Introducción

Es de gran importancia en Matemática Aplicada poder reconocer el alcance de los modelos matemáticos que describen los fenómenos físicos que se desean estudiar. En el caso particular de la ecuación del calor, un cambio de fase en el material hace necesario reformular el modelo ya que nuevos fenómenos tales como fronteras libres y regiones pastosas aparecen(referencias).

Por esto es deseable establecer condiciones sobre los datos del problema para estimar el rango de validez del modelo.

En la literatura varios autores han tratado el tema, en el caso unidimensional (referencias), en dimensiones mayores que uno(referencias),en diferentes geometrías (referencias) y con diversos tipos de condiciones de borde(temperatura, flujo, convectiva)(referencias).

La principal dificultad que se presenta al atacar este tipo de problemas es la forma en que la solución está representada (ecuaciones integrales, soluciones en serie) la cual impide un manejo sencillo para obtener cotas.

Las herramientas teóricas de que se hará uso a lo largo del trabajo serán las siguientes:

1. Principio del Máximo (PM) para la ecuación del calor y Lema de Hopf

(LH)(referencias).

2. Transformadas integrales (Tranformada de Laplace) (referencias).

3. Métodos asintóticos, principalmente para la inversión de la Transformada de Laplace (referencias).

4. Metódos numéricos (Método de Elementos Finitos) (referencias).

Una breve exposición de estos cuatro puntos se realiza en el primer capítulo. Los problemas estudiados serán unidimensionales y contarán como innovación condiciones de contorno no tratadas en la literatura:

1. El flujo de calor en un extremo depende de la temperatura a través de una ley no lineal, esto puede ser visto como una generalización de la condición convectiva.

2. El material en un extremo se encuentra en contacto térmico perfecto con un conductor perfecto.

En el capítulo 2 se aborda el caso no lineal mediante la acotación de la solución explícita en términos de funciones sencillas que permiten la obtención de cotas del tiempo de cambio de fase del problema.

En el capítulo 3 se estudia el problema de conducción con la condición de contacto perfecto, propiedades cualitativas, representación en forma de serie de la solución y comportamiento asintótico son analizados.

En el capítulo 4 se dan estimaciones del tiempo de cambio de fase para el problema del capítulo anterior a través de la Transformada de Laplace.

Por último en el capítulo 5 se presentan algunos resultados obtenidos por medio de métodos numéricos, más específicamente método de elementos finitos, para ambos problemas.

1 Conceptos generales.

En este capítulo comentaremos los conceptos generales que serán utilizados a través de la tesis. Estos son la ecuación del calor, teoremas fundamentales relacionados con ella, existencia y unicidad de los problemas estudiados, la transformada de Laplace junto con sus propiedades fundamentales y una breve descripción del método de elementos finitos. La exposición será concisa pero más detalles pueden ser encontrados en las referencias [referencias].

1.1 La ecuación del calor y teoremas fundamentales.

La versión más simplificada del operador del calor unidimensional es:

$$\mathcal{L}(u) = u_t - u_{xx},$$

donde $u = u(x,t)$, x es la variable espacial y t la temporal.Entonces la ecuación a resolver en el caso homogéneo es:

$$\mathcal{L}(u) = 0,$$

ahora daremos algunas definiciones importantes.

Definición: El interior parabólico D_T consiste de los puntos interiores definidos como:

$$\{(x,t) : s_1(t) < x < s_2(t), 0 < t \leq T\},$$

donde $s_1(t)$ y $s_2(t)$ son funciones continuas.

Definición: La frontera parabólica B_T consiste de las curvas:

$$\{(s_i(t), t) : 0 \leq t \leq T\} \quad i = 1, 2$$

y el segmento:

$$\{(x, 0) : a \leq x \leq b\}.$$

Un problema de valores iniciales (PVI) es la determinación de una solución para $\mathcal{L}(u) = 0$ en D_T que satisface condiciones prescriptas en B_T. Una herramienta importante en el estudio de los (PVI) es el principio débil del máximo, que asegura que en ausencia de fuentes en un conductor, la temperatura en cualquier punto del conductor no puede exceder el máximo de la temperatura inicial y la temperatura de su frontera.

Teorema 1.1 *(Principio del máximo débil):*

Para una solución $u(x, t)$ de $\mathcal{L}(u) = 0$ en un D_T acotado, la cual es continua en $D_T \cup B_T$,

$$\max_{D_T \cup B_T} u = \max_{B_T} u.$$

Considerendo $-u$ en lugar de u se obtiene el siguiente resultado del teorema anterior.

Teorema 1.2 *(Principio del mínimo débil):*

Para una solución $u(x,t)$ de $\mathcal{L}(u) = 0$ en un D_T acotado, la cual es continua en $D_T \cup B_T$,

$$\min_{D_T \cup B_T} u = \min_{B_T} u.$$

Otra aplicación de los anteriores teoremas es el teorema de comparación.

Teorema 1.3

Si u y v son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ en un D_T, las cuales son continuas en $D_T \cup B_T$, y si $u \leq v$ en B_T, entonces $u \leq v$ en $D_T \cup B_T$.

Un corolario inmediato del teorema de comparación es la unicidad de la solución del (PVI).

Corolario 1.1

Si u y v son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ en un D_T, las cuales son continuas en $D_T \cup B_T$, y si $u = v$ en B_T, entonces $u = v$ en $D_T \cup B_T$.

Existen generalizaciones de estos teoremas que debilitan las hipótesis que no son enunciadas aquí pero se pueden encontrar en las siguientes referencias [referencias].

Otro importante resultado que será utilizado sistemáticamente es el conocido como Lema de Hopf.

Teorema 1.4 *(Lema de Hopf)*

Para $D_T = \{(x,t) : s_1(t) < x < s_2(t), 0 < t \leq T\}$, donde $s_2(t)$ es Lipschitz continua inferiormente y $s_1(t)$ es Lipschitz continua superiormente, sea $u(x,t)$ la solución de la ecuación del calor en D_T esto es continua en $D_T \cup B_T$ y no idénticamente constante en cada D_t, $0 < t \leq T$. Si u asume su valor máximo en $(s_2(t_0), t_0)$, $t_0 > 0$, entonces:

$$\liminf_{x \uparrow s_2(t_0)} \frac{u(x,t_0) - u(s_2(t_0), t_0)}{x - s_2(t_0)} > 0.$$

Si en este caso u_x existe en $(s_2(t_0), t_0)$, entonces:

$$u_x(s_2(t_0), t_0) > 0.$$

Si u asume su valor mínimo en $(s_2(t_0), t_0)$, $t_0 > 0$, entonces:

$$\limsup_{x \uparrow s_2(t_0)} \frac{u(x,t_0) - u(s_2(t_0), t_0)}{x - s_2(t_0)} < 0.$$

Si en este caso u_x existe en $(s_2(t_0), t_0)$, entonces:

$$u_x(s_2(t_0), t_0) < 0.$$

Si u asume su valor máximo en $(s_1(t_0), t_0)$, $t_0 > 0$, entonces:

$$\limsup_{x \downarrow s_1(t_0)} \frac{u(x, t_0) - u(s_1(t_0), t_0)}{x - s_1(t_0)} < 0.$$

Si en este caso u_x existe en $(s_1(t_0), t_0)$, entonces:

$$u_x(s_1(t_0), t_0) < 0.$$

Si u asume su valor mínimo en $(s_1(t_0), t_0)$, $t_0 > 0$, entonces:

$$\liminf_{x \downarrow s_1(t_0)} \frac{u(x, t_0) - u(s_1(t_0), t_0)}{x - s_1(t_0)} > 0.$$

Si en este caso u_x existe en $(s_1(t_0), t_0)$, entonces:

$$u_x(s_1(t_0), t_0) > 0.$$

1.2 Existencia y unicidad de los problemas estudiados.

El primer problema considerado, en el capítulo 2, es el que cuenta con una condición no lineal en uno de sus extremos y será llamado por ello

Problema NL, su formulación es la siguiente: **Problema NL**

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= u_t, \qquad \text{in} \quad D = \{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\}, \\
u(x,0) &= u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \\
u_x(0,t) &= q(t), \qquad t > 0, \\
u_x(1,t) &= f(u(1,t)), \qquad t > 0,
\end{aligned}
$$

A continuación enunciamos un teorema más general, que como caso particular, nos asegura la existencia y unicidad de la solución del Problema NL, si pedimos para los datos la suficiente regularidad, más aún tenemos una representación explícita de ella. Esta se realiza a través de la función $\theta(x,t)$ definida como sigue:

$$\theta(x,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t}\cos(k\pi x),$$

y de las soluciones de un sistema de ecuaciones integrales de Volterra

Teorema 1.5

Para una función h continua a trozos y para continuas F y G, la solución del siguiente problema:

$$u_{xx} = u_t, \qquad \text{in} \quad D = \{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\},$$

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= h(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \\
u_x(0,t) &= F(t, u(0,t)), \qquad t > 0, \\
u_x(1,t) &= G(t, u(1,t)), \qquad t > 0,
\end{aligned}
$$

tiene la forma

$$
u(x,t) = w(x,t) - 2\int_0^t \theta(x, t-\tau) F(\tau, \phi_1(\tau)) d\tau + 2\int_0^t \theta(x-1, t-\tau) G(\tau, \phi_2(\tau)) d\tau,
$$

donde

$$
w(x,t) = \int_0^1 \{\theta(x-\xi, t) + \theta(x+\xi, t)\} h(\xi) d\xi,
$$

si y sólo si ϕ_1 y ϕ_2 son funciones continuas a trozos que satisfacen:

$$
\begin{aligned}
\phi_1(t) &= w(0,t) - 2\int_0^t \theta(0, t-\tau) F(\tau, \phi_1(\tau)) d\tau + 2\int_0^t \theta(-1, t-\tau) G(\tau, \phi_2(\tau)) d\tau, \\
\phi_2(t) &= w(1,t) - 2\int_0^t \theta(1, t-\tau) F(\tau, \phi_1(\tau)) d\tau + 2\int_0^t \theta(0, t-\tau) G(\tau, \phi_2(\tau)) d\tau.
\end{aligned}
$$

Más aún, la unicidad de u está asegurada si asumimos que F y G son Lipschitz continuas.

