborar, contrastar y reformular conjeturas, y las **definiciones, propiedades y argumentaciones** vinculadas a este razonamiento.

Consideramos de fundamental importancia contar con este significado de referencia para poder comenzar a desentrañar la complejidad que tiene nuestro objeto de estudio y contar con un marco de referencia para el diseño e implementación de sistemas de prácticas que tengan en cuenta estos aspectos y que promuevan el desarrollo de este tipo de razonamiento. Primeras aproximaciones a este significado de referencia han sido expuestas en una tesis de maestría en Didáctica de la Matemática (Markiewicz, 2005) y en congresos de carácter nacional e internacional (Markiewicz/Etchegaray, 2006). En el anexo 1 de este trabajo incluimos una breve síntesis de los elementos fundamentales que forman parte del mismo[1].

Por otra parte, como docentes de distintas asignaturas correspondientes al profesorado de Matemáticas de nuestra universidad, notamos que, parte de una posible explicación al problema didáctico planteado en el nivel medio podría estar basada en el análisis de la propia formación de los futuros profesores. Si en el ámbito de esta formación son escasas las instancias de elaboración de conjeturas y, sobre todo, de reflexión acerca del razonamiento conjetural, difícilmente este tipo de trabajo tendrá un espacio en la enseñanza que ellos planteen a sus alumnos de nivel medio. Queremos recortar en este trabajo un aspecto inherente al hecho de que se trata de formar un profesor de escuela media y por lo tanto nos preguntamos ¿es posible pensar una manera de trabajar sobre la matemática que se estudia en la formación inicial como un conocimiento que dé otra perspectiva a la matemática de la escuela secundaria? Esto más allá de que si los contenidos específicos son directamente aplicables -o no- a lo que exige el currículo del nivel medio.

---

[1] Debemos aclarar que, dada la extensión de este trabajo, lo que se incluye es sólo un listado de los elementos fundamentales que integran dicho significado (la estructura básica), la cual no atrapa todos los aspectos que han sido analizados ni las relaciones entre los mismos que regulan su funcionamiento.

Es por esto que, consideramos de fundamental importancia plantear algunas intervenciones en el ámbito de la formación del profesor, que vayan desde instancias de trabajo concreto que generen sistemas de prácticas donde se ponga a funcionar el razonamiento conjetural, hasta espacios específicos de reflexión acerca de este razonamiento y sus elementos de significado.

En este trabajo, queremos mostrar, fundamentalmente, una propuesta de intervención sobre la asignatura "Estructuras Algebraicas" correspondiente al 3er. año del Profesorado en Matemática, en función de lograr el objetivo propuesto.

2- Desarrollo y análisis

Nuestra propuesta tiene a la base dos premisas básicas:

Por una parte, y en concordancia con lo que sostienen Godino y Batanero (2008) en relación a la formación de maestros, y que nosotros extendemos a la formación de profesores, resulta fundamental que les enseñemos con la misma metodología que intentamos transmitirles, y en la misma manera que se espera que ellos actúen como profesores.

Por otra parte, y de acuerdo también con los lineamientos que plantea el EOS, el razonamiento conjetural, en tanto objeto de estudio, debería ser el "emergente" de sistemas de prácticas matemáticas y, si queremos que nuestros alumnos se apropien de este objeto, es necesario que desarrollen sistemas de prácticas personales que se vayan acoplando progresivamente a los sistemas de prácticas de referencia.

De este modo, el planteamiento de situaciones que involucren la elaboración de conjeturas, y el análisis y reflexión acerca de los significados personales emergentes en relación al razonamiento conjetural, constituyen la base para poder lograr la apropiación de este objeto por parte de los alumnos del profesorado, y para que luego ellos lo puedan hacer funcionar con alta idoneidad epistémica y cognitiva con sus alumnos de nivel medio.

