EXPLORACIÓN DEL PERÍODO DE LOS RACIONALES

Vosahlo, Guillermina Emilia
ISFD Aguilares, Tucumán
gvosahlo@yahoo.com.ar

Resumen

Las actividades recomendadas para realizar en el aula deben tener, entre otras características, un carácter abierto, para que el alumno pueda descubrir una multiplicidad de soluciones y estrategias de resolución; deben ser conceptualmente ricas, permitiendo el tratamiento de varios conceptos, pero sin tener tal diversidad de temas que desoriente al alumno y deben poder resolverse aunque no se cuente con la capacidad de validar las respuestas.

El presente trabajo corresponde, en gran medida, a la puesta en aula de una propuesta de enseñanza de otro grupo de investigación. Incluye actividades de exploración del período de los racionales con nuevos recursos con el fin de descubrir regularidades, permitiendo formular conjeturas y validarlas o refutarlas, otorgándole al alumno un rol activo en la construcción del conocimiento.

Palabras Claves: números racionales, período de racionales, uso de TIC

Fundamentación

La actividad matemática que tradicionalmente se llevó a cabo en las aulas fue la transmisión de contenidos elaborados, sin dar lugar a los alumnos a la exploración, la formulación de conjeturas, las argumentaciones en torno a ellas, y la validación o refutación de las mismas. En la actualidad se reconoce que la actividad matemática incluye tanto las exploraciones y aproximaciones realizadas en el proceso de búsqueda de soluciones como la formalización y presentación de resultados.

La exploración del período de los racionales haciendo uso de calculadora, planilla de cálculo o software matemático es una actividad conceptualmente rica, porque abarca el tratamiento de varios temas, sin caer en una diversidad tan amplia que el alumno no pueda manejar. Resulta, por lo tanto, accesible para los alumnos tanto de nivel secundario como superior no universitario. Permite descubrir una serie de regularidades, enunciar conjeturas indicando para qué números se verifican y luego pueden validarlas o refutarlas.

A su vez, esta exploración, permite que los alumnos reconozcan que los períodos no siempre son cortos, sino que existen expansiones decimales con períodos largos.

El uso de planillas de cálculo o software matemático permite visualizar períodos que superan en su extensión la capacidad del visor de la calculadora.

La experiencia fue llevada a cabo con alumnos de tercer año de secundaria (ex noveno de EGB) y alumnos del profesorado en matemática de un instituto de formación docente.

Desarrollo

Los alumnos se organizaron en pequeños grupos de dos o tres alumnos y se les entregó una guía de actividades para explorar el período de los racionales.

Primer momento: Familiarización

La consigna comenzó con la sugerencia de explorar los posibles períodos que tienen las fracciones con denominador 3, en su representación decimal, que elaboren una conjetura acerca de qué fracciones tienen la misma parte periódica en su expansión decimal y que demuestren o refuten la conjetura.

A partir del análisis de varios casos los alumnos advirtieron que sólo se presentan dos períodos.

Por ejemplo: $\frac{1}{3} = 0,\hat{3}$ $\quad \frac{2}{3} = 0,\hat{6}$ $\quad \frac{4}{3} = 1,\hat{3}$ $\quad \frac{5}{3} = 1,\hat{6}$

A partir de la observación de varios casos formularon que cuando el numerador tiene resto 1 en la división por 3, el período es 3, y que cuando el numerador tiene resto 2 en la división por 3, el período es 6. Obviamente, cuando el numerador es múltiplo de 3, es una fracción aparente.

Luego trabajaron la validación de la conjetura. El argumento fue: si el numerador tiene resto 1 en la división por 3, se lo puede escribir como 3*n* + 1, y al llevar esta expresión a la fracción se obtiene $\frac{3n+1}{3}=\frac{3n}{3}+\frac{1}{3}=n+\frac{1}{3}$. Así observaron que siempre se obtiene una parte entera *n* más la parte periódica, que es igual a la de $\frac{1}{3}$.

Incluso los alumnos de nivel secundario pudieron hacer esta validación, con ayuda de la docente, porque sólo requiere conocer lenguaje simbólico básico, propiedad distributiva por derecha de la división con respecto a la suma, y simplificación de fracciones.