Observación

En el caso del Problema NL, se consideran las siguientes funciones

$h(x) = u_0(x)$, $F(t, u(0,t)) = q$ y $G(t, u(1,t)) = f(u(1,t))$

El segundo problema tratado en esta tesis es el que cuenta con la condición de contacto perfecto, este difiere del Problema NL en la condición en el extremo $x = 1$ que en este caso es:

$$\gamma u_t(1,t) + u_x(1,t) = 0.$$

En el capítulo 3 se da una representación en serie de la solución del mismo, pero para obtenerla se hace uso de la solución del siguiente problema de conducción del calor:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, \quad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, \\ u(x,0) &= 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) &= q, \qquad 0 < t \leq T, \\ u(1,t) + \gamma u_x(1,t) &= 0, \qquad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Damos a continuación una breve demostración de la existencia de la solución de este último problema. Primero suponemos que la solución pude ser escrita en la siguiente serie:

$$u(x,t) = q(u_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,t)),$$

donde la función $u_0(x,t)$ es la solución de:

$$
\begin{aligned}
u_{0xx} &= u_{0t}, \quad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, \\
u_0(x,0) &= 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \\
u_0(0,t) &= 1, \qquad 0 < t \leq T, \\
u_0(1,t) + \gamma u_{0x}(1,t) &= 0, \qquad 0 < t \leq T.
\end{aligned}
$$

y las funciones $u_n(x,t)$ son soluciones de:

$$
\begin{aligned}
u_{nxx} &= u_{nt}, \quad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, \\
u_n(x,0) &= \sin(\beta_n x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \\
u_n(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \leq T, \\
u_n(1,t) + \gamma u_{nx}(1,t) &= 0, \qquad 0 < t \leq T.
\end{aligned}
$$

Los coeficientes A_n y β_n quedarán determinados después del análisis que sigue.

Estas funciones son dadas por las siguientes expresiones:

$$u_0(x,t) = \frac{-x - \gamma + 1}{-\gamma + 1},$$

$$u_n(x,t) = \exp(-\beta_n^2 t)\sin(\beta_n x),$$

donde los β_n deben satisfacer la siguiente ecuación:

$$\beta_n \cot(\beta_n) - \frac{1}{\gamma} = 0,$$

para que $u_n(x,t)$ cumpla con la condición:

$$u_n(1,t) + \gamma u_{nx}(1,t) = 0.$$

Asumimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,t)$ converge uniformemente para poder intercambiar la derivación con la suma, entonces la $u(x,t)$ que definimos antes cumple con todas las condiciones del problema de conducción del calor salvo $u(x,0)=0$, para ello necesitamos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,0) = \frac{-u_0(x)}{q}.$$

Primero notemos que $u_n(x,0) = \sin(\beta_n x)$, entonces la expresión anterior es similar a un desarrollo en serie de Fourier de la función en el lado derecho.

Utilizando la ortogonalidad de las funciones $\sin(\beta_n x)$ los coeficientes A_n pueden ser calculados como:

$$A_n = \frac{-\int_0^1 u_0(x)\sin(\beta_n x)dx}{q\int_0^1 \sin^2(\beta_n x)dx}.$$

Con este último cálculo se llega a que:

$$A_n = \frac{-2(\gamma^2\beta_n^2+1)}{q\beta_n(\gamma^2\beta_n^2-\gamma+1)}.$$

Con estos coeficientes obtemos una representacón en serie de la función $u(x,t)$ como queríamos.

1.3 Transformada de Laplace y sus propiedades.

Sea $u(x,t)$ una función la cual podemos pensar como la temperatura de un material unidimensional en el punto x y el tiempo t. La Transformada de Laplace de u en la variable t está definida como:

$$U(s,t) = L(u(x,t)) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt,$$

donde s es un número cuya parte real es lo suficientemente grande para que la integral sea convergente. Los enunciados abajo dan las propiedades mas elementales de esta transformada que serán utilizados en el capítulo 4 para hallar estimaciones del tiempo de cambio de fase del problema con la condición de contacto perfecto.

Propiedad I

1. $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
2. $L(\dfrac{\partial u}{\partial t}) = sL(u) - u_0$, donde $u_0 = \lim_{t\to 0^+}$u(x,t).
3. $L(\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}) = \dfrac{\partial^n L(u)}{\partial x^n}$.
4. $L(\int_0^t u(x,t')dt') = \dfrac{1}{s}L(u)$.

Propiedad II Teorema de Lerch o de unicidad

Si $L(f_1(t)) = L(f_2(t))$ para todo s, entonces $f_1(t) = f_2(t)$ para todo $t \geq 0$, si las funciones son continuas; si las funciones tienen solo discontinuidades ordinarias ellas pueden diferir sólo en estos puntos.

La siguiente propiedad, conocida como Lema de Watson, es la más usada a lo largo de la tesis y volveremos a enunciarla cuando sea necesario. La demostración puede ser encontrada en [Davies].

Propiedad III Lema de Watson

Supongamos que la Transformada de Laplace $F(s) = L(f(t))$ tiene una expansión asintótica:

$$F(s) \approx \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu s^{-\lambda_\nu} \qquad \text{cuando} \quad s \to +\infty, \quad \text{con} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$$

entonces tenemos lo siguiente

$$f(t) \approx \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu t^{\lambda_\nu - 1}}{(\lambda_\nu - 1)!} \qquad \text{cuando} \quad t \to 0.$$

1.4 El Método de Elementos Finitos.

Consideremos aquí el operador del calor $\mathcal{L}(u) = u_t - u_{xx}$, y una función $\phi = \phi(x)$ elegida en un espacio adecuado de funciones. Nuestra intención es hallar una versión discreta del problema $\mathcal{L}(u) = 0$ en el conjunto $[0,1] \times [0,T]$ junto con las condiciones de borde que tengamos.

Multiplicando por la función $\phi(x)$ la ecuación e integrando en el intervalo $[0,1]$ uno obtiene lo siguiente:

$$\int_0^1 u_t(x,t)\phi(x)dx - \int_0^1 u_{xx}\phi(x)dx = 0,$$

ahora aplicando integración por partes se consigue:

$$\int_0^1 u_{xx}\phi(x)dx = u_x(1,t)\phi(1) - u_x(0,t)\phi(0) - \int_0^1 u_x(x,t)\phi_x(x)dx,$$

obteniendo así la llamada formulación débil del problema:

$$\int_0^1 u_t(x,t)\phi(x)dx + \int_0^1 u_x\phi_x(x)dx = u_x(1,t)\phi(1) - u_x(0,t)\phi(0).$$

En principio uno necesita que las funciones $\phi(x)$ y $\phi_x(x)$ pertenezcan al espacio $L^2(0,1)$ para que las integrales tengan sentido (suponiendo suficiente regularidad en $u(x,t)$). Por lo tanto pediremos que $\phi(x)$ pertenezca al espacio $H^1(0,1)$, es decir al espacio de funciones que pertenecen al $L^2(0,1)$ y cuya derivada en el sentido de las distribuciones también está en el $L^2(0,1)$. Este espacio es de dimensión infinita, entonces el primer paso hacia la discretización es la elección de un subespacio de dimensión finita $V_h \subset H^1(0,1)$, más específicamente, subdividimos el íntervalo $[0,1]$ en subintervalos de longitud $1/h$, y definimos las funciones lineales a trozos que valen uno en cada nodo y cero en el resto y el espacio V_h será el subespacio generado por ellas. Esta elección puede hacerse de diferentes maneras, cambiando el grado de los polinomios por ejemplo, nosotros consideramos el caso más simple. Para que valga la formulación débil en un elemento de V_h basta con que valga en cada elemento de la base. Ahora se consideran las siguientes aproximaciones:

$$
\begin{aligned}
u(x,t_k) &\approx \sum U_i^k \phi_i(x) \\
u_t(x,t_k) &\approx \frac{1}{\Delta t}\sum (U_i^k - U_i^{k-1})\phi_i(x),
\end{aligned}
$$

donde se utiliza una discretización hacia atrás en el tiempo de paso Δt para la derivada temporal. Si ahora consideramos las condiciones de borde para el segundo término en la formulación débil, para el caso de los problemas a estudiar tenemos:

1. Para el flujo no lineal

   $u_x(1,t)\phi(1) - u_x(0,t)\phi(0) = f(u(1,t))\phi(1) - q\phi(0)$.

2. Para el contacto perfecto

   $u_x(1,t)\phi(1) - u_x(0,t)\phi(0) = -\gamma u_t(1,t)\phi(1) - q\phi(0)$.

De esta manera se consigue discretizar el problema continuo, dando como resultado un sistema lineal en el caso del contacto perfecto, pero no así en el del flujo no lineal. En el capítulo 5 se estudia la resolución de estos problemas y sus resultados.

2 Estudio del problema con condición de borde no lineal.

En este capítulo, consideramos un material unidimensional representado por el intervalo $0 < x < 1$, con una temperatura inicial $u_0(x) \geq 0$, un flujo de calor $q(t)$ en $x = 0$ y una condición no lineal en el extremo derecho. Esta condición pude ser vista como una ley de radiación general entre el material y el medio con el que se halla en contacto. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la temperatura de cambio de fase es 0^0C. El objetivo principal es hallar condiciones necesarias y suficientes sobre los datos para obtener estimaciones del tiempo de cambio de fase en el material. El problema estudiado se plantea matemáticamente de la siguiente manera:

Problema NL

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= u_t, \qquad \text{in} \quad D = \{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\},\\
u(x,0) &= u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq 1,\\
u_x(0,t) &= q(t), \qquad t > 0,\\
u_x(1,t) &= f(u(1,t)), \qquad t > 0,
\end{aligned}
$$

donde $u_0(x) \geq 0$ y $q(t) > 0$. Asumimos que los datos satisfacen las hipótesis necesarias para asegurar la existencia y unicidad de la solución del problema planteado [Cannon]. En este problema el material está inicialmente en estado líquido. Explicitaremos la relación entre el flujo q y la función $f(s)$, para obtener un cambio de fase en el material teniendo en cuenta que el flujo en $x = 1$ depende de la temperatura $u(1,t)$. En el caso de este problema tenemos la posibilidad de conocer la solución explícita, la cual está en términos de los datos y de la función $\theta(x,t)$ ya definida en el capítulo anterior. La solución del problema está dada por [Cannon]:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^1 \{\theta(x-\xi,t) + \theta(x+\xi,t)\}\, u_0(\xi) d\xi \\ &- 2\int_0^t \theta(x,t-\tau) q(\tau) d\tau + 2\int_0^t \theta(x-1,t-\tau) f(\phi(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

donde la función $\phi(\tau)$ es la solutión de la ecuación integral de Volterra dada por:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= w(1,t) - 2\int_0^t \theta(1,t-\tau) q(\tau) d\tau \\ &+ 2\int_0^t \theta(0,t-\tau) f(\phi(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

con

$$w(x,t) = \int_0^1 \{\theta(x-\xi,t) + \theta(x+\xi,t)\}\, u_0(\xi) d\xi,$$

y recordemos que $\theta(x,t)$ está definida como:

$$\theta(x,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t}\cos(k\pi x).$$

Primero notamos que de la convergencia uniforme de las series tanto para θ como para sus derivadas parciales, resulta claro que para $t > 0$ tenemos que $\theta(x,t) > 0$, y también que ella y sus derivadas resultan continuas [Cannon]. Si los datos verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} F \geq f(s) \geq f_0 > 0, &\qquad s > 0, \\ u_0(x) \geq 0, u_0^{'}(x) > 0, &\qquad 0 \leq x \leq 1, \\ q(t) > 0, &\qquad t > 0, \end{aligned}$$

usando el principio del máximo obtenemos que $u_x(x,t) > 0$ lo cual implica directamente $u(0,t) \leq u(x,t)$ en $0 < x < 1$ [Friedman].

