CARACTERIZACIÓN DE LA UTILIZACIÓN DE LENGUAJES MATEMÁTICOS EN ALUMNOS DE LA SECUNDARIA

Diego Isaías Ibañez. Director de beca: María Margarita Curotto.

BECA DE ESTIMULO A LAS VOCACIONES CIENTÍFICAS – CONSEJO INTERUNIVERSITARIO NACIONAL

Departamento de Formación Docente y Educación Científica – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad Nacional de Catamarca

Belgrano 300 – San Fernando del Valle de Catamarca, Catamarca

izaa-@live.com

Categoría del Trabajo: Trabajos de investigación

Nivel Educativo: Secundario

Palabras clave: Lenguaje – Comunicación – Enseñanza – Aprendizaje

Resumen: El uso de los lenguajes matemáticos es una de las dificultades más importantes en el aprendizaje de la Matemática; su relación con conceptos, propiedades e interpretaciones de los alumnos se presenta en forma constante en las distintas situaciones áulicas, cualquiera sea el tema o la rama de la matemática que se trate. Esta problemática inicia la investigación que se realiza en 8° año de la N.E.S. de la Escuela Preuniversitaria Fray Mamerto Esquiú (UNCa), la cual tiene como meta incentivar a los docentes a plantear sus clases teniendo en cuenta la comunicación en el aula. Para ello se descubren y analizan dificultades y errores en la forma de "expresar" la matemática y su relación con los contenidos y procedimientos involucrados.

En este trabajo se consideran los dos primeros niveles del análisis didáctico de Font: el primero describe la secuencia de prácticas matemáticas y el segundo los objetos matemáticos implícitos en dichas prácticas. Además se analizan, en torno a los objetivos planteados, los conflictos propios del lenguaje utilizado. Las observaciones realizadas se tabularon realizando comentarios sobre las mismas y se compararon los análisis descriptos para la conclusión donde se incluyen recomendaciones sobre la práctica docente.

Presentación: La comunicación en el aula de Matemática puede presentarse de diversas maneras: a través de palabras (un enunciado, una instrucción, etc.), de un escrito (desarrollo de un problema, respuesta a una pregunta, etc.) o de gráficos (dibujos representativos, mapas, etc.). Es decir, está constantemente presente la relación entre los lenguajes algebraico, coloquial y gráfico. De hecho, esa relación forma una estructura en el desarrollo del individuo que pone en evidencia habilidades, como la interpretación y deducción, fundamentales para aprender esta ciencia. Un análisis exhaustivo de la forma de comunicarse de un alumno permite obtener una visión muy fructífera de cuáles son los motivos de ciertos conflictos tanto en la forma de expresarse como en el pasaje entre los distintos lenguajes. Por ello, trabajamos con la siguiente **metodología**:

- Observación de clases y obtención de datos referentes a la interacción entre el profesor y alumnos objetivos.
- Tabulación de datos con comentarios iniciales del autor.
- Clasificación de datos en base a los niveles 1 y 2 del análisis didáctico de Font.
- Detección de conflictos categorizados según el tipo de lenguaje al cual se refieran.
- Conclusiones con recomendaciones para el profesor.

Los **objetivos** planteados son:

- Analizar los lenguajes matemáticos utilizados por los alumnos y el profesor.
- Determinar los conflictos generados por el uso de los distintos lenguajes.
- Valorar la importancia de la relación de los distintos tipos de lenguaje matemático en la clase para la comunicación de un concepto de manera más eficiente.

Marco teórico: Font (2008) propone cinco niveles de análisis didáctico para ser aplicados a situaciones de aula basándose en el enfoque ontosemiótico: *Nivel 1.* Identificación de prácticas matemáticas; *Nivel 2.* Identificación de objetos y procesos matemáticos; *Nivel 3.* Descripción de interacciones en torno a conflictos; *Nivel 4.* Identificación de normas; *Nivel 5.* Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción.

En este trabajo se consideran los dos primeros niveles y se analizan, en torno a los objetivos planteados, los conflictos propios del lenguaje utilizado. El primero de estos niveles lleva a describir la secuencia de prácticas matemáticas y moviliza elementos distintos: un agente que realiza la práctica y un medio donde se realiza; en este caso, el profesor en el aula cuyas prácticas están orientadas al aprendizaje de conceptos y relaciones matemáticas. En el segundo nivel se consideran, entre otros aspectos, el uso de los distintos lenguajes, objetos y procesos matemáticos reflexionando sobre su diversidad y las tipologías de unos y otros.