Trabajando de manera análoga, cuando el numerador es de la forma 3n + 2, llegaron a la suma de un entero *n* más la fracción $\frac{2}{3}$, concluyendo que la parte periódica coincide con la de $\frac{2}{3}$.

Segundo momento

Luego, se les solicitó estudiar los períodos de las fracciones con denominador 9. Determinaron que hay 8 períodos distintos.

$\frac{1}{9}=0,\hat{1}$	$\frac{2}{9}=0,\hat{2}$	$\frac{3}{9}=0,\hat{3}$	$\frac{4}{9}=0,\hat{4}$
$\frac{5}{9}=0,\hat{5}$	$\frac{6}{9}=0,\hat{6}$	$\frac{7}{9}=0,\hat{7}$	$\frac{8}{9}=0,\hat{8}$

Los alumnos enunciaron dos regularidades observadas. La primera, fue que $\frac{a}{9}=0,\hat{a}$, si $1 \leq a \leq 8$. Es decir, que cuando la parte entera es cero, conociendo el período se puede determinar el numerador, dado que es igual al período. Esta propiedad que se verificó haciendo las divisiones, se puede demostrar convirtiendo en fracción el número $x=0,\hat{a}$ (1). Para ello se multiplica por diez ambos miembros de (1): $10x=a,\hat{a}$ (2) y se resta (1) de (2), obteniéndose $9x = a$. Por lo tanto, $x = 0,\hat{a} = \frac{a}{9}$, quedando demostrada la regularidad observada.

La segunda conjetura enunciada fue que cuando los numeradores tienen el mismo resto en la división por 9, se obtiene el mismo período. Por ejemplo: $\frac{10}{9} = 1,\hat{1}$; $\frac{19}{9} = 2,\hat{1}$, porque 10 y 19 tienen el mismo resto que 1 en la división entera en 9. Esta conjetura se demuestra de manera análoga a la usada en fracciones con denominador 3.

También advirtieron que conociendo la forma decimal se puede reconstruir el numerador N como $a + 9.n$, siendo a el período y n la parte entera. Es decir, para el caso de denominador 9 podían reconstruir la fracción usando una regla distinta a la que se utiliza habitualmente.

La fundamentación fue que al convertir el número decimal $n,\hat{a}$ a fracción, usando la regla conocida, obtendríamos la fracción: $n,\hat{a} = \frac{na - n}{9}$. Usando descomposición polinómica en el numerador de la fracción se obtiene: $\frac{n.10 + a - n}{9} = \frac{9n + a}{9}$, que coincide con la regla descubierta por los alumnos.

A continuación se hizo una puesta en común de los resultados de los distintos grupos.

Tercer momento

Siguiendo lo sugerido por Abrate, Luján y Pochulu (2006), se estudió el período de las fracciones con denominador 7 y 13. Se omite gran parte de lo trabajado con fracciones de denominador 7, porque fue ampliamente tratado por los mencionados autores.

Al analizar las fracciones de denominador 13, observaron que hay doce períodos distintos.

$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$ $\frac{2}{13} = 0,\overline{153846}$ $\frac{3}{13} = 0,\overline{230769}$

$\frac{4}{13} = 0,\overline{307692}$ $\frac{5}{13} = 0,\overline{384615}$ $\frac{6}{13} = 0,\overline{461538}$

$\frac{7}{13} = 0,\overline{538461}$ $\frac{8}{13} = 0,\overline{615384}$ $\frac{9}{13} = 0,\overline{692307}$

$\frac{10}{13} = 0,\overline{769230}$ $\frac{11}{13} = 0,\overline{846153}$ $\frac{12}{13} = 0,\overline{923076}$

Los alumnos realizaron las sumas de las cifras de los distintos períodos:

Por ejemplo: **076923** 0+7+6+9+2+3 = 27 2+7 = 9

153846 1+5+3+8+4+6 = 27 2+7 = 9

Como todos los demás períodos tienen dígitos coincidentes con alguno de estos dos períodos, indicaron que la suma es siempre 9.

Cuando sumaron de a dos las cifras del período, descubrieron que siempre la suma es 99 o 198, que es el doble de 99.