A continuación analizaremos las siguientes dos posibilidades:

1. El Problema NL está definido para todo $t \leq t^*$ donde $t^* < \infty$.

2. Existe un tiempo $t_{ch} < \infty$ tal que $u(0,t_{ch}) < 0$, lo cual significa que otra fase aparece (la fase sólida) para $t \geq t_{ch}$.

Estas posibilidades dependen de los datos u_0, q, f del problema. Tratamos de clarificar esta dependencia encontrando condiciones necesarias y suficientes sobre u_0, q y f para obtener estimaciones de los tiempos t^* y t_{ch}.

2.1 Estimación para el tiempo t^*.

Primero vamos a considerar el flujo $q(t)$ constante, es decir $q(t) = q$, luego generalizaremos los resultados a un flujo que dependa del tiempo que cumpla $q(t) < M$ para todo t, es decir acotado. La condición $u(0,t) > 0$ para todo $t \leq t^*$ es equivalente a:

Desigualdad 1

$$q < \min_{[0,t^*]} \Phi(t).$$

donde

$$\Phi(t) = \frac{\int_0^1 \theta(\xi,t)u_0(\xi)d\xi + \int_0^t \theta(-1,t-\tau)f(\phi(\tau))d\tau}{\int_0^t \theta(0,t-\tau)d\tau},$$

usando que $\theta(x,t)$ es positiva y par en x. Resulta claro que $\Phi(t) > 0$ ya que $\theta(x,t) > 0$, $f(s) > 0$ y $u_0(x) \geq 0$. Más aún el mínimo de Φ existe y es positivo, pues exhibiremos una cota inferior, que llamaremos $\Psi(t)$, de la función $\Phi(t)$ que tendrá un mínimo positivo. Como q es constante si tomamos el valor mínimo de Φ podremos asegurar que $u(0,t) > 0$ para todo $t \leq t^*$. Está claro que la expresión de $\Phi(t)$ no es fácil de tratar, y por lo tanto dar una fórmula explícita de su mínimo también lo es. Con el objetivo de simplificar buscamos una $\Psi(t)$ que cumpla $\Psi(t) \leq \Phi(t)$, entonces una condición suficiente para asegurar la subsistencia del problema de conducción del calor para $t \leq t^*$ es:

$$q < \min_{[0,t^*]} \Psi(t).$$

Las siguientes desigualdades para la función $\theta(x,t)$ serán necesarias para hallar la función $\Psi(t)$.

Lema 2.1

La función $\theta(x,t)$ satisface las siguientes desigualdades:

a)

$$\int_0^t \theta(0, t-\tau) d\tau \leq \int_0^t 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(t-\tau)}} d\tau = t + 2\sqrt{\pi t}, \qquad \text{para todo} \quad t > 0.$$

b)

$$\int_0^1 \theta(\xi, t) u_0(\xi) d\xi \geq u_0(0), \qquad \text{para todo} \quad t > 0.$$

c) Para $t \leq K$:

$$\int_0^t \theta(-1,t-\tau)f(\phi(\tau))d\tau \;>\; \frac{1}{2}\alpha K^2 f_0,$$

y para $t \geq K$:

$$\begin{aligned}\int_0^t \theta(-1,t-\tau)f(\phi(\tau))d\tau &> \int_0^K \alpha t f_0 d\tau + \int_K^t (1-\varepsilon) f_0 d\tau \\ &= \frac{1}{2}\alpha K^2 f_0 + (1-\varepsilon) f_0 (t-K),\end{aligned}$$

para una adecuada elección de los parámetros K, ε and $\alpha(K)$.

Dem.

a) Para probar esta desigualdad notemos que vale:

$$\theta(0,t-\tau) \leq \int_0^\infty e^{-k^2\pi^2 t} dk.$$

Esto se obtiene considerando la función $\theta(0,t-\tau)$ como una suma inferior de Riemann.

b) En este caso la desigualdad sigue de:

$$\int_0^1 \theta(\xi,t)d\xi = 1,$$

y que la función $u_0(x)$ es no decreciente.

c) Para esta última desigualdad primero realizamos el cambio de variables:

$$z = t - \tau, \qquad dz = -d\tau,$$

ahora, obtenemos la siguiente relación:

$$\int_0^t \theta(-1, t-\tau) f(\phi(\tau)) d\tau = \int_0^t \theta(-1, z) f(\phi(t-z)) dz.$$

Entonces, podemos acotar la función θ de la siguiente manera:

$$\theta(-1,t) \geq g(t) = \begin{cases} \alpha t & t \leq K \\ 1-\varepsilon & t \geq K, \end{cases}$$

para una adecuada elección de los parámetros K, ε y $\alpha(K)$. Por ejemplo, podemos elegir $\varepsilon(K) = 1 - \theta(-1, K)$ y $\alpha(K) = \dfrac{1-\varepsilon}{K}$ para un dado K. Esta elección is motivada por la forma geométrica de la función $\theta(-1, t-\tau)$ (i.e. creciente, cóncava, $\theta(-1, 0^+) = 0$ y $\theta(-1, +\infty) = 1$), entonces por construcción se obtiene para $t \leq K$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \theta(-1, t-\tau) f(\phi(\tau)) d\tau &> \int_0^K \alpha t f_0 d\tau \\ &= \frac{1}{2}\alpha K^2 f_0, \end{aligned}$$

y para $t \geq K$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \theta(-1, t-\tau) f(\phi(\tau)) d\tau &> \int_0^K \alpha t f_0 d\tau + \int_K^t (1-\varepsilon) f_0 d\tau \\
&= \frac{1}{2}\alpha K^2 f_0 + (1-\varepsilon) f_0 (t-K).
\end{aligned}$$

La cota deseada para $\Phi(t)$ es obtenida aplicando este último lema.

$$\Omega(K,t) = \begin{cases} \dfrac{u_0(0) + \frac{1}{2}\alpha K^2 f_0}{t + 2\sqrt{\pi t}} & t \leq K \\ \dfrac{u_0(0) + \frac{1}{2}\alpha K^2 f_0 + (1-\varepsilon) f_0 (t-K)}{t + 2\sqrt{\pi t}} & t \geq K. \end{cases}$$

Remarcamos que $\varepsilon = \varepsilon(K)$, $\alpha = \alpha(K)$ y definimos para un dado t^* la función $\Psi(t) = \Omega\ (t^*, t)$ (i.e. reemplazamos K by t^*). Entonces se obtiene el siguiente lema:

Lema 2.2

Para $t \leq t^*$ se cumple que:

$$\Psi(t) \leq \Phi(t),$$

donde

$$\Psi(t) = \Omega(t^*, t).$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema que da una condición de subsistencia del modelo de conducción del calor.

Teorema 2.1

Para un dado t^*, la subsistencia del modelo de conducción del calor está asegurada para $t \leq t^*$ si:

$$q < \Psi(t^*).$$

Dem.

Usando el hecho de que $\Psi(t)$ es decreciente (para $t \leq t^*$) y $\Psi(t) \leq \Phi(t)$, se obtiene lo siguiente:

$$q < \Psi(t^*) \leq \Psi(t) \leq \Phi(t),$$

para $t \leq t^*$ y usando la **Desigualdad 1** conseguimos que $u(0,t) > 0$ para $t \leq t^*$.

Para un dado t^*, notemos que el máximo K para la constucción de $\Psi(t)$ es t^* pues $\lim_{t\to\infty} \Omega(K,t) = (1-\varepsilon)f_0 > 0$ y para K fijo la función $\Omega(K,t)$ es creciente para $t \geq K$.

Del teorema 1, podemos obtener una expresión explícita para el tiempo t^*, para esto usamos el hecho que

$$\alpha K = 1 - \varepsilon,$$

obtenido por la definición de la función $g(t)$ y la siguiente ecuación:

$$q = \Psi(t^*) = \frac{u_0(0) + \frac{1}{2}(1-\varepsilon)t^* f_0}{t^* + 2\sqrt{\pi t^*}}.$$

Pensando esta última como una ecuación cuadrática y buscando sus raíces

llegamos al siguiente corolario.

Corolario 2.1

El tiempo t^* del Teorema 1 es dado por:

$$t^* = \left(\frac{-q\sqrt{\pi} + \sqrt{q^2\pi - (\frac{1}{2}(1-\varepsilon)f_0 - q)u_0(0)}}{q - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)f_0} \right)^2.$$

Donde elegimos la raíz positiva y necesitamos que:

$$q > \frac{1}{2}(1-\varepsilon)f_0.$$

Nota

Remarcamos que el tiempo t^* depende de la elección de la función $g(t)$, esto es t^* depende de K, $\varepsilon(K)$ y $\alpha(K)$.

Nota

Por el teorema 1 para cualquier $q > 0$, existe un tiempo $t_q > 0$ para el cual no hay un proceso de cambio de fase para $t \leq t_q$. Por esta razón una condición necesaria para tener un cambio de fase instantáneo para el problema es $q(0^+) = +\infty$. Si consideramos el problema para el dominio $[0, x_0]$ donde $x_0 = \infty$, entonces podemos reemplazar la última condición en el Problema NL por:

$$u(\infty, t) = u_0(\infty), \qquad t > 0.$$

En [2] los autores muestran que la condición $q(0^+) = \infty$ no es suficiente para el caso de un dominio semi-infinito. En el ejemplo ellos toman:

1. $x_0 = +\infty$,
2. $u_0(x) \geq \beta_0 > 0, \qquad x > 0,$
3. $q(t) \leq q_0(t) = \dfrac{\beta_0}{\sqrt{\pi t}}$.

La solución $u(x, t)$ de este problema satisface la siguiente desigualdad:

$$u(x, t) \geq \beta erf(\frac{x}{2\sqrt{t}}) \geq 0,$$

para $x \geq 0$ y $t > 0$.

Más aún en el caso particular $q(t) = \dfrac{\beta_0}{\sqrt{\pi t}}$, entonces $q(0^+) = +\infty$ y esto no es suficiente para un cambio de fase instantáneo.

2.2 El caso donde el flujo q es una función acotada.

Podemos encontrar cotas para el caso de una función acotada $q = q(t)$, donde consideramos

$$\min_{[0,+\infty)} q(t)$$

en la **Desigualdad 1**.