Identificación de prácticas y objetos matemáticos: Las acciones (lingüísticas o de otro tipo) que realiza un individuo tanto para la resolución de problemas matemáticos como para la comunicación con otros a fin de validar una afirmación se conocen como *prácticas matemáticas.* Estas prácticas se realizan muy a menudo, especialmente cuando el profesor diseña un ambiente de interacción constante en donde el alumno afirma, justifica y opina sobre los temas tratados. A continuación se analizan las interacciones en clase realizadas sobre la observación que consta en el Anexo.

Alumno 1	**I.** Corrige el lenguaje utilizado del Alumno 2 para identificar los lados **(*)**. **II.** Identifica la ecuación representativa del problema de la suma de ángulos interiores, utilizando la propiedad estudiada y reemplazando las hipótesis. **III.** Resuelve la ecuación. **IV.** Define a los paralelogramos utilizando la propiedad de igualdad de lados opuestos **(**)**. **V.** Define ángulo recto.
Alumno 2	**I.** Relaciona los conceptos de concavidad en ángulos y cuadriláteros. **II.** Denomina a los lados con las letras de los vértices **(*)**. **III.** Reconoce la correspondencia entre la diagonal de un cuadrilátero y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. **IV.** Define rombo como un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos agudos.
Profesor	**I.** Enuncia definiciones y propiedades. **II.** Guía a los alumnos en las actividades propuestas con software matemático. **III.** Guía a la clase en un problema práctico que requiere la aplicación de la igualdad de ángulos interiores opuestos. **IV.** Realiza el trazado de la altura de un paralelogramo. **V.** Corrige al Alumno 1 sobre la definición de paralelogramo **(**)**.

Identificación de objetos matemáticos: Para que un individuo realice prácticas matemáticas, debe contar con el conocimiento de conceptos matemáticos que lo permitan, cuyo uso se explicita en las proposiciones y procedimientos que se aplican. Además, para justificar y defender ciertas decisiones o posiciones respecto a un problema, se debe contar con un lenguaje matemático apropiado para justificarlas. Es decir, las prácticas matemáticas están sustentadas en distintos *objetos matemáticos* que el individuo utiliza uso para ejercerlas.

LENGUAJE	
Alumno 1	AB y CD; ecuación; lados iguales; grados
Alumno 2	ángulo; cóncavo; dividir; lado; A y C; hipotenusa; diagonal; grados
Profesor	cuadrilátero; ángulo; cóncavo; convexo; mayor; menor; cortar; recta; interior; exterior; segmento; grados; diagonal; adyacente; suplementario; altura; paralelo; perpendicular; perímetro; área; teorema de Pitágoras; D/2
CONCEPTOS	
Alumno 1	ecuaciones; resolución de problemas; igualdad de segmentos; s. sexagesimal
Alumno 2	ángulo cóncavo; diagonal; triángulo rectángulo; s. sexagesimal
Profesor	cuadriláteros; concavidad; recta; segmento; lado; diagonal; posición relativa de rectas; altura; s. sexagesimal; teorema de Pitágoras
PROPOSICIONES	
Alumno 1	AB y CD son lados opuestos; A+B+C+D = 360°; los lados opuestos deben ser iguales; los ángulos miden 90°
Alumno 2	tiene un ángulo cóncavo; debe dividir en dos lados; A y C son lados opuestos; la diagonal es la hipotenusa; sus ángulos tienen menos de 90°
Profesor	hay un lado que mide más de 180°; podemos escribir B+D = 2B; los lados opuestos deben ser paralelos; la mitad vale D/2
PROCEDIMIENTOS	
Alumno 1	resolución de ecuaciones
Profesor	determinación de concavidad en forma gráfica; trazado de paralelogramo
ARGUMENTOS	
Alumno 1	los ángulos A y C son iguales
Profesor	B = D

Identificación de conflictos: Clasificamos los conflictos detectados en:

- *Conceptuales*: Las expresiones erróneas muchas veces se deben a interpretaciones erróneas de ciertos conceptos. Por otra parte, la falta de participación se origina en la ausencia de un contenido conceptual para realizar una afirmación.
- *De lenguaje*: El uso de palabras inapropiadas para referirse a un objeto matemático puede generar confusión o futuros obstáculos para un conocimiento nuevo.
- *De transferencia:* El circuito entre los lenguajes simbólico, gráfico y coloquial es uno de los mayores puntos críticos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Algunos conflictos identificados en las observaciones son:

Conceptuales	El profesor enuncia las propiedades de los paralelogramos, entre ellas «los ángulos adyacentes a un lado son suplementarios», lo cual **no es interpretado por los alumnos a menos que dichos pares de ángulos se señalen sobre el dibujo**.
De lenguaje	El profesor indica: "Trazamos un segmento con el cual veremos si el cuadrilátero es cóncavo o convexo". Los alumnos repiten el proceso en sus computadoras. "¿Qué pasa si es convexo?", pregunta el profesor, a lo que un alumno contesta: "**Debe dividir en dos lados**".
De transferencia	El profesor pregunta: "¿Cuánto vale la mitad?" señalando la diagonal indicada por D. **Nadie responde. Posteriormente, en ejercicios numéricos calculan dicha mitad de forma inmediata.**

Conclusiones y recomendaciones: En el rol del profesor como guía para que los alumnos encuentren la solución por ellos mismos, se puede reconocer la escasez de herramientas que el alumno usa para resolver un problema (puede contar con más herramientas, pero no recordarlas o no saber aplicarlas). Esto muestra lo difícil que es para el alumno la aplicación de un contenido; a muchos les cuesta interpretar, resolver y justificar mientras que otros lo hacen sin evaluar luego si lo realizado es correcto. La revisión de una tarea es un hábito que debe implementarse, pues permite detectar errores o fallas que han sido pasados por alto.

En primer lugar reconocemos que el mismo profesor puede ser muchas veces un obstáculo para el desarrollo de habilidades ya que en ciertas ocasiones:

- No otorga el tiempo necesario para que el alumno reflexione o discuta con sus compañeros sobre la resolución de un problema.
- No utiliza con la frecuencia adecuada ejercicios en el aula que requiera la participación de los alumnos. En este caso, utilizar algunos problemas que tienen varias vías de solución es una herramienta didáctica útil para enriquecer el debate.
- No incluye en las guías prácticas suficientes ejercicios de aplicación donde el alumno deba reconocer el objeto matemático a utilizar y justificar sus acciones.

Por otra parte, las prácticas matemáticas de los alumnos se ve empobrecida debido a la falta de pensamiento lógico fundamental para un desarrollo deductivo, propio de la edad de los mismos. Para reforzarlas, es necesario contextualizar los resultados de un problema, como ejercicio de la relación que existe entre el lenguaje habitual y el lenguaje matemático. Se pueden enumerar una serie de prácticas matemáticas que deben pretenderse que el alumno realice, con el fin de optimizar el aprendizaje:

- *Realizar definiciones coloquiales*: No es un imposible que el alumno exprese con sus palabras una definición o una propiedad intentando no generar contradicciones.
- *Identificar hipótesis:* Separar o enfatizar los datos de un problema es una actividad importante que permite a los alumnos aprender a leer los enunciados con la atención y el cuidado necesarios. Podemos complementarlo con la mención de los conocimientos matemáticos que nos serán útiles para resolverlo.
- *Reconocimiento gráfico*: El uso de problemas que requieran la identificación de figuras geométricas es importante, debido a que los alumnos generalmente asocian las mismas con ciertas posiciones, sin tener en cuenta que dicha posición puede variar.

El uso de software es una oportunidad única de poder trabajar tanto con figuras geométricas como en otros temas matemáticos. No debe haber un abuso sino un uso debido y consciente del mismo, como complemento y no como camino único.

Como punto positivo de esta observación, los alumnos han participado de la interacción áulica de manera constante. Más allá de no poseer un lenguaje adecuado o de cometer errores más bien del tipo formales, el enriquecimiento que se logra en dicho intercambio es probablemente el más importante de la clase. El alumno generalmente ve más de lo que expresa o dice, y esto es un tema que debe tratarse con dedicación, paciencia y estrategias de comunicación.

Por último, debe entenderse que el alumno no tenga rigor matemático. Asuntos como no diferenciar entre una definición o una propiedad no deben ser urgentes. Corregir tantos detalles podría seguramente inhibir al alumno y atentar contra su aporte a la comunicación. Debe enfatizarse otras cuestiones más acordes a nuestros objetivos planteados, para que las etapas del aprendizaje matemático fluyan de manera correcta y a su debido tiempo.