Por ejemplo: **076923** 07+69+23 = 99

153846 15+38+46 = 99

Luego sumaron las cifras en grupos de 3, y siempre obtenían 999:

Por ejemplo: **076923** 076+923 = 999

153846 153+846 = 999

Cuarto momento

Se les preguntó si conociendo el período de algunos números se podían determinar los períodos de otros, y si se podía justificar porqué ocurre esto.

Algunos grupos descubrieron que si dos numeradores suman 13, como 1 + 12 o 2 + 11, el período correspondiente a uno de ellos se obtiene pasando al final del período las tres primeras cifras del período del otro, o pasando adelante las tres últimas cifras del período del otro. Ejemplo, para 1 y 12: **076<u>923</u> → <u>923</u>076.**

Vieron que lo mismo ocurre con fracciones de denominador 7. Cuando los numeradores de dos fracciones suman 7, vale la misma regla. Tanto en el caso de denominador 7 como 13, vincularon este hecho con el antes visto, de que las sumas de a tres dígitos de los períodos da 999. Teniendo en cuenta que al sumar las fracciones y obtener un numerador igual al denominador, la fracción debe ser equivalente a 1 (entero). Concluyeron que por eso se obtiene período 9 cuando se desplazan de a tres los dígitos de los períodos de esas fracciones, para que la suma sea equivalente a un entero.

Otros grupos notaron que cuando los numeradores son de la forma 3^n, con $0 \leq n \leq 2$, cada período se determina pasando adelante las dos últimas cifras del período correspondiente al exponente anterior. Se muestran a continuación los períodos de las fracciones con numeradores $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$ y denominador 13:

$$\mathbf{0769\underline{23} \rightarrow 2307\underline{69} \rightarrow 692307}$$

Es decir, el período es cíclico, pero de a dos cifras, para las potencias de 3.

Luego verificaron lo que ocurría con $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$. Descubrieron que a partir del exponente 3 se comienzan a repetir los tres períodos anteriores. Entonces formularon la conjetura que para obtener el período de $\frac{3^{n+1}}{13}, n \in N$, basta con pasar las dos últimas cifras del período de $\frac{3^n}{13}$ al principio del período.

Para validar esta conjetura, comenzaron expresando que vale para las fracciones cuyos numeradores son las tres primeras potencias naturales de 3:

$$\frac{1}{13} = \frac{3^0}{13} = 0,\overline{076923}, \frac{3}{13} = \frac{3^1}{13} = 0,\overline{230769}, \frac{9}{13} = \frac{3^2}{13} = 0,\overline{692307}, \frac{27}{13} = \frac{3^3}{13} = 1,\overline{076923}.$$

Luego demostraron por inducción que $\forall n \geq 0$, $3^{n+3} \equiv 3^n(13)$.

- Vale para $n = 0$: $3^3 \equiv 3^0(13)$, porque $13 \mid (3^3 - 1)$.
- Suponemos que vale para $n = k$: $3^{k+3} \equiv 3^k(13)$, $k \geq 0$.

• En base a la suposición previa, demostramos que vale para $n = k + 1$: $3^{k+4} \equiv 3^{k+1}(13)$

Usando la propiedad: $\forall a, b, c, p \in N$, $a \equiv b(p) \wedge c \equiv 1(p) \Rightarrow a.c \equiv b(p)$, justificaron que:

$3^{k+4} = 3^{k+1}.3^3 \equiv 3^{k+1}(13)$.

En consecuencia, vale para $n = k+1$. Con esto queda demostrada la conjetura, puesto que ya habían justificado que cuando dos números distintos tienen el mismo resto en la división por un tercero, sus expansiones decimales difieren en la parte entera, pero la parte decimal coincide.

Algo semejante notaron para numeradores iguales a potencias de 2 en las fracciones de denominador 7. Es decir, el período de fracciones del tipo $\frac{2^{n+1}}{7}$ se obtiene pasando las dos primeras cifras del período de $\frac{2^n}{7}$ al final del período.