Teorema 2.2

Para un dado tiempo t^*, tenemos subsistencia del problema de conducción del calor para $t \leq t^*$ si:

$$Q \leq \Psi(t^*),$$

donde

$$Q = \min_{[0,+\infty)} q(t).$$

Dem.

En este caso la condicíon $u(0,t) > 0$ para $t \leq t^*$ es equivalente a:

$$\int_0^t \theta(0,t-\tau)q(\tau)d\tau < \int_0^1 \theta(\xi,t)u_0(\xi)d\xi + \int_0^t \theta(-1,t-\tau)f(\phi(\tau))d\tau,$$

como $\theta(0,t) > 0$, y $q(t)$ es acotada podemos usar el hecho de que:

$$Q\int_0^t \theta(0,t-\tau)d\tau < \int_0^t \theta(0,t-\tau)q(\tau)d\tau,$$

donde

$$Q = \min_{[0,+\infty]} q(t) \leq \min_{[0,t^*]} q(t),$$

con el fin de obtener la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} Q &\leq \min_{[0,t^*]} \frac{\int_0^1 \theta(\xi,t)u_0(\xi)d\xi + \int_0^t \theta(-1,t-\tau)f(\phi(\tau))d\tau}{\int_0^t \theta(0,t-\tau)d\tau} \\ &= \min_{[0,t^*]} \Phi(t). \end{aligned}$$

Entonces una condición suficiente para tener $u(0,t) > 0$ para $t \leq t^*$ es dada por:

$$\min_{[0,t^*]} \Phi(t) \geq \min_{[0,t^*]} \Psi(t) = \Psi(t^*) \geq Q.$$

2.3 Existencia de un proceso de cambio de fase.

Ahora encontraremos una estimación para el tiempo t_{ch} con el objetivo de tener un cambio de fase en el material. La condición para $u(0,t) < 0$ en $t = t_{ch}$ es equivalente a:

Desigualdad 2

$$q > \Phi(t_{ch}),$$

donde

$$\Phi(t_{ch}) = \frac{\int_0^1 \theta(\xi, t_{ch}) u_0(\xi) d\xi + \int_0^{t_{ch}} \theta(-1, t_{ch} - \tau) f(\phi(\tau)) d\tau}{\int_0^{t_{ch}} \theta(0, t_{ch} - \tau) d\tau}.$$

Remarcamos aquí que este caso es diferente del anteriormente tratado donde se pide $u(0,t) > 0$ para $t \leq t^*$. Necesitamos ahora una función $\delta(t)$ que acote superiormente a $\Phi(t)$ de modo tal que $\delta(t) \geq \Phi(t)$ (donde Φ fue definida antes). Suponiendo ahora que $q > \delta(t_{ch})$; esto implica la desigualdad (**??**).

Las siguientes desigualdades para la función θ son necesarias.

Lema 2.3

La función θ satisface las siguientes desigualdades:

a)

$$\int_0^t \theta(0, t-\tau)d\tau \geq \frac{2(\pi-2)}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + t \qquad \text{para todo} \quad t > 0.$$

b)

$$\int_0^1 \theta(\xi, t)u_0(\xi)d\xi \leq u_0(1) \qquad \text{para todo} \quad t > 0.$$

c)

$$\int_0^t \theta(-1, t-\tau)f(\phi(\tau))d\tau \leq Ft.$$

Dem.

a) La dedesigualdad sigue de la siguiente:

$$\theta(0, t-\tau) \geq \int_1^\infty e^{-k^2\pi^2 t}dk.$$

Esta es obtenida pensando la función θ como una suma superior de Riemann.

b) En este caso la desigualdad sigue de:

$$\int_0^1 \theta(\xi, t)d\xi = 1,$$

y que $u_0(x)$ alcanza su máximo en $x = 1$

c) Para esta última desigualdad usamos:

$$\theta(-1, t-\tau) \geq 0,$$

y la hipótesis para la función f.

La función δ es obtenida usando el último lema:

$$\delta(t) = \frac{u_0(1) + Ft}{C\sqrt{t} + t},$$

dode la constante C es :

$$C = \frac{2(\pi - 2)}{\sqrt{\pi}}.$$

La función $\delta(t)$ es decreciente en $[0, t_{min}]$, donde:

$$t_{min} = \left(\frac{u_0(1) + \sqrt{u_0(1)(u_0(1) + C^2 F)}}{CF} \right)^2 .$$

De estas consideraciones obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.3

Si se cumple que:

$$q > \delta(t_{ch}),$$

con $t_{ch} \leq t_{min}$, entonces otra fase aparece en el problema para algún $t \leq t_{ch}$.

Nota

En el caso en que otra fase aparece el modelo de conducción del calor no es más válido. Un modelo de frontera libre con condiciones apropiadas es necesario para algún $t \leq t^*$.

Nota

Podemos tomar $t^* = t_{ch} \leq t_{min}$ en el Teorema 1. Del hecho que:

$$\delta(t_{ch}) \geq \Psi(t_{ch}),$$

Concluimos lo siguiente:

1. Si

   $$q \leq \Psi(t_{ch}),$$

   entonces $u(0,t) \geq 0$ para todo $t \leq t_{ch}$.

2. Si

   $$q \geq \delta(t_{ch}),$$

   entonces el material cambia de fase antes del tiempo t_{ch}.

3. Es un problema abierto el caso donde:

   $$\delta(t_{ch}) < q < \Psi(t_{ch}).$$

3 Estimaciones del tiempo de cambio de fase para un material en contacto térmico perfecto.

En este capítulo plantearemos el problema con la condición de contacto perfecto en el extremo $x = 1$, algunas propiedades cualitativas de la solución de este problema y una estimación del tiempo de cambio de fase a través de la solución exacta, la cual es dada en forma de serie.

Si dos cuerpos A y B los cuales están en contacto y si denotamos por S la superficie de contacto entre ellos, se dice que están en contacto térmico perfecto si sobre S valen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} K_1 \frac{\partial V}{\partial \eta} &= K_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \text{sobre} \quad S, \\ V &= v, \quad \text{sobre} \quad S, \end{aligned}$$

donde V, v son las temperaturas de A y B, y K_1, K_2 sus conductividades térmicas respectivas. Si asumimos que $K_1 \gg K_2$, podemos considerar que $V = V(t) = v|_S$ y por medio de un balance térmico, obtenemos una condición de borde para v:

$$K_2 \int\int_S \frac{\partial v}{\partial \eta} dS + Mc' \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

donde denotamos con M y c' la masa y el calor específico del cuerpo A. Consideraremos aquí un material unidimensional representado por el segmento $[0, \ell]$ con su extremo $y = \ell$ en contacto térmico perfecto con un conductor perfecto de masa M_f por unidad de área y de calor específico c_f. En este caso la condición (1) viene dada por:

$$kv_y(\ell, \tau) + M_f c_f v_\tau(\ell, \tau) = 0.$$

Consideramos ahora el siguiente problema de conducción de calor:

Problema P

$$\begin{aligned}
kv_{yy} &= \rho c v_\tau, \quad D = \{(y,t) : 0 \le y \le \ell, 0 < \tau \le \mathcal{T}\}, \\
v(y,0) &= V_0 > 0, \qquad 0 \le y \le \ell, \\
kv_y(0,\tau) &= q_0 > 0, \qquad 0 < \tau \le \mathcal{T}, \\
kv_y(\ell,\tau) + M_f c_f v_\tau(\ell,\tau) &= 0, \qquad 0 < \tau \le \mathcal{T},
\end{aligned}$$

donde k es la conductividad térmica, ρ la densidad, q_0 el flujo de calor y c el calor específico del material, todos ellos constantes positivas. Sin pérdida de generalidad suponemos que la temperatura de cambio de fase es 0^0C.

Ahora realizamos el siguiente cambio de variables:

$$x = \frac{y}{\ell}, \quad t = \frac{k\tau}{\rho c\ell^2}, \quad v(y,\tau) = cu(x,t).$$

El problema P es transformado en el siguiente problema P_γ:

Problema P_γ

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= u_t, \qquad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, && (2)\\
u(x,0) &= M > 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, && (3)\\
u_x(0,t) &= q > 0, \qquad 0 < t \leq T, && (4)\\
\gamma u_t(1,t) + u_x(1,t) &= 0, \qquad 0 < t \leq T, && (5)
\end{aligned}$$

donde:

$$M = cV_0, \quad q = \frac{c\ell q_0}{k}, \quad \gamma = \frac{M_f c_f}{\rho c}, \quad T = \frac{k\mathcal{T}}{\rho c\ell^2}$$

Enunciamos ahora un lema sobre el comportamiento cualitativo de la solución del problema P_γ que nos permitirá chequear sólo en $x = 0$ a la hora de estimar un posible cambio de fase ya que su mínimo se encuentra en este extremo. También probaremos que la solución decrece con el tiempo en todo punto del material.

Lema 3.1

La solución del problema P_γ cumple:

1. $u_x(x,t) \geq 0 \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 < t \leq T.$

2. $u_t(x,t) \leq 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 < t \leq T.$

Dem.

1. Sea $v = u_x$, la función $v(x,t)$ satisface el siguiente problema de conducción del calor:

$$\begin{aligned} v_{xx} &= v_t, \quad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, && (6)\\ v(x,0) &= 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, && (7)\\ v(0,t) &= q, \qquad 0 < t \leq T, && (8)\\ v(1,t) + \gamma v_x(1,t) &= 0, \qquad 0 < t \leq T. && (9) \end{aligned}$$

Usando el principio del máximo (referencia) para $0 \leq x \leq 1$ y $t > 0$ tenemos lo siguiente:

$$\min v(x,t) = \min\{q, 0, v(1,t)\},$$

suponemos ahora que $v(1,t) < 0$ (notamos que $q > 0$), entonces obtenemos:

$$\min v(x,t) = v(1,t),$$

usando ahora el lema de Hopf (referencia) deducimos que:

$$v_x(1,t) < 0,$$

lo cual contradice la condición(9) ($\gamma > 0$). De esto último tenemos que: $u_x(x,t) \geq 0$.