Para lograr esto, creemos que es necesario plantear un **trabajo transversal y sostenido que se lleve a cabo a lo largo de todas las asignaturas del profesorado**, a través de la inclusión de problemas o tareas vinculadas a distintos objetos matemáticos, que generen sistemas de prácticas donde sea necesario el razonamiento conjetural y se comience a reconocerlo, tanto en los diferentes aspectos que hacen al mismo, como en su potencia y sus limitaciones ante su uso. Esto, que parece una cuestión básica e ineludible dentro de cualquier asignatura del profesorado, es sabido y compartido que no es siempre así. Hay asignaturas que están planteadas de un rígido modo axiomático-deductivo, donde las clases "teóricas" son una sucesión de definiciones, teoremas y sus correspondientes demostraciones, y las clases "prácticas" están centradas en tareas que son aplicaciones de esas definiciones o teoremas para demostrar nuevas propiedades que los alumnos no tienen posibilidad de elaborar por sus propios medios.

El cúmulo de conocimiento matemático es demasiado grande, los tiempos que corren no parecen dar lugar a que los alumnos construyan todos esos conocimientos. Pero tenemos que analizar qué es más importante para un futuro profesor de matemática de nivel medio: ¿recitarles y que ellos sepan recitar una sucesión de definiciones, teoremas y demostraciones, o generar espacios donde puedan elaborar sus propias conjeturas, transitando un camino no lineal que les permitirá relacionarse de una forma diferente con su objeto de estudio, que lo ponga ante la necesidad de analizar ejemplos y contraejemplos, de buscar regularidades, de contrastar afirmaciones, de ensayar pruebas, de hallar condiciones o hipótesis que se traducirán en definiciones,…, para luego trasladar esta forma de trabajo a sus alumnos? En otras palabras, desarrollar herramientas conceptuales que les permita dominar la disciplina desde otro lugar.

En el marco del profesorado en matemática de nuestra universidad estamos trabajando en este sentido. En particular, en este trabajo, trataremos de compartir una propuesta para la asignatura Estructuras Algebraicas, correspondiente al 3er. Año de nuestro profesorado, en la cual nos desempeñamos como docentes, pero cuyas bases pueden ser aplicadas a cualquier otra materia del profesorado.

Estructuras algebraicas es una de estas asignaturas que usualmente se plantea del modo que mencionábamos más arriba, es decir, partiendo de los axiomas de grupo y deduciendo de ellos las propiedades y teoremas fundamentales de la Teoría de grupos.

En nuestro caso estamos tratando de recuperar los problemas que dan sentido a los nodos centrales de la materia, y, fundamentalmente, estamos intentando plantear tareas que promuevan la elaboración de conjeturas y propiedades por parte de los alumnos. Es a esta última innovación a la que nos referimos en este trabajo.

A los fines de ejemplificar lo que se plantea, presentamos el siguiente cuadro, que muestra, en su primera columna, algunos “tipos de tareas” y abordajes “tradicionales” que se suelen realizar de ciertos aspectos de la asignatura (Herstein,I.N 1996; Birkcoff Mac. Lane, 1970), y en la segunda columna, la propuesta alternativa de tareas producida por los docentes que somos responsables del dictado de la materia, convencidos que el trayecto de formación de un profesor debe apuntar a construir una intencionalidad del futuro docente. Es justamente desde este lugar donde se pueden pensar las futuras clases del secundario y sostenerlas en el aula de modo que las mismas sean un ámbito de producción individual y colectiva de matemática. Para ello se necesita que los futuros profesores se sientan en una posición de dominio sobre la construcción de la disciplina. El razonamiento plausible es inherente a esta construcción.

