ÁLGEBRA III - Práctico 1
2015

Ejercicio 1. Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (1,1,0) \quad \alpha_2 = (0,1,1) \quad \alpha_3 = (1,0,4).$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Hallar las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto de $\mathcal{B}$.

(c) Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ y viceversa.

Ejercicio 2. Hallar la base dual $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ de la base $\mathcal{B}$ del Ejercicio 1.

Ayuda: Recordar que $(x,y,z) = f_1(x,y,z)\alpha_1 + f_2(x,y,z)\alpha_2 + f_3(x,y,z)\alpha_3$.

Ejercicio 3. Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ en la base $\mathcal{B}$ del Ejercicio 1 para la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (0,x,y)$.

Ejercicio 4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que su matriz en la base ordenada $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,-1)\}$ es $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Hallar la matriz $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) Dar la matriz $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T en la base canónica.

(c) Hallar $T(3,7,-5)$.

Ejercicio 5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - 3x_2, 2x_2 - 3x_1).$$

(a) Considerar en $\mathbb{R}^2$ la base canónica y en $\mathbb{R}^3$ la misma base ordenada $\mathcal{B}$ que en el ejercicio anterior. Hallar la matriz de T en dichas bases.

(b) Es T sobreyectiva?

Ejercicio 6. (a) Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (0,0)$.

(b) Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ inyectiva

(c) Definir un isomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0) = (0,0,1)$.

Ejercicio 7. (a) Hallar un vector en $\mathbb{R}^3$ ortogonal a $(1,0,1)$ y a $(0,2,1)$, con el producto interno usual.

(b) Consideremos el espacio de polinomios de grado menor a 3 con el producto interno $(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x$. Hallar un vector ortogonal a $1 + x^2$.