2. Ahora sea $v^\varepsilon(x,t) = u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)$, esta función $v^\varepsilon(x,t)$ satisface el siguiente problema de conducción del calor:

$$\begin{aligned} v^\varepsilon_{xx} &= v^\varepsilon_t, \quad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, && (10) \\ v^\varepsilon(x,0) &= u(x,\varepsilon) - M, \qquad 0 \leq x \leq 1, && (11) \\ v^\varepsilon_x(0,t) &= 0, \qquad ,0 < t \leq T && (12) \\ v^\varepsilon_x(1,t) + \gamma v^\varepsilon_t(1,t) &= 0, \qquad t > 0. && (13) \end{aligned}$$

Luego, mostraremos que $u(x,\varepsilon) - M \leq 0$ para todo $\varepsilon \geq 0$. Haciendo uso nuevamente del principio del máximo y del lema de Hopf para $0 \leq x \leq 1$ y $0 < t \leq T$, obtenemos que:

$$\max v^\varepsilon(x,t) = \max\{u(x,\varepsilon) - M, v^\varepsilon(1,t)\},$$

suponiendo que $\max v^\varepsilon(x,t) = v^\varepsilon(1,t_0) > 0$, vale lo siguiente:

$$v^\varepsilon_x(1,t_0) > 0.$$

De (13) ($\gamma > 0$) deducimos que $v_t^\varepsilon(1, t_0) < 0$, lo cual implica que $v^\varepsilon(1, t)$ es decreciente en $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ entonces una contradicción es obtenida. Por lo anterior obtenemos que $v^\varepsilon(x, t) \leq 0$, por lo tanto:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon} = u_t(x, t) \leq 0.$$

Ahora, probamos que $u(x, \varepsilon) - M \leq 0$ para todo $\varepsilon \geq 0$. Notemos que $u(x, t) - M$ cumple el mismo problema de conducción del calor P_γ con condición inicial igual a cero, como antes la desigualdad sigue del principio del máximo y del lema de Hopf.

3.1 Comportamiento asintótico de la solución del problema P_γ.

En forma intuitiva, esperamos que la solución de P_γ converja cuando $\gamma \to +\infty$ a la solución del siguiente problema:

Problem P_∞

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, \qquad D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, && (14) \\ u(x, 0) &= M > 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, && (15) \\ u_x(0, t) &= q > 0, \qquad 0 < t \leq T, && (16) \end{aligned}$$

$$u(1,t) = M, \qquad 0 < t \leq T. \tag{17}$$

Primero probaremos la monotonía de las soluciones con respecto al parámetro γ y que todas ellas están acotadas por la solución del problema P_∞.

Lema 3.2

1. $\gamma_1 \leq \gamma_2 \Rightarrow u_{\gamma_1} \leq u_{\gamma_2}$, donde u_{γ_i} es la solución del problema P_{γ_i} para $i = 1, 2$.

2. $u_\gamma \leq u_\infty$ para todo $\gamma > 0$, donde u_∞ es la solución del problema P_∞.

Dem.

1. Consideramos $z = u_{\gamma_2} - u_{\gamma_1}$ donde u_{γ_i} es la solución del problema P_{γ_i}, la función z satisface en $x = 1$:

$$\begin{aligned} z_x(1,t) &= u_{\gamma_{2x}}(1,t) - u_{\gamma_{1x}}(1,t) \\ &= -\gamma_2 u_{\gamma_{2t}}(1,t) + \gamma_1 u_{\gamma_{1t}}(1,t) \\ &= -\gamma_2 (u_{\gamma_{2t}}(1,t) - u_{\gamma_{1t}}(1,t)) + (\gamma_1 - \gamma_2) u_{\gamma_{1t}}(1,t) \\ &= -\gamma_2 z_t(1,t) + (\gamma_1 - \gamma_2) u_{\gamma_{1t}}(1,t). \end{aligned}$$

Usando el lema anterior, $z(x,t)$ satisface el siguiente problema:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_t, \quad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\} && (18) \\ z(x,0) &= 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, && (19) \\ z_x(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \leq T, && (20) \\ z_x(1,t) + \gamma z_t(1,t) &\geq 0, \qquad 0 < t \leq T. && (21) \end{aligned}$$

Haciendo uso del principio del máximo y del lema de Hopf para

$0 \leq x \leq 1$ y $0 < t \leq T$ tenemos:

$$\min z(x,t) = \min\{0, z(1,t)\},$$

suponiendo que $\min z(x,t) = z(1,t_0) < 0$, entonces:

$$z_x(1,t_0) < 0,$$

De (21) ($\gamma > 0$) deducimos que $z_t(1,t_0) > 0$, lo cual implica que $z(1,t)$ es creciente en $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ y esto contradice que $z(1,t_0)$ es un mínimo.De esto último obtenemos que $z(x,t) \geq 0$.

2. Sea $z = u_\infty - u_\gamma$, notemos primero la siguiente igualdad:

$$z_x(1,t) + \gamma z_t(1,t) \quad = \quad u_{\infty_x}(1,t) - u_{\gamma_x}(1,t) + \gamma(u_{\infty_t}(1,t) - u_{\gamma_t}(1,t)),$$

$$
\begin{aligned}
&= -(u_{\gamma_x}(1,t) + \gamma u_{\gamma_t}(1,t)) + u_{\infty_x}(1,t) + \gamma u_{\infty_t}(1,t) \\
&= u_{\infty_x}(1,t).
\end{aligned}
$$

La función $\theta(x,t) = u_{\infty_x}(x,t)$ satisface el siguiente problema de conducción del calor:

$$
\begin{aligned}
\theta_{xx} &= \theta_t, \qquad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, && (22)\\
\theta(x,0) &= 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, && (23)\\
\theta(0,t) &= q, \qquad 0 < t \leq T, && (24)\\
\theta_x(1,t) &= 0, \qquad 0 < t \leq T, && (25)
\end{aligned}
$$

Usando de nuevo el lema de Hopf y el pricipio del máximo obtenemos que:

$$0 \leq \theta(x,t) = u_\infty(x,t) \leq q.$$

De esta última desigualdad concluimos lo siguiente:

$$0 \leq z_x(1,t) + \gamma z_t(1,t) \leq q.$$

Procediendo como antes se deduce que:

$$z(x,t) \geq 0$$

.

Nota Del lema anterior, podemos asegurar la existencia de una función $u^*(x,t)$ que cumple: $\lim_{\gamma\to\infty} u_\gamma(x,t) = u^*(x,t) \quad$ para casi todo $\quad x \in [0,1]$, y

$$u^*(x,t) \leq u_\infty(x,t).$$

Sea $||u(x,t)||_\infty$ la norma dada por:

$$||u(x,t)||_\infty = \sup_{[0,1]\times[0,T]} |u(x,t)|,$$

i.e. la norma $L^\infty([0,1]\times[0,T])$. En el próximo lema, probamos que la convergencia es uniforme y que $u^*(x,t) = u_\infty(x,t)$ para casi todo $x \in [0,1]$.

Lema 3.3

$$||u_\infty(x,t) - u_\gamma(x,t)||_\infty \leq \frac{qT}{\gamma}, \tag{26}$$

Dem.

Tomamos $w = u_\infty - u_\gamma$, tenemos que la función $w(x,t)$ cumple:

$$\begin{aligned} w_{xx} &= w_t, \quad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, && (27)\\ w(x,0) &= 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, && (28)\\ w_x(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \leq T, && (29)\\ 0 \leq w_x(1,t) + \gamma w_t(1,t) &\leq q, \qquad 0 < t \leq T. && (30) \end{aligned}$$

Primero, notemos que:

$$||u_{\infty}(x,t) - u_{\gamma}(x,t)||_{\infty} = u_{\infty}(1,t) - u_{\gamma}(1,t) \tag{31}$$

Aplicando Transformada de Laplace a este último problema obtenemos:

$$\begin{aligned} W_{xx}(s,x) - sW(s,x) &= 0, & (32) \\ W_x(s,0) &= 0, & (33) \\ 0 < W_x(s,1) + s\gamma W(1,t) &< \frac{q}{s}. & (34) \end{aligned}$$

donde s es un parámetro positivo. La solución general de este último problema es la siguiente:

$$W(s,x) = C(s,q,\gamma)\cosh(\sqrt{s}x). \tag{35}$$

De (34) encontramos una cota para $C(s,q,\gamma)$ dada por:

$$\begin{aligned} C(s,q,\gamma) &\leq \frac{q}{s(\sqrt{s}\sinh(\sqrt{s}) + \gamma s\cosh(\sqrt{s}))} \\ &\leq \frac{q}{\gamma s^2\cosh(\sqrt{s})} \end{aligned}$$

Luego, obtenemos:

$$W(s,x) \leq \frac{q}{\gamma s^2} \tag{36}$$

Con el objetivo de obtener una cota para $w(1,t)$, aplicamos la Transformada de Laplace inversa en $x = 1$ a (36):

$$w(1,t) \leq \frac{qt}{\gamma}. \tag{37}$$

De (31) y (37) obtenemos que:

$$||u_\infty(x,t) - u_\gamma(x,t)||_\infty \leq \frac{qT}{\gamma}. \tag{38}$$

3.2 Solución exacta del problema P_γ.

En esta sección consideraremos la condición (87) como:

$$u_x(1,t) = \gamma u_t(1,t) \qquad 0 < t \leq T, \tag{39}$$

donde ahora γ es negativo. Con el fin de obtener la solución exacta para el problema P_γ, llamamos $v = u_x$, la función $v(x,t)$ satisface las ecuaciones (6),(7), (8) and (9)(notar que en esta última también se considera γ negativo). La solución de este problema es la siguiente (ver Car-Jag):

$$\frac{v(x,t)}{q} = \frac{-\gamma + 1 - x}{-\gamma + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(\beta_n x) e^{-\beta_n^2 t}, \tag{40}$$

donde

$$A_n = \frac{2(\gamma^2 \beta_n^2 + 1)}{\beta_n(\gamma^2 \beta_n^2 - \gamma + 1)}, \tag{41}$$

y los β_n son las diferentes raíces positivas de la siguiente ecuación:

$$\beta_n \cot \beta_n - \frac{1}{\gamma} = 0, \tag{42}$$

donde las raíces $\beta_n \in ((n-1)\pi, n\pi)$, para $n \geq 1$ independientemente de γ.

