ÁLGEBRA III - Práctico 6
2015

Ejercicio 1. Hallar la transformada de Fourier de cada uno de los siguientes vectores y calcular la convolución de cada vector con su transformada.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Consideremos la *matriz circulante* $n \times n$

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

y sea $p_C(\mathtt{x})$ el polinomio $c_0 + c_1\mathtt{x} + \cdots + c_{n-1}\mathtt{x}^{n-1}$.

(a) Si Q es la matriz circulante $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mostrar que $C = p_C(Q)$.

(b) Mostrar que $\mathbf{F}_n$ diagonaliza Q, es decir que

$$\mathbf{F}_n Q \mathbf{F}_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi^{n-1} \end{pmatrix},$$

donde $\xi_1, \dots, \xi_n$ las raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$.

(c) Probar que $\mathbf{F}_n$ diagonaliza toda matriz circulante $n \times n$, y que

$$\mathbf{F}_n C \mathbf{F}_n^{-1} = \begin{pmatrix} p_C(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_C(\xi) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_C(\xi^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

(d) Mostrar que todo par de matrices circulantes C_1, C_2 conmutan.

Ejercicio 3. Sean $\xi_1, \dots, \xi_n$ las raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$. Dado un polinomio $p(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathbf{x}^k$, sean

$$\mathbf{a} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})^T, \qquad \mathbf{p} = (p(1), p(\xi), \dots, p(\xi^{n-1}))^T.$$

Mostrar que $\mathbf{F}_n \mathbf{a} = \mathbf{p}$ (y $\mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{p} = \mathbf{a}$).

Así, la transformada discreta de Fourier convierte la representación de un polinomio de grado $n-1$ en término de sus coeficientes en una representación del mismo polinomio en término de sus valores en las n raíces de la unidad.

Ejercicio 4. Usar convoluciones para calcular los siguientes productos:

$$(a)\, 43_{10} \times 21_{10} \qquad (b)\, 123_8 \times 601_8 \qquad (c)\, 1010_2 \times 1101_2.$$

(El subíndice indica la base en la cual está representado el número).

Ejercicio 5. Hallar el vector de Perron Frobenius a derecha $\mathbf{p}$ y el vector de Perron Frobenius a izquierda $\mathbf{q}$ para la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Probar que si $A > 0$ es $n \times n$ entonces

$$\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Ejercicio 7. Construir ejemplos de matrices con entradas no-negativas y al menos una entrada nula tales que $r = \rho(A) \in \sigma(A)$ para ver que

(a) r puede ser 0.

(b) La multiplicidad algebraica de r puede ser mayor a 1.

(c) r puede no tener un autovector positivo.

(d) El índice de r puede ser mayor a 1.

(e) r puede no ser el único autovalor en el círculo espectral.

Las matrices pueden ser distintas para cada ítem.

Ejercicio 8. Mostrar que la raíz de Perron está dada por la fórmula:

$$r = \min_{x \in \mathcal{P}} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}, \qquad \mathcal{P} = \{x : x > 0\}.$$

Aquí $(Ax)_i$ denota la i-ésima entrada del vector Ax.

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinar si A es reducible o irreducible.

(b) Determinar si A es primitiva o imprimitiva.

Ejercicio 10. Decidir cuáles de las siguientes matrices son primitivas o irreducibles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 11. Una matriz se dice *estocástica* si para cada fila, la suma de las entradas es igual a 1. Probar que si A es no negativa e irreducible, entonces A es similar a rP, para $r = \rho(A)$ y una matriz estocástica irreducible P.

Ayuda: Considerar $D = \operatorname{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$, donde $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ es el vector de Perron de A.

Ejercicio 12. Sea $A \geq 0$ una matriz irreducible y sean $a_{ij}(k)$ las entradas de A^k, $k \in \mathbb{N}$. Mostrar que A es primitiva si y solo si

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} a_{ij}(k)^{\frac{1}{k}}.$$