Sea (G, ∗) un grupo. *a) Demostrar que:* $\forall x, y \in G:$ $(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ *b) Demostrar que: Si G es abeliano, entonces* $\forall x, y \in G: (x*y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$	*¿Qué significaría buscar el inverso de operar dos elementos de un grupo?¿Tiene sentido esta pregunta?* *¿Podrías hallar una relación entre el inverso de operar dos elementos de un grupo y los inversos de cada uno de ellos?*
Demostrar que si $G = <a>, a \in G$ *y* $o(a) = m$*, entonces el orden de cualquier elemento* a^k *de G es* $\dfrac{m}{(m:k)}$	*¿Habrá alguna manera de calcular el orden de cualquier elemento* ***b*** *de un grupo G cíclico, finito? Elabora una conjetura y demuéstrala.*
Sea $f: G_1 \to G_2$ *un mononorfismo de grupos; demostrar que x y f(x) tienen el mismo orden, cualquiera sea el elemento x de* G_1*.*	*Dada una aplicación* $f: G_1 \to G_2$ *que preserva la estructura y dado un x cualquiera en G, ¿existirá alguna relación entre el orden de* ***f(x)*** *y el orden de* ***x****?* *¿Qué condiciones deberá cumplir f para que el orden de f(x) resulte igual al orden de x, para todo x de G?*
Definición: Sea (G, ∗) un grupo. Un subgrupo H de G se dice ***subgrupo normal o invariante*** *si se verifica que:* $xH = Hx$ *para todo* $x \in G$*.* *Teorema: Si (G, ∗) es un grupo y H es un subgrupo invariante en G, entonces el conjunto cociente* G/H *tiene estructura de grupo (con la operación* $._H$ *definida del siguiente modo:* $xH ._H yH = (x*y)H$ *)* *Demostración: ….*	*Sea (G,∗.) un grupo y H un subgrupo de G,* *¿Podremos definir entre los elementos del conjunto cociente* G/H *una operación de modo tal que éste tenga estructura de grupo?*

La diferencia fundamental entre el tipo de tareas y presentaciones de la columna 1, y las de la columna 2 es que, en las primeras las propiedades son presentadas a los alumnos de manera acabada, anulando la posibilidad de que ellos puedan formularlas por sí mismos y de que se cuestionen su existencia.

El tipo de presentación de la columna 1, si bien permite que los alumnos realicen una demostración deductiva de la propiedad (donde pondrán en juego los axiomas de grupo y las reglas de la lógica deductiva), de ninguna manera contribuye a que los alumnos puedan recurrir a la propiedad cuando tengan necesidad de utilizarla en otros contextos, ni tampoco da oportunidad a reconocer con que otros elementos de significados (otras técnicas, otras nociones, otras propiedades) se relaciona. En otras palabras, no brinda elementos para generar autónomamente nuevos procesos de contextualización ni viabilizar un idóneo proceso de descontextualización.

Pero, fundamentalmente, lo que destacamos es que este tipo de presentación ignora completamente las fases de elaboración de conjeturas, fases que, como ya hemos mencionado, no sólo constituyen parte fundamental del trabajo matemático sino que es necesario desarrollar en un futuro profesor de matemática, si queremos que luego éste sea el gestor de esta forma de trabajo en su práctica profesional, movilizando así una clase con alumnos produciendo y profesores productores de conocimiento matemático.

Basados en este posicionamiento y en el significado de referencia sobre el razonamiento plausible construido en el marco de nuestro proyecto de investigación, proponemos, como una alternativa, las tareas planteadas en la columna 2.

Este tipo de tareas, a diferencia de las anteriores, contribuye a que se pongan en funcionamiento algunos de los elementos de significado vinculados al razonamiento conjetural y por ende favorecen a procesos posteriores de contextualización y descontextualización.

En efecto tomemos, por ejemplo, la primera tarea que figura en la columna 2:

¿Qué significaría buscar el inverso de operar dos elementos de un grupo?¿Tiene sentido esta pregunta? ¿Podrías hallar una relación entre el inverso de operar dos elementos de un grupo y los inversos de cada uno de ellos?