De (40) tenemos que:

$$v(1,t) = \frac{-q\gamma}{-\gamma + 1}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\beta_n^2 t}], \tag{43}$$

donde

$$B_n = \frac{\frac{2}{\gamma}(\frac{1}{\gamma} - 1) \sec \beta_n}{[(\frac{1}{\gamma} - 1)\frac{1}{\gamma} + \beta_n^2]}. \tag{44}$$

Obtenemos la siguiente expresión para la solución del problema P_γ usando (40),(43),(39):

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= M + \frac{1}{\gamma}\int_0^t v(1,\tau)d\tau - \int_x^1 v(\xi,t)d\xi, &(45)\\
&= M + I_1 + I_2 &(46)
\end{aligned}
$$

donde

$$I_1 = -\frac{q}{-\gamma+1}[t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\beta_n^2}(e^{-\beta_n^2 t} - 1)], \tag{47}$$

$$I_2 = q\left[\frac{\gamma - \gamma x - \dfrac{(1-x)^2}{2}}{-\gamma+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\beta_n}e^{-\beta_n^2 t}(-\cos\beta_n + \cos\beta_n x)\right]. \tag{48}$$

Como la solución tiene un mínimo en $x = 0$, sólo necesitamos aproximar $u(0,t)$ para obtener una estimación del tiempo de cambio de fase en el material. Esta función está dada por:

$$u(0,t) = M - \frac{qt}{-\gamma+1} + \frac{q(\gamma - \frac{1}{2})}{-\gamma+1} + \frac{q}{-\gamma+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\beta_n^2}(e^{-\beta_n^2 t} - 1) + q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\beta_n}e^{-\beta_n^2 t}(1 - \cos\beta_n). \tag{49}$$

Notemos que $\beta_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$, más aún $A_n = \mathcal{O}(1/\beta_n)$ y $B_n = \mathcal{O}(1/\beta_n)$. Como estamos interesados en obtener estimaciones del tiempo donde $u(0,t) = 0$, consideramos la siguiente aproximación:

$$U_{J,P}(t) = M - \frac{qt}{-\gamma+1} + \frac{q(\gamma-\frac{1}{2})}{-\gamma+1} + \frac{q}{-\gamma+1}\sum_{n=1}^{J}\frac{B_n}{\beta_n^2}(e^{-\beta_n^2 t}-1) + q\sum_{n=1}^{P}\frac{A_n}{\beta_n}e^{-\beta_n^2 t}(-\cos\beta_n+1). \tag{50}$$

Podemos expresar $u(0,t)$ como:

$$u(0,t) = U_{J,P}(t) + E_{J,P}(t). \tag{51}$$

Con el objetivo de acotar el error $E_{J,P}(t)$ notamos que los coeficientes A_n, B_n pueden ser acotados de la siguiente manera:

$$\left|\frac{A_n}{\beta_n}\right| = \left|\frac{2(\gamma^2\beta_n^2+1)}{\beta_n^2(\gamma^2\beta_n^2-\gamma+1)}\right| \tag{52}$$

$$\leq \left|\frac{2(\gamma^2\beta_n^2+1)}{\beta_n^2(\gamma^2\beta_n^2+1)}\right| = \frac{2}{\beta_n^2}. \tag{53}$$

De la ecuación (42) tenemos que:

$$\frac{|\sec\beta_n|}{|\beta_n|} = \frac{|\gamma|}{|\sin\beta_n|} \tag{54}$$

y como $|\sin\beta_n| \to 1$ cuando $n \to \infty$, entonces existe $i_0 \in N$ tal que $|\sin\beta_n| \leq \frac{1}{2}$ para todo $i \geq i_0$. De allí obtenemos que:

$$\frac{|\sec\beta_n|}{|\beta_n|} \leq \frac{|\gamma|}{d}, \tag{55}$$

donde

$$d = \max_{i \leq i_0} \{\frac{1}{2}, \sin \beta_i\} \leq 1.$$

Con esta desigualdad obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{B_n}{\beta_n}\right| &= \left|\frac{\frac{2}{\gamma}(\frac{1}{\gamma}-1)\sec\beta_n}{\beta_n[(\frac{1}{\gamma}-1)\frac{1}{\gamma}+\beta_n^2]}\right| && (56)\\
&\leq \left|\frac{\frac{2}{\gamma}(\frac{1}{\gamma}-1)|\gamma|}{d[(\frac{1}{\gamma}-1)\frac{1}{\gamma}+\beta_n^2]}\right| && (57)\\
&\leq \frac{2(1-\gamma)}{|\gamma| d\beta_n^2}. && (58)
\end{aligned}$$

Estas cotas para A_n y B_n nos ayudan para probar el siguiente lema:

Lema 3.4

$$|E_{J,P}(t)| \leq \frac{q}{\pi^3 d|\gamma|}\frac{1}{J^2} + \frac{4q}{\pi^2}\frac{1}{P}.$$

Dem. Primero, notemos que $(n-1)\pi \leq \beta_n \leq n\pi$. Entonces uasamos las siguientes desigualdades:

$$\sum_{J+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^3} \leq \frac{1}{\pi^3}\int_J^{\infty}\frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2\pi^3 J^2},$$

$$\sum_{P+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \leq \frac{1}{\pi^2}\int_P^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{\pi^2 P}$$

y

$$|e^{-\beta_n^2 t} - 1| \leq 1, \quad |e^{-\beta_n^2 t}| \leq 1, \qquad |-\cos\beta_n + 1| \leq 2.$$

Ahora, de la ecuación (51) tenemos que $|E_{J,P}(t)|$ satisface:

$$\begin{aligned} |E_{J,P}(t)| &\leq \frac{2q}{d|\gamma|} \sum_{J+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^3} + 4q \sum_{P+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \\ &\leq \frac{q}{\pi^3 d|\gamma|} \frac{1}{J^2} + \frac{4q}{\pi^2} \frac{1}{P} \end{aligned}$$

Ejemplos numéricos Ahora presentamos tablas con el tiempo t_{ex} tal que $U_{J,P}(t_{ex}) = 0$ y tomamos $J = 20$ y $P = 20$. Consideramos $M = 1$, $q = 10$ para la TABLA 1, $M = 1$, $q = 2$ para la TABLA 2 y $M = 10$, $q = 1$ para la TABLA 3, con diferentes valores de γ.

TABLA 1

γ	t_{ex}	$E_{J,P}$
-1	0.0012	0.2034
-5	0.0041	0.2028
-10	0.0055	0.2027
-50	0.0073	0.2026
-100	0.0076	0.2026

TABLA 2

γ	t_{ex}	$E_{J,P}$
-1	0.1260	0.0407
-5	0.1637	0.0406
-10	0.1771	0.0405
-50	0.1922	0.0405
-100	0.1944	0.0405

TABLA 3

γ	t_{ex}	$E_{J,P}$
-1	18.5	0.0203
-5	54.5	0.0203
-10	99.5	0.0203
-50	459.5	0.0203
-100	909.5	0.0203

Notemos que para los valores en la TABLA 1 $|t_{ex}| \ll E_{J,P}$, en la TABLA 2 $|E_{J,P}|$ es considerable, entonces la estimación no es válida (i.e. necesitamos más términos), mientras que para la TABLA 3 $|t_{ex}| \gg E_{J,P}$. En los siguientes capítulos mostraremos algunos métodos alternativos para los casos de las tablas 1 y 2.

4 Otras estimaciones para el problema del contacto perfecto.

En este capítulo daremos tres métodos alternativos para estimar el tiempo de cambio de fase en el problema de contacto perfecto. El primero es a través de la Transformada de Laplace del problema, donde encontraremos la solución exacta del problema transformado y luego invertiremos utilizando su desarrollo asintótico. El resultado tiene validez para pequeños valores del tiempo t. Esta primera aproximación no depende del parámetro γ, luego mejoraremos esta estimacióm para que el parámetro γ intervenga. El problema será considerado en la siguiente forma:

Problema P_γ

$$u_{xx} = u_t, \qquad D = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 < t \le T\}, \tag{59}$$

$$u(x,0) = M > 0, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{60}$$

$$u_x(0,t) = q > 0, \qquad 0 < t \le T, \tag{61}$$

$$u_x(1,t) = \gamma u_t(1,t), \qquad 0 < t \le T, \tag{62}$$

donde γ es una constante negativa.

4.1 Estimaciones a través de la Transformada de Laplace.

En esta sección aplicamos la Transformada de Laplace al problema considerado, obtenemos la solución exacta del problema transformado y utilizamos su comportamiento asintótico para aproximar la inversa y así conseguir una estimación del tiempo de cambio de fase para el problema original. La Transformada de Laplace está definida por:

$$U(s,t) = L(u(x,t)) = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-st}dt,$$

donde s es un parámetro positivo.

Entonces aplicando la Transformada de Laplace al problema y tomando en cuenta las siguientes propiedades:

$$L(u_x(x,t)) = \frac{dU(s,x)}{dx}, \quad L(u_{xx}(x,t)) = \frac{d^2U(s,x)}{dx^2}.$$

$$L(u_t(x,t)) = -M + sU(s,x), \quad L(q) = \frac{q}{s},$$

obtenemos el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
U_{xx}(s,x) - sU(s,x) &= -M, & (63)\\
U_x(s,0) &= \frac{q}{s}, & (64)\\
\gamma s U(s,1) - U_x(s,1) &= \gamma M. & (65)
\end{aligned}
$$

La solución de este último problema es dada por la siguiente fórmula:

$$
U(s,x) = A(s)\exp\left(-\sqrt{s}x\right) + B(s)\exp\left(\sqrt{s}x\right) + \frac{M}{s}, \tag{66}
$$

donde

$$
A(s) = \frac{-(\gamma s - \sqrt{s})\exp\left(\sqrt{s}\right)q}{2s(\gamma s^{\frac{3}{2}}\cosh\left(\sqrt{s}\right) - s\sinh\left(\sqrt{s}\right))}, \tag{67}
$$

$$
B(s) = \frac{(\gamma s + \sqrt{s})\exp\left(-\sqrt{s}\right)q}{2s(\gamma s^{\frac{3}{2}}\cosh\left(\sqrt{s}\right) - s\sinh\left(\sqrt{s}\right))}. \tag{68}
$$

Después de algunos sencillos cálculos algebraicos se obtiene la siguiente expresión para $U(s,x)$:

$$
U(s,x) = \left[\frac{-\gamma s\sinh\left(\sqrt{s}(1-x)\right) + \sqrt{s}\cosh\left(\sqrt{s}(1-x)\right)}{\gamma s^{\frac{5}{2}}\cosh\left(\sqrt{s}\right) - s^2\sinh\left(\sqrt{s}\right)}\right] q + \frac{M}{s}. \tag{69}
$$

Nota

Si consideramos $q = 0$**, en (69) entonces** $U(s,x) = \dfrac{M}{s}$**. En este caso** $u(x,t) = M$ **para** $0 \leq x \leq 1$ **y** $t > 0$**, lo cual puede ser observado directamente del problema original.**

Una importante propiedad de la Transformada de Laplace conocida como Lema de Watson es enunciada ahora y será de utilidad para la estimación del tiempo de cambio de fase.

Lema 4.1

Supongamos que la Transformada de Laplace $F(s) = L(f(t))$ **tiene una expansión asintótica:**

$$F(s) \approx \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu s^{-\lambda_\nu} \qquad \textbf{cuando} \quad s \to +\infty, \quad \textbf{con} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$$

entonces tenemos lo siguiente

$$f(t) \approx \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu t^{\lambda_\nu - 1}}{(\lambda_\nu - 1)!} \qquad \textbf{cuando} \quad t \to 0.$$

Una prueba de este resultado puede ser encontrada en [referencia].