Anexo: Las observaciones detalladas a continuación se realizaron los días 13 y 14 de octubre de 2011 en el curso 8vo “B” de la Escuela Preuniversitaria “Fray Mamerto Esquiú”. El tema tratado es *Cuadriláteros: Definición, clasificación y propiedades.*

El profesor define cuadriláteros y luego lo clasifica: ***P* –** Un cuadrilátero es convexo si todos sus ángulos son menores que 180° (traza en la pizarra el signo $<$ y a su lado escribe “menor”). Para comprobarlo, una recta debe cortar a

lo sumo en 2 puntos. Un cuadrilátero es cóncavo si tiene un ángulo mayor que 180°.

A1 – ¿Uno sólo?

P – Sí, y en el caso de un cuadrilátero cóncavo, una recta corta en más de 2 puntos. (***1**)

A2 – Tiene un ángulo cóncavo. (***2**)

El profesor continúa la clase. Comunica a los chicos que va a enunciar la propiedad general para todos los cuadriláteros. Los alumnos toman nota de lo que explica el profesor.

A2 – Me quedé… ¿Para cualquier?

P – Todos o cualquiera, es lo mismo. La propiedad dice: la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°. (***3**)

El profesor continúa su clase desde una computadora proyectando su imagen sobre la pared, y utilizando el software libre Geogebra dibuja un cuadrilátero.

P – Dibujamos un segmento para ver si el cuadrilátero es cóncavo o convexo.

A2 – Debe dividir en dos lados. (***4**)

El profesor lo hace, mientras los alumnos que llevaron las netbooks lo hacen allí. Luego, modifica el cuadrilátero convexo hasta obtener uno cóncavo. (***5**)

P – Vean que hay un ángulo que mide más de 180°.

A1 – ¿Cuál sería? (***6**)

El profesor señala el ángulo y el alumno queda conforme. Realiza el mismo procedimiento con el segmento para mostrar que el cuadrilátero es cóncavo. Continúa la clase con la clasificación de cuadriláteros.

P – Paralelogramo: Es un cuadrilátero con sus lados opuestos paralelos. Sus propiedades son: sus lados opuestos son iguales, sus ángulos interiores opuestos son iguales, sus diagonales se cortan en un punto que las divide en partes iguales y los ángulos adyacentes a un lado son suplementarios. (***7**). Dibuja un paralelogramo ABCD en la pizarra.

P – ¿Cuáles serían lados opuestos?

A2 – A y C.

A1 – AB Y CD. (***8**)

P – Bien. Ahora, ¿alguien recuerda la definición de diagonales? (***9**)

Nadie responde. Varios de ellos buscan en sus carpetas la definición. El profesor, sobre el mismo dibujo, nombra los elementos del paralelogramo inclusive la altura.

P – Para la altura prolongamos la base y levantamos un segmento perpendicular al ángulo opuesto. ¿Saben que es perpendicular?

Contestan a coro que no. El profesor explica y los alumnos quedan conformes, pero aclaran no saber lo que es *altura*. El profesor les indica que justamente ese segmento perpendicular se conoce como tal. (***10**). Luego, el profesor enuncia perímetro y área y da un ejemplo que consiste en dado un ángulo de 70° encontrar los restantes, a lo cual pasa **Alumno 1** a resolverlo. Escribe A+B+C+D = 360° y debajo 35°+B+35°+D = 360° y se detiene. (***11**). El profesor guía la clase hasta deducir que B = D por propiedad.

P* –** Entonces podemos escribir B+D = B+B = 2B y así A+B+C+D = A+C+2B. (12**)

Los alumnos dudan pero lo aceptan. La alumna continúa resolviendo hasta llegar a la solución B = 110°. El profesor da por terminado el ejercicio, y recurre a la computadora para enseñar a dibujar un paralelogramo.

***P* –** Para dibujar un paralelogramo, ¿cómo deben ser los lados opuestos?

A1* –** Iguales. (13**)

P* –** Paralelos – corrige pero no se justifica. (14**)

Basándose en ello, construye el paralelogramo usando rectas paralelas y enseña a marcar sus ángulos interiores. Continúa la siguiente clase con la definición de rectángulo.