Para responder a esta cuestión, una posibilidad es que el alumno analice lo que ocurre en los diversos ejemplos de grupo con los que ha tenido contacto. En particular, un grupo por ellos muy conocido y trabajado es (IR*, .). Dado que saben que en este grupo se cumple que el inverso de un producto es el producto de los inversos:

$$(x.y)^{-1} = x^{-1}.\, y^{-1}$$

es posible que, por **generalización**, arriben a la conjetura (errónea):

Para todo grupo G vale que $\forall x, y \in G : (x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$ *(1)*

Puede ocurrir también que el alumno **observe otros casos particulares** de grupo (que sean realmente "representativos", con lo cual no elegiría casos especiales como son justamente los grupos abelianos), tomando en cada uno de ellos pares de elementos y analizando el inverso de operarlos. Este análisis los puede llevar a **hallar una regularidad**: que en todos los casos el inverso de operar dos elementos del grupo coincide con el resultado de operar los inversos, pero en orden invertido!!!

Ej.: en el grupo cuaterniónico: $(i\,.\,j)^{-1} = j^{-1}.\, i^{-1}$

$$(j.k)^{-1} = k^{-1}.\, j^{-1}$$

en el grupo de congruencias del cuadrado:

$$(R_{90^o} \text{ o } R_{180^o})^{-1} = (R_{180^o})^{-1} \text{ o } (R_{90^o})^{-1}$$

$$(R_{180^o} \text{ o } R_{270^o})^{-1} = (R_{270^o})^{-1} \text{ o } (R_{180^o})^{-1}$$

etc…

Y **generalizar** este resultado a todo grupo y a todo par de elemento, conjeturando que:

Para todo grupo G se cumple que $\forall x, y \in G :\ (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ *(2)*

En este caso, **la conjetura es construida por inducción a partir de la observación de casos particulares.**

También es posible que arriben a la proposición anterior mediante un **conjeturar de tipo deductivo**, como el siguiente:

Por definición, el inverso del elemento $x * y$ debe cumplir que:

$$(x * y) * (x * y)^{-1} = e \text{ (elemento neutro del grupo).}$$

Pero, operando a izquierda ambos miembros de esta igualdad por x^{-1}, esta igualdad es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
& x^{-1} * (x * y) * (x * y)^{-1} = x^{-1} * e \\
\Leftrightarrow\quad & (x^{-1} * x) * y * (x * y)^{-1} = x^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & e * y * (x * y)^{-1} = x^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & y * (x * y)^{-1} = x^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & (y^{-1} * y) * (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & e * (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}
\end{aligned}
$$

Por la unicidad del inverso, no queda otra opción que: $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Y ya en esta argumentación está implícita la prueba deductiva de la propiedad.

La pregunta que obliga a reflexionar sobre el sentido de lo que se cuestiona, ayuda a que se expliciten relaciones entre las propiedades que caracterizan la estructura en cuestión, y por ende enriquece el significado del objeto: grupo; superando así las clásicas prácticas matemáticas donde se enuncian las propiedades, una tras otra, comprobando que se cumplen en un determinado conjunto con también una determinada operación.

Debemos destacar que, más allá de la reformulación de la tarea, la idea es tratar de generar la discusión entre los alumnos a partir de los diferentes significados que cada uno pone en juego de los objetos en cuestión (en este caso el de elemento inverso en la estructura de grupo) y la confrontación de estos procesos, que cada alumno explique a qué conjetura arribó, de qué manera llegó a esa conjetura y cómo la valida en el contexto por él elegido.

Esto puede promover que, por ejemplo, quienes plantearon la conjetura (1) se encuentren con inconvenientes al momento de su validación, lo cual puede llevar a que se propongan **contraejemplos** para la misma (en el grupo cuaterniónico $(i.j)^{-1} \neq i^{-1}.\ j^{-1}$) o darse cuenta, cuando intenten validarla que la afirmación no es cierta a menos que se cumplan ciertas condiciones sobre el grupo. En efecto, para demostrar (1), deberían ver que

$$(x * y) * (x^{-1} * y^{-1}) = e.$$

Pero, para que esto ocurra deberían poderse conmutar los elementos del grupo. De esta manera, pueden **reformular la conjetura, restringiendo su dominio de validez** a los grupos abelianos, con lo cual obtenemos una nueva proposición interesante:

Si G es abeliano, entonces $\forall x, y \in G : (x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$ *(3)*

Este tipo de trabajo, nos parece muy enriquecedor para los alumnos del profesorado, ya que los acerca más al verdadero quehacer y decir matemático, respetando sus momentos exploratorios de formulación de conjeturas, permitiendo la construcción de conocimiento matemático y tratando de hacer que **expliciten y valoren** sus propios procesos de pensamiento y de comunicación de los mismos.