Teorema 4.1

Una estimación del tiempo de cambio de fase para el problema origial es dada por la siguiente aproximación:

$$t_{ch} \approx \left(\frac{\sqrt{\pi}M}{2q}\right)^2.$$

Dem.

Por el principio del mínimo visto en el capítulo anterior sólo necesitamos considerar el comportamiento de (69) en $x = 0$.

$$U(s, 0) \approx \frac{M}{s} - \frac{q}{s^{\frac{3}{2}}}, \qquad s \to +\infty. \tag{70}$$

Por medio del Lema 1, obtenemos ahora el comportamiento asintótico de $u(0, t)$ para pequeños valores de t:

$$u(0, t) \approx M - \frac{2}{\sqrt{\pi}} q t^{\frac{1}{2}}, \qquad t \to 0. \tag{71}$$

Necesitamos entonces $u(0, t_{ch}) = 0$ para algún $t_{ch} > 0$ para obtener un cambio de fase en el material para $t \geq t_{ch}$, esto es:

$$t_{ch} \approx \left(\frac{\sqrt{\pi}M}{2q}\right)^2. \tag{72}$$

Nota La estimación dada por el Teorema 1 es válida para $t \approx 0$ lo cual es equivalente a $q \gg M$. Observemos también que la aproximación no depende de la constante γ. El tiempo de cambio de fase para $M = 1$, $q = 10$, dado por el Teorema 1 es $t_{ch} = 0.0079$ y para $M = 1$, $q = 2$, es $t_{ch} = 0.1963$ (ver las tablas en el capítulo anterior), estas estimaciones son para cualquier γ.

Nota

Si consideramos el caso donde el dominio es semi-infinito (i.e. $0 \leq x < +\infty$), la solución está dada por:

$$u(x,t) = M - 2q\sqrt{t} \quad ierfc(\frac{x}{2\sqrt{t}}) \tag{73}$$

donde

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp{(-t^2)} dt,$$

y

$$erfc(x) = 1 - erf(x), \qquad ierfc(x) = \frac{\exp{(-x^2)}}{\sqrt{\pi}} - xerfc(x).$$

El tiempo de cambio de fase (i.e. $u(0,t) = 0$) es dado por [referencia]:

$$t = (\frac{\sqrt{\pi}M}{2q})^2. \tag{74}$$

Si consideramos el problema transformado:

$$\begin{aligned} U_{xx}(s,x) - sU(s,x) &= -M, & (75) \\ U_x(s,0) &= \frac{q}{s}. & (76) \end{aligned}$$

Su solución exacta es dada por:

$$U(0,s) = -\frac{q}{s^{3/2}} + \frac{M}{s}.$$

Entonces obtenemos que:

$$u(0,t) = -\frac{2q}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + M,$$

y el tiempo de cambio de fase es igual a (74).

4.2 Estimaciones que involucran el parámetro γ.

Con el objetivo de obtener una expresión para el tiempo de cambio de fase in donde el parámetro γ aparezca, primero notemos que la solución del problema transformado mediante la Transformada de Laplace, realmente depende de γ esto es $U(s,0) = U(s,0,\gamma)$). A partir de ahora utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{\gamma} \\ c_1 &= s\sinh(\sqrt{s}) \\ c_2 &= \sqrt{s}\cosh(\sqrt{s}) \\ c_3 &= s^{5/2}\cosh(\sqrt{s}) \\ c_4 &= s^2\sinh(\sqrt{s}). \end{aligned}$$

De la expresión (69) y por medio de la notación anterior nosotros consideramos la siguiente expresión equiivalente para $U(s,0)$:

$$F(H) = \left[\frac{c_1 + Hc_2}{-c_3 + Hc_4}\right] q + \frac{M}{s}. \tag{77}$$

Cuando $\gamma \to -\infty$ (i.e. $H \to 0$) con el objeto de mejorar la

estimación tomamos la expansión en serie de Taylor de $F(H)$ **hasta el orden** n**, esto es:**

$$F(H) \approx F(0) + F'(0)H + F''(0)\frac{H^2}{2} + .. + F^{(n)}(0)\frac{H^n}{n!}. \tag{78}$$

El comportamiento asintótico de $F(0)$ **cuando** $s \to +\infty$ **es dado por:**

$$F(0) \approx \frac{M}{s} - \frac{q}{s^{\frac{3}{2}}}, \qquad s \to +\infty. \tag{79}$$

Después de algunas cuentas sencillas se obtiene que:

$$F^{(n)}(H) = \frac{(-1)^n n!(c_1c_4 + c_2c_3)c_4^{n-1}}{(-c_3 + Hc_4)^{n+1}}. \tag{80}$$

Para estas derivadas el comportamiento asintótico está dado por:

$$F^{(n)}(0) \approx -\frac{2n!}{s^{\frac{n+3}{2}}} \qquad \textbf{when} \quad s \to +\infty. \tag{81}$$

De estas últimas consideraciones podemos obtener el desarrollo asintótico de $U(s,0)$ **cuando** $s \to +\infty$**:**

$$U(s,0) \approx \frac{M}{s} - \frac{q}{s^{1/2}} - 2q\left(\frac{H}{s^2} + ... + \frac{H^n}{s^{\frac{n+3}{2}}}\right). \tag{82}$$

Nuevamente usamos el Lema 3 para obtener una expresión del comportamiento de $u(0,t)$, al cual denominaremos $u_n(t)$:

$$u(0,t) \approx M - \frac{2qt^{1/2}}{\sqrt{\pi}} - 2q\left(tH + ... + \frac{t^{\frac{n+1}{2}}H^n}{\Gamma(\frac{n+3}{2})}\right) = u_n(t) \qquad (83)$$

donde con la letra Γ denotamos la conocida función Γ.

Teorema 4.2

Una estimación del tiempo de cambio de fase para el problema P1, está dada por el tiempo t^n_{ch} tal que $u_n(t^n_{ch}) = 0$.

Ejemplos Númericos

En las siguientes tablas presentamos las estimaciones dadas por la Transformada de Laplace en comparación con el tiempo t_{ex} dado por la solución exacta. Utilizaremos los mismos valores para M y q dados en la TABLA 1 y en la TABLA 2, esto es: TABLE 4: $M = 1$, $q = 10$. TABLE 5: $M = 1$, $q = 2$.

TABLE 4

γ	t_{ex}	t_{ch}	t_{ch}^1	t_{ch}^5	t_{ch}^{10}
-1	**0.0012**	**0.0079**	**0.0061**	**0.0060**	**0.0060**
-5	**0.0041**	**0.0079**	**0.0074**	**0.0074**	**0.0074**
-10	**0.0055**	**0.0079**	**0.0076**	**0.0076**	**0.0076**
-50	**0.0073**	**0.0079**	**0.0078**	**0.0078**	**0.0078**
-100	**0.0076**	**0.0079**	**0.0078**	**0.0078**	**0.0078**

TABLE 5

γ	t_{ex}	t_{ch}	t_{ch}^1	t_{ch}^5	t_{ch}^{10}
-1	**0.1260**	**0.1963**	**0.0853**	**0.0757**	**0.0757**
-5	**0.1637**	**0.1963**	**0.1516**	**0.1496**	**0.1496**
-10	**0.1771**	**0.1963**	**0.1705**	**0.1698**	**0.1698**
-50	**0.1922**	**0.1963**	**0.1904**	**0.1904**	**0.1904**
-100	**0.1944**	**0.1963**	**0.1933**	**0.1933**	**0.1933**

5 Métodos de Elementos Finitos para los problemas estudiados.

En este capítulo daremos esquemas numéricos basados en la discretización por medio de elementos finitos en la variable espacial y diferencias hacia atrás en la variable espacial para los problemas estudiados en los capítulos anteriores (contacto perfecto y condición no lineal en $x = 1$). Por medio de ellos visualizaremos los resultados teóricos obtenidos para las soluciones y obtendremos nuevas estimaciones del tiempo de cambio de fase en el material. Comenzaremos con el problema con la condición de contacto perfecto en el extremo derecho $x = 1$.

5.1 Esquema numérico para el caso del contacto perfecto.

Primero daremos una breve descripción del esquema numérico propuesto para el siguiente problema:

$$u_{xx} = u_t, \qquad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, \quad (84)$$

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= M > 0, \qquad 0 \le x \le 1, && (85)\\
u_x(0,t) &= q > 0, \qquad 0 < t \le T, && (86)\\
\gamma u_t(1,t) + u_x(1,t) &= 0, \qquad 0 < t \le T, && (87)
\end{aligned}
$$

Primero, consideramos la formulación débil del problema anterior:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 u_t(x,t)\phi(x)dx + \int_0^1 u_x(x,t)\phi_x(x)dx &= u_x(1,t)\phi(1) - u_x(0,t)\phi(0)\\
&= -\gamma u_t(1,t)\phi(1) - q\phi(0),
\end{aligned}
$$

donde $\phi(x)$ es una función en $H^1(0,1)$.

Sea $x_i = \frac{i}{N}$ para $0 \le i \le N$ una partición del intervalo $[0,1]$ en subintervalos $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, de longitud $h = \frac{1}{N}$.

Sea V_h el conjunto de funciones continuas las cuales son lineales sobre cada I_i.

Como es usual, consideraremos como funciones bases de V_h las funciones ϕ_i, que cumplen $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Definimos una partición $\{0 = t_0 < t_1 < ... < t_M = T\}$ del intervalo $[0,T]$, con subintervalos iguales de longitud $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ y $k = 1, .., M$.

Consideraremos las siguientes aproximaciones para $u(x,t_k)$ y

$u_t(x, t_k)$**:**

$$\begin{aligned} u(x,t_k) &\approx \sum_{i=0}^{N} U_i^k \phi_i(x) \\ u_t(x,t_k) &\approx \frac{1}{\Delta t}\sum_{i=0}^{N}(U_i^k - U_i^{k-1})\phi_i(x). \end{aligned}$$

Usando como funciones de prueba las pertenecientes a la base de V_h y las aproximaciones anteriores en la formulación débil, obtenemos el siguiente sistema lineal para $U^k = (U_0^k, ..., U_N^k)$:

$$\begin{aligned} AU^k &= BU^{k-1} + C \quad \textbf{para} \quad k = 1, 2.. \\ U_i^0 &= u(x_i, 0). \end{aligned}$$

donde A y B son matrices tridiagonales simétricas y $C = (-q\Delta t, 0, .., 0)^t$.