Otros grupos advirtieron en fracciones con denominador 13, que cuando los numeradores son 2, 5 y 6, el período de cada uno se obtiene pasando hacia atrás las dos primeras cifras del período del número anterior: **$\underline{15}$3846** $\rightarrow$ **$\underline{38}$4615** $\rightarrow$ **461538**. Argumentaron que esto ocurre porque 2 + 5 + 6 = 13, por lo tanto, al sumar fracciones con estos numeradores, se obtiene una fracción equivalente a uno, y concluyeron que al sumar los tres períodos debería obtenerse el período 9. Como además ya habían visto que al separar los períodos de a dos cifras y sumarlos se obtenía 99, por eso argumentaron que en estos tres períodos debían estar corridos de a dos los dígitos para que la suma sea entera. Sin embargo, luego notaron que en otras fracciones cuyos numeradores suman 13, como por ejemplo, 2 + 4 + 7 = 13, no se verifica esta conjetura.

En este punto notaron que era muy complicado seguir buscando regularidades de este modo, porque se encontraban reglas válidas para unos pocos casos, y resultaban demasiadas reglas, para cubrir los 12 períodos posibles cuando se divide por 13.

Se hizo a continuación una puesta en común de los resultados obtenidos por los grupos.

Quinto momento

Se les pidió que multiplicaran el período correspondiente al numerador 1 por cada uno de los restantes numeradores de 2 a 12, y vieron que se obtiene el correspondiente período.

076923 . 2 = 153846 período de $\frac{2}{13}$,

076923 . 3 = 230769 período de $\frac{3}{13}$, **…**

076923 . 12 = 923076 período de $\frac{12}{13}$

Se les preguntó: ¿Pero qué ocurre cuando se multiplica por factores mayores que 12? Comenzaron probando con factores que son múltiplos de 13.

076923 . 13 = 999999

076923 . 26 = 1999998

076923 . 39 = 2999997

076923 . 52 = 3999996

Conjeturaron viendo estos 4 casos: 13 = 13.1, 13.2 = 26, 13.3 = 39 y 13.4 = 52, que al multiplicar el período de $\frac{1}{13}$ por un múltiplo de 13 se obtiene:

$$076923.13k = \underbrace{(k\text{-}1)}_{\text{Primer dígito}}99999\underbrace{(10\text{-}k)}_{\text{Ultimo dígito}}$$

Luego advirtieron que la conjetura, tal como la formularon, vale sólo hasta k = 10, porque para k = 11 el último dígito sería 10 -11 = -1 y un dígito no puede ser negativo.

Pensaron entonces en separar las dos últimas cifras y conjeturaron, que:

$$076923.13k = \underbrace{(k\text{-}1)}_{\text{Primeros dígitos}}9999\underbrace{(100\text{-}k)}_{\text{Dos últimos dígitos}}$$

Con esto lograron que la conjetura valga también para k = 11, 12, 13, …, 100, para los cuales antes no era válida.

Por ejemplo, para k = 11:   **076923 .143 = (11-1)9999(100-11) = 10999989**.

Nótese que el resultado de lo que está dentro de los paréntesis corresponde a las cifras que forman el número, no son factores.

Pero volvieron a tener problemas para 101, ya que las dos últimas cifras serían: 100-101 = -1, y una cifra no puede ser negativa.

Y así siguiendo, fueron reduciendo el número de nueves que tomaban en la parte central, hasta formular la conjetura: 076923.13k = $\underbrace{(k\text{-}1)}_{\text{Primeros dígitos}}\underbrace{(1.000.000\text{-}k)}_{\text{Seis últimos dígitos}}$

Esta conjetura es válida desde k = 2 hasta 1.000.000.

Justificaron la validez de esta conjetura, haciendo notar que 076923.13 = 999999, y por lo tanto:

076923.26 = 076923.13.2 = 999999.2 = (1.000.000-1).2 = 2.000.000-2 = 1.999.998

En general, para cualquier múltiplo de 13 se obtiene:

076923.13.k = 999999.k = (1.000.000-1).k = 1.000.000k – k, que coincide con lo enunciado en la conjetura. Notaron que para darle validez para todos los naturales, se debe expresar de este último modo: 076923.13.k = 1.000.000k – k

Luego se les pidió que observaran lo que ocurre cuando se multiplica el período por números que no son múltiplos de 13.

Comenzaron analizando factores que tienen resto 1 en la división por 13.