Consideremos ahora, por ejemplo, la situación siguiente:

Sea (G, .) un grupo y H un subgrupo de G , ¿podremos definir entre los elementos del conjunto cociente G/H *una operación de modo tal que éste tenga estructura de grupo?*

Al tratar de responder a esta cuestión, los alumnos se verán obligados a pensar en una forma de definir una operación en el cociente, teniendo sólo disponible la operación de G. Una posibilidad será, naturalmente, definir dicha operación $._H$ de la manera en que figura más arriba, o sea:

$x.H \ ._H\ y.H = (x * y).H$ y **conjeturar**, en principio que:

$(G/H\ ,\ ._H)$ *es un grupo, para cualquier subgrupo H de G.*

Al intentar corroborar o **contrastar** esta afirmación, los alumnos pueden **realizar un esbozo de prueba o "experimento mental"** (tomando las palabras de Lakatos), donde partiendo de la conjetura se vayan sacando consecuencias de ella, que los lleven a detectar que es necesario pedir ciertas condiciones al subgrupo H para que valga la propiedad.

Veamos esto en detalle:

Si nuestra conjetura es verdadera, es decir, $(G/H\ ,\ ._H)$ es un grupo, la operación $._H$ está bien definida (además de cumplir los axiomas de grupo, por supuesto), o sea:

dados xH, x´H, yH, y´H $\in G/H$ se cumple que.

si $xH = x'H \wedge yH = y'H$ entonces $(xH)._H(yH) = (x'H)._H(y'H)$

Pero entonces se cumpliría: $(x*y)H = (x'*y')H$ (por def de $._H$)

con lo cual: $(x' * y')^{-1} * (x * y) \in H$ (por def. de igualdad de co-clases)

o bien, $(y'^{-1} * x'^{-1}) * (x * y) \in H$ (por propiedad del inverso)

o bien, $y'^{-1} * (x'^{-1} * x) * y \in H$ (por la propiedad de asociatividad de $*$ en G)

Pero como estamos bajo la hipótesis de que $x'^{-1} * x \in H$, podemos asegurar que

$x'^{-1} * x = h \in H$.

Entones se cumpliría que: $\mathbf{y'^{-1} * h * y \in H}$ **siendo** $\mathbf{h \in H}$ [2]**,** lo cual no es cierto en cualquier grupo ni en cualquier subgrupo del grupo (se podría hallar fácilmente un contraejemplo!).

Si pudiese conmutar h con y'^{-1} o con y, o, aún, si pudiese escribir $h * y$ como $y * h`$ para algún $h` \in H$, entonces $\mathbf{y'^{-1} * h * y} = y'^{-1} * y * h`$ y como $y'^{-1} * y \in H$ por hipótesis, al ser H subgrupo, podría asegurar que $y'^{-1} * y * h \in H$.

Observemos que bastaría entonces con, incorporar a nuestra conjetura la condición de que para cualquier $y \in G$, $H.y = y.H$.

Este tipo de razonamiento da pié para definir un nuevo objeto matemático pues aparecen en acción y en el discurso elementos de G que cumplen otra propiedad como necesarios y suficientes para dar solución al problema planteado. Así emerge lo que se denomina *subgrupo invariante* como aquel que cumple la condición mencionada anteriormente (es decir, las co-clases a derecha son iguales a las co-clases a izquierda para cada elemento de G), y se incorpora esta hipótesis a la conjetura como condición, de modo que la conjetura quedaría reformulada del siguiente modo:

Si (G, .) es un grupo y <u>*H es un subgrupo invariante de G*</u>, entonces $(G/H, ._H)$ es un grupo con la operación $._H$ así definida.