Los coeficientes de estas matrices son dados por:

$$
A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{h}{3} + \dfrac{\Delta t}{h} \quad \textbf{si} \quad j = i = 1 \\[3em] \dfrac{2h}{3} + \dfrac{2\Delta t}{h} \quad \textbf{si} \quad j = i \quad \textbf{para} \quad i = 2, .., N \\[3em] \dfrac{h}{3} + \dfrac{\Delta t}{h} - \gamma \quad \textbf{si} \quad j = i = N+1 \\[3em] \dfrac{h}{6} - \dfrac{\Delta t}{h} \quad \textbf{si} \quad j = i+1 \quad \textbf{para} \quad i = 1, .., N. \end{cases} \tag{88}
$$

$$
B_{ij} = \begin{cases} \dfrac{h}{3} \quad \textbf{si} \quad j = i = 1 \\[3em] \dfrac{2h}{3} \quad \textbf{si} \quad j = i \quad \textbf{para} \quad i = 2, .., N \\[3em] \dfrac{h}{3} - \gamma \quad \textbf{si} \quad j = i = N+1 \\[3em] \dfrac{h}{6} \quad \textbf{si} \quad j = i+1 \quad \textbf{para} \quad i = 1, .., N. \end{cases} \tag{89}
$$

En el caso del problema:

$$
u_{xx} = u_t, \qquad D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, \tag{90}
$$

$$u(x,0) = M > 0, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{91}$$

$$u_x(0,t) = q > 0, \qquad 0 < t \le T, \tag{92}$$

$$u(1,t) = M, \qquad 0 < t \le T, \tag{93}$$

se obtiene un sistema lineal similar donde se reemplaza las últimas filas de A y B por $(0,...,0,1)$.

A continuación una serie de ejemplos numéricos verificarán los resultados teóricos obtenidos anteriormente.

Para todos los ejemplos elegimos $h = \Delta t = 10^{-3}$.

Ejemplo 1

En este primer ejemplo se muestra que la solución de P_γ es decreciente en el tiempo y creciente en la variable x (i.e. $u_t \le 0, \quad u_x \ge 0$). Elegimos $q = 10$, $M = 100$ y $\gamma = 25$ en el problema P_γ. En la figura 1 se puede ver la solución para diferentes tiempos t_j para $j = 1,2,3,4$.

Ejemplo 2

En este ejemplo, se toman los siguientes valores para los datos en el problema P_γ: $q = 10$, $M = 100$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 25$ y $\gamma_3 = 50$.

Las figuras 2 y 3 muestran la convergencia cuando $\gamma \to +\infty$ en $x = 0$ y $x = 1$.

Ejemplo 3 En este último ejemplo, observaremos numéricamente la desigualdad:

$$||u_\infty(x,t) - u_\gamma(x,t)||_\infty \leq \frac{qT}{\gamma},$$

considerando al parámetro $\gamma \to +\infty$.

Tomamos aquí $q = 10$, $M = 100$, $T = 10$ y $f(\gamma) = \dfrac{qT}{\gamma}$.

Solución u_γ para diferentes tiempos

Convergencia en $x = 0$

Convergencia en $x = 1$

Ejemplo 3

5.2 Esquema numérico para el caso de un flujo no lineal.

Utilizaremos aquí la misma notación que en la sección anterior. El esquema númerico que proponemos a continuación para el problema estudiado en el capítulo 2:

Problema

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, \qquad \textbf{in} \quad D = \{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\}, && (94)\\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad 0 \le x \le 1, && (95)\\ u_x(0,t) &= q(t), \qquad t > 0, && (96)\\ u_x(1,t) &= f(u(1,t)), \qquad t > 0, && (97) \end{aligned}$$

difiere del de la sección anterior sólo en el vector C, que en el caso del contacto perfecto era $C = (-q\Delta t, 0, .., 0)^t$, ahora en virtud del flujo no lineal en $x = 1$, el vector será:

$$C = (-q\Delta t, 0, .., 0, f(U_N^k)\Delta t)^t.$$

Con esta última consideración, en cada paso temporal debemos resolver el siguiente sistema no lineal:

$$AU^k = BU^{k-1} + C(U^k),$$

donde las matrices A y B son las mismas que en el método anterior. Este sistema pude ser visto como:

$$Ax = F(x),$$

donde llamamos $F(x)$ al lado derecho $BU^{k-1} + C(x)$ (notemos que en cada paso el vector BU^{k-1} es conocido). En el clásico método de Jacobi para resolver sistemas lineales se descompone a la matriz A como $A = L + D + U$, donde L triangular inferior estricta, D es diagonal y U es triangular superior estricta. Para un sistema donde $F(x) = b$, un vector constante, se resuelve:

$$Dx = -(L + U)x + b,$$

por medio de la siguiente iteración:

$$Dx_j = -(L + u)x_{j-1} + b,$$

con un vector inicial x_0 y un criterio de parada adecuado. Para el caso de $F(x)$ una función cualquiera podemos entonces proponer el siguiente método iterativo:

$$Dx_j = -(L + u)x_{j-1} + F(x_{j-1}).$$

El criterio de parada elegido es:

$$r = ||Ax - F(x)||_2 \leq \varepsilon.$$

Ejemplo 1 En este primer ejemplo consideramos el flujo no lineal como $f(s) = \exp(-s^2) + 1$**, con lo cual las constantes que cumplen** $f_0 \leq f(s) \leq F$ **son** $f_0 = 1$ **y** $F = 2$**. La condición inicial es** $u_0(x) = x + 1$ **y consideraremos la solución para diferentes valores del flujo** q**. En la siguiente tabla mostramos los valores para** t^* **y** t_{ch} **dados en el capítulo 2 junto con** t_{ef} **el tiempo calculado por medio de elementos finitos. Elegimos** $\Delta x = 10^{-3}$ **,** $\Delta t = 0.0005$ **y** $\varepsilon = 10^{-7}$**.**

q	t^*	t_{ch}	t_{ef}
10	7×10^{-4}	**0.02480**	**0.00980**
20	2×10^{-4}	**0.00600**	**0.00230**
30	9×10^{-5}	**0.00266**	**0.00100**
40	5×10^{-5}	**0.00149**	**0.00055**
50	3×10^{-5}	**0.00098**	**0.00035**

Ejemplo 2 En este ejemplo consideramos la misma función $f(s)$ que en el ejemplo anterior pero ahora variaremos la condición inicial en lugar del flujo q que será fijo. Tomaremos $u_0(x) = (c-1)x + 1$ para diferentes valores de la constante c y $q = 10$. En este caso el tiempo t^* es igual para todos los casos $t^* = 0.00078$, entonces en la tabla sólo tendremos t_{ch} y t_{ef}.

c	t_{ef}	t_{ch}
1	**0.0079**	**0.0068**
1.1	**0.0081**	**0.0081**
1.2	**0.0083**	**0.0096**
1.3	**0.0085**	**0.0111**
1.4	**0.0086**	**0.0128**
1.5	**0.0088**	**0.145**
1.6	**0.0090**	**0.0164**
2	**0.0098**	**0.0248**

Conclusiones

A lo largo de esta tesis se utilizaron diversos métodos para estimar el tiempo de cambio de fase de los dos modelos de conducción del calor estudiados, podemos concluir en que casos, de acuerdo a los datos del problema cual es el más adecuado. Para el problema PL se utilizo directamente su solución exacta, la cual fue acotada por funciones más sencillas y a través de ellas se obtuvo estimaciones explícitas del tiempo de cambio de fase. También se considero un esquema de elementos finitos para este problema, según los resultados obtenidos se puede concluir que en casi todos los casos númericamente se obtiene la siguiente desigualdad $t^* \leq t_{EF} \leq t_{ch}$, lo cual nos dice que las cotas calculadas analíticamente acotan el verdadero tiempo de cambio de fase. Estas cotas son más ajustadas en el caso en que la temperatura inicial $u_0(x)$ no es constante pero está acotada por dos cotas cercanas. Para el problema P_γ se utilizó la solución exacta en forma de serie para encontrar una estimación del tiempo de cambio de fase, la cual da buenos resultados para el caso $M > q$, ya que con pocos términos se consigue buena precisión. Mediante

la Transformada de Laplace del problema se obtienen buenas estimaciones para el caso $q < M$, lo que es equivalente a decir tiempos de cambio de fase pequeños. Por último el esquema de elementos finitos propuesto para este problema da buenos resultados para el caso en que $\frac{q}{M} \approx 1$.

References

[1] L. Berrone,*Subsistencia de modelos matematicos que involucran a la ecuacion del calor-difusion.* Tesis de Doctorado en Matematica,U.N.R.(1994).

[2] Berrone L. and Manucci P.,*Study of the boundary condition describing the contact with a well-stirred fluid*, Asymptotic Analysis 14, 323-337 (1997).

[3] Cannon J.R.,*The One-Dimensional Heat Equation*, Menlo-Park, California 1967.

[4] H.S. Carslaw,J.C. Jaeger,*Conduction of heat in solids.* Oxford University Press, 1959.

[5] B. Davies, *Integral Transform and their Applications*, Springer-Verlag New York, 1978.

[6] A. Fasano and M. Primicerio,*General free boundary problems for the heat equation.* I. J. Math. Anal. Appl. 57, 694-723 (1977).

[7] **A. Friedman,*Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice Hall, Englewood Cliffs (1964).**

[8] **B. Sherman,*General one-phase Stefan problems and free boundary problems for the heat equation with Cauchy data prescribed on the free boundary.* SIAM J. Appl. Math. 20, 555-570 (1971).**

[9] **A. D. Solomon, V. Alexiades, and D. G. Wilson,*The Stefan problem with a convective boundary condition.* Quart. Appl. Math 40, 203-217 (1982).**

[10] **A. D. Solomon, V. Alexiades, and D. G. Wilson,*Explicit solution to change problems.* Quart. Appl. Math 41, 237-243 (1983).**

[11] **D. A. Tarzia,*A inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem.* Quart. Appl. Math 39, 491-497 (1981-82).**

[12] **D. A. Tarzia,*The two phase Stefan problem and same related conduction problems.* Reuniones em Matematica**

Aplicada e Computacao Cientifica, Vol. 5, SBMAC-Soc. Brasileira Mat. Apl. Comput., Gramado (1987).

[13] D. A. Tarzia,*An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem.* Engineering Analysis 5, 177-181 (1988).

[14] Tarzia D.,*A bibliography on moving free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan and related problems*, MAT., Serie A, Number 2, (2000).

[15] D. Tarzia and C. Turner,*A note of the existence of a waiting time for a two-phase Stefan problem.* Quart. Appl. Math 1, 1-10 (1992).

[16] D. Tarzia and C. Turner,*Estimation of the occurrence of the phase-change process in spherical coordinates.* Int. Comm. Heat and Mass Transfer.26, 559-568 (1999).

[17] Ughi M., *Teoremi di esistenza per problemi al contorno di IV e V tipo per un equazione parabolica lineari*, Riv. Mat. Univ. Parma (4)5, 591-606 (1979).