076923 . 14 = 1076922	14 = 13.<u>**1**</u> + 1
076923 . 27 = 2076921	27 = 13.<u>**2**</u> + 1
076923 . 40 = 3076920	40 = 13.<u>**3**</u> + 1
076923 . 1301 = 100076823	1301 = 13.<u>**100**</u> + 1
076923 . 13001 = 1000076823	13001 = 13.<u>**1000**</u> + 1

076923 . 1000000 = 76923000000 1000000 = 13.**<u>76923</u>** + 1

076923 . 1000013 = 76923999999 1000013 = 13.**<u>76924</u>** + 1

Vieron que para un factor entre 14 y 1.000.000, que sea congruente con 1 módulo 13, al multiplicar el período 076923 por ese factor se obtiene un número tal que sus seis últimas cifras correspondían al período 076923 disminuido en el cociente de la división de ese factor por 13; y al principio del número se escribe el mencionado cociente.

Es decir: $076923.(13\mathbf{k} + 1) = k0(\underbrace{76923\text{-}k}_{\text{5 últimas cifras del número}})$ si $1 \leq k \leq 76923$

Para validar esta conjetura, mostraron que:

076923.(13k+1)=999999k+076923 =(1.000.000-1)k +076923=1.000.000k + (076923-k)

En este momento se hizo la socialización de los resultados obtenidos por los grupos.

Quedó abierta la posibilidad de que los alumnos sigan explorando la situación con otros restos, en búsqueda de nuevas regularidades, que luego serían socializadas.

Análisis

Con los alumnos del nivel secundario resultó dificultosa la validación de las conjeturas, y hubo que orientarlos continuamente con preguntas para que logren demostrarlas. Las demostraciones se fundamentaron en los conceptos de divisibilidad.

Los alumnos del nivel superior realizaron las demostraciones con mayor independencia usando tanto los conceptos de divisibilidad como los de congruencia.

En el nivel secundario encontraron regularidades referidas a los períodos de fracciones que suman uno, mientras que en el nivel superior también encontraron regularidades referidas a períodos de otras fracciones, como las de la forma $\frac{3^n}{13}$ o $\frac{2^n}{7}$.

Cuando multiplicaron el período correspondiente a $\frac{1}{13}$ por sucesivos naturales, los alumnos del secundario sólo descubrieron la regularidad para los doce primeros naturales, mientras que los alumnos del nivel superior fueron sucesivamente ampliando las conjeturas a los múltiplos de 13 y los que tienen el mismo resto en la división por 13, indicando hasta qué factor son válidas las regularidades observadas.

Conclusiones

La exploración del período de los racionales haciendo uso de calculadora, planilla de cálculo o software matemático resultó una actividad accesible para los alumnos tanto de tercer año del nivel secundario (ex noveno de EGB) como del nivel superior no universitario.

La actividad les permitió descubrir una serie de regularidades, enunciar conjeturas indicando para qué números se verifican y luego pudieron argumentar, validarlas o refutarlas. Los alumnos de nivel medio debieron recibir una orientación permanente en la etapa de validación, pero los de nivel superior lograron hacerlo con mayor independencia.

Esta actividad permite al alumno determinar una respuesta, independientemente de su capacidad para concebir una estrategia de validación. Aunque la solución no sea evidente, puede iniciar un procedimiento de resolución, dando quizás respuestas incompletas que pueden conducirlo a otras preguntas, que puede saber responder o no. El problema es abierto, permitiendo al alumno encontrar diversas respuestas y estrategias de resolución. Todas estas características fueron enumeradas por Douady, en Saiz (1996), para seleccionar buenos problemas para los alumnos.

Referencias

Abrate R., Luján M. y Pochulu M (2006). *La investigación educativa en Matemática con nuevos recursos*. Trabajo presentado en la 4ª Jornada de Informática y Educación, Villa María (Córdoba), Argentina. Noviembre de 2006.

Perelman Yakov. *Aritmética Recreativa* (capítulo 5). En:
http://www.librosmaravillosos.com/aritmeticarecreativa/

Pochulu Marcel. *Períodos de números racionales: Un abordaje desde la teoría de números y con nuevos recursos*. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas. En http://www.sinewton.org/numeros/numeros/68/ideas_01.php.

Saiz, I. (1996). “Propuesta de Contenidos Básicos Comunes para la EGB”. En *Fuentes para la transformación curricular – Matemática*. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.