De este modo, se **reformula la conjetura identificando la subconjetura refutada e incorporando la misma como condición.**

También se puede observar que, por un lado el razonamiento utilizado para contrastar nuestra conjetura inicial, nos acerca mucho a la demostración deductiva de la conjetura reformulada y por otro lado que el objeto: *subgrupo invariante* emerge con un determinado significado, íntimamente relacionado con el

---

[2] Esta es un subconjetura que abre nuevas posibilidades de contrastación.

problema planteado. O sea luego nos debemos plantear -en torno a este objeto- nuevos procesos de contextualización y descontextualización. .

Con estos ejemplos intentamos mostrar cómo ciertas tareas “disparadoras” pueden generar espacios donde se pongan en funcionamiento acciones y argumentaciones vinculadas al razonamiento conjetural, y que permiten construir no sólo propiedades, sino también definiciones de nuevos objetos y demostraciones, mostrando la relación dialéctica (más que complementaria) entre razonamiento conjetural y deductivo.

En este contexto, consideramos que es fundamental promover en la clase la reflexión acerca de:

- el **tipo de tarea** planteada – hasta qué punto contribuye a promover el desarrollo del razonamiento conjetural.
- los **procedimientos** utilizados en la elaboración, contratación y reformulación de las conjeturas
- las **argumentaciones** o patrones de inferencia utilizados en la contrastación de conjeturas.
- las **definiciones** de las cuestiones a las que se está haciendo referencia: conjetura, inducción, generalización, analogía, contraejemplo, etc.
- las **propiedades** que tiene el tipo de razonamiento utilizado, en particular, el hecho de ser provisional y no definitivo, en el sentido de que en un momento dado, una nueva información puede alterar nuestro grado de certeza en la conclusión a la que arribamos.
- la influencia que tiene en este proceso el **lenguaje**, la familiaridad que los alumnos tengan con los objetos específicos involucrados en una conjetura, las diferentes representaciones disponibles de tales objetos, entre otros.
- los alcances y las limitaciones del tipo de razonamiento utilizado,
- las diferencias entre el conjeturar deductivo frente al conjeturar ingenuo (por inducción, analogía, etc) y la relación dialéctica que se establece entre razonamiento conjetural y deductivo,

A partir de este tipo de análisis de elementos de significados vinculados al razonamiento conjetural que los mismos alumnos ponen en funcionamiento en las tareas mencionadas, pretendemos ir aproximándolos, en forma dialéctica con sus significados personales, al significado de referencia pretendido, es decir, estamos planteando aquí un momento de institucionalización de los aspectos relacionados al razonamiento conjetural que han sido usados y puestos a funcionar para producir matemática por los propios alumnos en específicos espacios matemáticos. O sea, estamos planteando enriquecer el proceso de institucionalización en la clase de matemática para futuros profesores. En efecto, especialmente este proceso está ligado a darle un estatus de saber a las técnicas, nociones, propiedades y/o teoremas; por lo que aquí se propone, además, explicitar y reflexionar sobre los modos personales y colectivos de “pensar” y “decir” sobre un conocimiento matemático.

3. Conclusiones

A través de este trabajo quisimos mostrar cómo, algunos avances logrados en el marco de nuestro proyecto de investigación, pueden aportar a la formación de los profesores de matemática y constituir, verdaderamente, un motor de cambios en el ámbito del aula, promoviendo, en este caso el desarrollo e institucionalización del razonamiento conjetural.

Hemos partido de un problema didáctico relacionado con la escasez de espacios de trabajo y reflexión acerca del razonamiento conjetural o plausible detectado en el ámbito de la enseñanza de nivel medio, y hemos trasladado esta problemática al ámbito de la formación de profesores. En este sentido, estamos planteando que, para revertir dicha situación, es necesario incluir espacios de trabajo y reflexión acerca del razonamiento conjetural en la misma.