***P* –** Tiene todos sus ángulos rectos.

A1* –** Miden 90°. (15**)

***P* –** ¿Cómo tiene que ser una recta para que forme con otra un ángulo de 90°?

Los alumnos no responden. (***16**). El profesor enuncia perímetro y área y los chicos lo comprenden. Además reconocen el uso del teorema de Pitágoras en el cálculo de diagonal.

A2* –** La diagonal es la hipotenusa. (17**)

La clase continúa con la definición y propiedades del cuadrado, sin interrupciones. (***18**). Luego, se inicia el estudio del rombo.

***P* –** ¿Qué es rombo?

A2* –** ¿Puede ser que sus ángulos tengan menos de 90°? (19**)

P* –** No. El rombo es aquel cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales. (20**)

El profesor explica que las diagonales del rombo se dicen menor y mayor y que son perpendiculares entre sí, y además se cortan en su punto medio.

***P* –** ¿Cuánto vale la mitad? – señala la diagonal mayor indicada por D.

Nadie responde.

P* –** ¿D/2? (21**)

El profesor enuncia las fórmulas de perímetro y área, sin deducción de por medio, y las fórmulas para el cálculo de diagonales. (***22**). La clase finaliza con ejercicios de aplicación.

*1: La recta no es arbitraria; el profesor debería aclarar que "existen" rectas que cortan en más de 2 puntos. *2: El alumno dice algo correcto, pero ¿sabrá la definición de ángulo cóncavo? ***3:** El profesor aclara que el uso de las expresiones "cualquiera" y "todo" son equivalentes en lenguaje matemático. ***4:** El alumno utiliza "dividir" en lugar de "intersecar". ***5:** Los alumnos comprenden la facilidad de convertir un cuadrilátero convexo en uno cóncavo modificando sólo uno de sus ángulos. ***6:** El alumno no puede distinguir el ángulo cóncavo, lo que muestra la dificultad que tiene al analizar la figura. ***7:** Los alumnos no entienden la expresión "ángulos adyacentes a un lado"; distinguen dichos ángulos sólo cuando el profesor los señala. ***8:** El alumno 2 señala vértices opuestos y el alumno 1 corrige correctamente. ***9:** Los alumnos reconocen fácilmente las diagonales de un polígono y las trazan correctamente, pero no pueden construir mediante la gráfica la definición de "diagonal". ***10:** Los alumnos aprenden el concepto de "altura" en el estudio de los paralelogramos, pero no se da una definición formal que les permita reconocer la altura de otras figuras. ***11:** La alumna hace uso de la igualdad de A y C, ya que conoce sus valores numéricos, pero no puede hacer uso de la igualdad de B y D para poder resolver la ecuación. Esto muestra la problemática de pasar de un lenguaje concreto a uno más abstracto. ***12:** Los alumnos copian pero no parecen haber comprendido. Como es de esperar, les cuesta aceptar que se puede escribir B o D ya que son iguales. ***13:** El alumno hace uso de una propiedad; tal vez no entiende la diferencia entre "propiedad" y "definición". ***14:** El profesor no aclara la situación. La alumna quizás toma como erróneo decir que los lados opuestos son iguales en un paralelogramo, pero la corrección es debido a que se pide la definición y no una propiedad. ***15:** El alumno enuncia la definición de ángulo recto. ***16:** Los alumnos no usan el término perpendicular y, aunque reconocen gráficamente un ángulo recto, no pueden describir la posición relativa de las rectas. ***17:** El alumno establece una relación entre los elementos del triángulo rectángulo con el que se forma entre la diagonal y los lados. Análogamente, asocia catetos con base y altura del rectángulo. ***18:** Se podría sugerir al profesor el debate de si un cuadrado es rectángulo y viceversa. ***19:** El alumno asocia esto seguramente a una imagen gráfica del rombo, donde a simple vista los ángulos miden menos de 90°. ***20:** Tampoco se asocia aquí al rombo con el cuadrado. ***21:** Los alumnos no comprenden el significado algebraico. ***22:** El alumno puede calcular diagonales o lados utilizando el teorema de Pitágoras, sin necesidad de utilizar una fórmula prefijada.

Cita Bibliográfica: Font, V; Planas, N.; Godino, J; (2009) Modelo para el análisis didáctico en Educación Matemática – Universidades de Barcelona y Granada. España