ÁLGEBRA III - Práctico 4
2015

Ejercicio 1. Decidir cuáles de las siguientes matrices son definidas positivas y escribir las correspondientes formas cuadráticas $f_i = x^t A_i x$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. ¿Para qué valores de a y b las siguientes matrices son definidas positivas?

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & b & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Probar que si A es definida positiva entonces A^2, A^{-1} también lo son.

Ejercicio 4. Usar autovalores para reducir la ecuación $3u^2 - 2\sqrt{2}uv + 2v^2 = 1$ a una suma de cuadrados y dibujar la elipse resultante.

Ejercicio 5. Aplicar algún test a cada una de las siguientes matrices para decidir si son definidas positivas, semidefinidas positivas o indefinidas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Usar los pivotes de $A - \frac{1}{2}\mathrm{I}$ para decidir si A tiene un autovalor menor a $\frac{1}{2}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2,5 & 3 & 0 \\ 3 & 9,5 & 7 \\ 0 & 7 & 7,5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Encontrar los autovalores y autovectores de

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} x = \frac{\lambda}{18} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} x.$$

Ejercicio 8. Sea A una matriz simétrica.

(a) Calcular el cociente $R(x)$ para $x = (1, \dots, 1)$.

(b) ¿Cuál es la relación de la suma de todas las entradas a_{ij} con λ_1 y λ_n?

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Encontrar un y tal que $R(y)$ sea menor que la cota $\lambda_1 \leq 2$ que se obtiene de las entradas diagonales.

(b) ¿Cuál es el mínimo valor de $R(x)$?

Ejercicio 10. Si B es definida positiva, utilizar el cociente de Rayleigh para mostrar que el menos autovalor de $A + B$ es mayor que el el menor autovalor de A.

Ejercicio 11. Si λ_1 es el menor autovalor de A y μ_1 es el menor autovalor de B, mostrar que el menor autovalor θ_1 de $A + B$ es mayor o igual a $\lambda_1 + \mu_1$.

Ejercicio 12. Usar minimax para calcular *todos* los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 11 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13. (a) Resolver $-u'' = x$ con $u(0) = u(1) = 0$.

(b) Utilizar funciones techos con $h = \frac{1}{3}$ para resolver aproximadamente.

(c) ¿Dónde está el mayor error?

Ejercicio 14. Verificar que el operador $L(u) = -u'' + u$ es definido positivo y aplicar elementos finitos con $h = \frac{1}{3}$ para dar una aproximación de la solución de:

$$-u''(x) + u(x) = 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$