En función de esto, es que planteamos algunas opciones de producción matemática para lograr que nuestros alumnos del profesorado, en materias de específico contenido disciplinar, tengan un mayor contacto con situaciones que involucren la elaboración de conjeturas y que generen sistemas de prácticas en las que se ponga a funcionar y se reconozca el razonamiento conjetural, logrando de este modo una relación diferente con el saber matemático, en particular, con el razonamiento matemático. Creemos que es fundamental plantear instancias de reflexión donde, a partir de un análisis de los propios significados personales de los alumnos y de los elementos puestos en juego en la resolución de situaciones que involucran el razonamiento conjetural, se pueda ir generando y re-construyendo[3] este significado de referencia que regula el uso y funcionamiento del razonamiento conjetural.

Este tipo de trabajo en la formación del profesor, puede repercutir en grandes cambios en su futura actividad profesional. Esta manera diferente de relacionarse con el razonamiento conjetural, desnaturalizarlo sacándolo de la esfera personal y proponiéndolo como objeto a cuestionar, puede ofrecerle otra perspectiva epistemológica y herramientas importantes para incorporar en su práctica profesional: creemos que estará en mejores condiciones para poder seleccionar o diseñar las tareas que presente a sus alumnos a fin de promover la formulación y contrastación de conjeturas, y que contará con elementos que le permitirán analizar con mayor precisión la actividad de sus alumnos ante estas situaciones, ayudarles a reconocer los elementos que ponen en funcionamiento y a ser concientes del alcance y las limitaciones del tipo de razonamiento utilizado. Esto nos marca la dirección en la cual debemos avanzar en nuestra investigación.

---

[3] Darle contenido asociado a los contextos matemáticos trabajados.

REFERENCIAS

BIRKCOFF MAC. LANE. 1970 Algebra Moderna. Editorial Aguilar.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. Y GASCÓN, J. 1997. *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. (Horsori, Barcelona).

DORRONSORO, J. Y HERNANDEZ, E. (1996) Números, grupos y anillos. Ed. Addison-Wesley.

GODINO, J.D 2003 Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet. URL: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/monografiatfs.pdf

GODINO, J.D. y BATANERO, C 2008 Formación de profesores de matemática basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Conferencia invitada al VI CIBEM, Puerto Mont, Chile, Enero 2009. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/fprofesores_reflexion_guiada_22dic08.pdf

HERSTEIN,I.N. (1996) Algebra Moderna. (Trillas).

LAKATOS, I. 1978. *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. (Alianza Editorial, Madrid).

MARKIEWICZ, M. E. (2005) El rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina. Versión resumida de esta tesis publicada en el CD correspondiente a las memorias del 9º Simposio de educación Matemática. (Chivilcoy, 2007).

MARKIEWICZ, M.E. (2006) Algunas preguntas de investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural En Actas del Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. Jaén. España. Disponible en Internet.URL: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/ MEMarkiewics_ Razonamiento _ plausible .pdf

MARKIEWICZ, M.E./ETCHEGARAY, S. (2006) Algunos resultados de una investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural. En actas de la "Primer Reunión Pampeana de Educación Matemática". Santa Rosa de la Pampa.. Argentina

PANIZZA, M. (2005) Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos (Libros del Zorzal, Bs. As.)

POLYA, G. 1954 . *Mathematics and Plausible Reasoning*. (Princeton University Press, New Jersey)

ANEXO 1

Síntesis del significado de referencia acerca del razonamiento conjetural

❖ **SITUACIONES**

- Situaciones que involucran la elaboración de una conjetura, en particular, aquellas en las que es necesario formular una relación general.
- Problemas (ya sea de encontrar o de demostrar) en los que, para su resolución sea útil o necesario recurrir a un caso más general, a un caso particular, o a un caso análogo.
- Situaciones o tareas que involucran aisladamente alguno o algunos de los procedimientos que mencionaremos a continuación.

