ÁLGEBRA III - Práctico 2
2015

Ejercicio 1. (a) Encontrar los factores L y U de las siguientes matrices

$$(i)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}; \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (iii)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Utilizar la descomposición LU para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. (a) ¿Cuántas matrices de permutación 3×3 existen?

(b) Escribirlas a todas e identificar las matrices inversas.

Ejercicio 3. Encontrar la factorización PLU, donde P es una matriz de permutación, para las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o un contraejemplo.

(a) Dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ son ortogonales.

(b) Dos vectores ortogonales son linealmente independientes.

Ejercicio 5. Aplicar el método de Gram-Schmidt a las columnas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

para hallar una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior R tales que $A = QR$.

Ejercicio 6. Verificar que los siguientes sistemas de ecuaciones $Ax = b$ no tienen solución y resolverlos usando el método de mínimos cuadrados:

$$(i)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (ii)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Encontrar la mejor aproximación lineal $Ax + B$ para los siguientes pares de puntos en el plano:

(a) $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$.

(b) $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$, $(2, -5)$.

(c) $(-2, 4)$, $(-1, 2)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$.

Ejercicio 8. Encontrar la mejor aproximación cuadrática $Ax^2 + Bx + C$ para los pares de puntos en el plano de cada ítem del ejercicio anterior.

Ejercicio 9. Encontrar la descomposición en valores singulares y la pseudoinversa de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10. Utilizar la pseudoinversa para encontrar la solución de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 11. Encontrar una proyección E que proyecte $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por $(1, -1)$ según el subespacio generado por $(1, 2)$ (*i. e.* tal que $\ker E = \langle (1, 2) \rangle$).