❖ **PROCEDIMIENTOS**

➢ Elaboración de conjeturas a través de:

- Inducción:
  - *Observación de casos particulares o ejemplos,*
  - *Sistematización de los casos observados,*
  - *Búsqueda de regularidades;*
  - *Generalización.*
- Analogía: *A partir de la similitud encontrada entre dos o más cosas en algún aspecto, se infiere la similitud de esas cosas en otros aspectos.*
- Generalización: *A partir del cumplimiento de una propiedad en un conjunto de objetos, se infiere el cumplimiento de dicha propiedad en un conjunto mayor que lo contiene.*
- *Ensayo y error a partir de conjeturas ingenuas que van siendo refutadas rápidamente una tras otra.* (Lakatos)
- Conjeturar deductivo: *idear directamente una síntesis para nuestra conjetura a partir de otra proposición emparentada con ella que ya sepamos que es verdadera.*

➢ Contrastación de conjeturas, a través de:

- examen de consecuencias (*es decir, de una proposición que se deduce o desprende de la conjetura).* Puede consistir en:
  - la verificación de la conjetura en un nuevo caso particular aislado.
  - algún tipo de verificación que sirva para todo un conjunto de casos.

- experimento mental contrastador (*prueba que descompone la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas, abriendo nuevas posibilidades de contrastación. En estos experimentos mentales se parte de la conjetura primitiva y se van sacando consecuencias de ella).*

- examen de un posible motivo *(es decir, de una proposición de la cual se desprende nuestra conjetura)*
- examen de una conjetura rival incompatible *(es decir, de una proposición que no puede ser verdadera al mismo tiempo que la conjetura original)*
- examen de una conjetura análoga.

➢ Reformulación de conjeturas a partir del hallazgo de contraejemplos: globales (que refutan la conjetura) o locales (que refutan alguna de las subconjeturas o lemas)

  - mediante redefiniciones de los términos que en ella intervienen
  - mediante la reinterpretación del contraejemplo.
  - mediante una restricción del dominio de validez de la conjetura
  - mediante la identificación de la subconjetura (explícita o implícita en la prueba) que es refutada por el contraejemplo local y su incorporación a la conjetura como condición.

❖ DEFINICIONES

Definiciones que, de algún modo, están vinculadas a nuestro objeto, entre otras las de:

- **razonamiento plausible**
- **conjetura**
- **inducción**
- **analogía**
- **generalización**
- **especialización**
- **contraejemplo** (considerado este en su aspecto de disparador para la reformulación de una conjetura)

❖ ARGUMENTACIONES

Patrones de inferencia plausible: reglas que muestran condiciones para hacer más o menos creíble una conjetura.

- Patrón inductivo fundamental: “la verificación de una consecuencia hace a la conjetura más creíble”.
- La verificación de una consecuencia cuenta más o menos de acuerdo a cómo la nueva consecuencia difiere más o menos de las consecuencias anteriormente verificadas.
- La verificación de una consecuencia cuenta más o menos de acuerdo a si la consecuencia es más o menos improbable en sí misma.
- Nuestra confianza en una conjetura sólo puede disminuir cuando un posible fundamento de la misma es refutado.
- Nuestra confianza en una conjetura sólo puede aumentar cuando una conjetura rival incompatible es refutada.
- Una conjetura es más creíble cuando una conjetura análoga es verdadera.

❖ PROPIEDADES

- El razonamiento plausible es azaroso, provisional y controversial.
- Tiene normas fluidas y no hay una teoría clara y consensuada del mismo.
- Sus patrones de inferencia, considerados en uno de sus aspectos (la dirección) pueden ser considerados impersonales (ya que no dependen de la persona que realiza la inferencia), universales (ya que tampoco depende del contenido) y hasta autosuficientes en cierta forma (porque no necesitan de nada fuera de las premisas para llegar a esa conclusión), pero de ningún modo definitivos. Al considerar el otro aspecto (la magnitud) dejan de ser también impersonales, universales y autosuficientes.