Algebra II y Algebra - 2011

En cada fecha de examen de Diciembre, Febrero, Marzo se tomará al menos uno de los teoremas y afirmaciones listados debajo. Pueden tomarse otros teoremas que no estén en la lista, pero se garantiza que habrá al menos uno de esta lista. Además, se garantiza que el puntaje asignado globalmente sera suficiente para aprobar la parte teórica.

El examen de los alumnos libres contendrá una primera sección, que deberá ser resuelta en forma completa y correcta como condición necesaria para aprobar el examen.

Teoremas (enunciado preciso y demostración)

I : Si $A \sim B$ entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene las mismas soluciones que el sistema $BX = 0$. (Recordar que la notación $\sim$ corresponde a 'equivalente por filas'.)

II : El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solo la solución trivial si y solo si $A \sim I$.

III : Si A es una matriz $m \times n$ con $m < n$ entonces el sistema $AX = 0$ admite solución no trivial.

IV : Si A es una matriz $n \times n$ entonces son equivalentes:
i) A es inversible
ii) $AX = 0$ tiene solo la solución trivial
iii) $AX = Y$ tiene una única solución para todo Y.

V : Si V es un espacio vectorial generado por n vectores entonces todo conjunto L.I de V es finito y no contiene mas de n elementos

VI : $dimV + dimW = dim(V + W) + dim(V \cap W)$.

VII : Si $T : V \mapsto W$ es una transformación lineal entonces $\dim V = \dim \mathrm{Nu}T + \dim \mathrm{Im}T$.

VIII : Sean V, W, Z espacios vectoriales de dimension finita, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ bases de V, W y Z respectivamente. Si $T : V \mapsto W$ y $S : W \mapsto Z$ son tranformaciones lineales entonces:
1) $[T\alpha]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}[\alpha]_{\mathcal{B}_1}$ para todo $\alpha \in V$.
2) $[S \circ T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} = [S]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$

IX : Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita, bases de V y W respectivamente. Si $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ son las bases duales de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ y $T : V \mapsto W$ es una tranformación lineal entonces $[T^t]_{\mathfrak{B}_2}^{\mathfrak{B}_1} = [S]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2\,t}$.

X : Si V y W son esp vectoriales de dimensión n y $T : V \to W$ entonces son equivalentes:
i) T es inversible
ii) T es no singular
iii) T es suryectiva
iv) $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ es una base de W para todo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V.

XI : Método de Gram-Schmidt de ortogonalización.

XII : Propiedades de la norma (desigualdad triangular y desigualdad de C-S.)

XIII : Sea V un espacio vectorial, $\dim V = n$ y sea $T : V \mapsto V$ una transformación lineal. Si T tiene n autovalores distintos $c_1, \ldots c_n$, entonces
1) T es diagonalizable.
2) El polinomio característico de T puede escribirse como $p(x) = (x - c_1)...(x - c_n)$.

Afirmaciones:

1. El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solo la solución trivial si y solo si el rango de A es igual al número de COLUMNAS de A .

2. Si A es $r \times n$, los sistemas no homogéneos $AX = b$ tienen solución para todo b $r \times 1$ si y solo si el rango de A es igual al numero de FILAS de A .

3. El sistema $AX = B$ posee solución sii rango fila de A es igual al rango fila de la matriz ampliada $AX = B$.

4. Demostrar que Rango-columna= dimensión de la imagen de la transformación definida por la matriz.

5. dimensión del espacio solución de un sistema homogéneo es igual al número de incógnitas libres.

6. todo subconjunto generador de un espacio vectorial contiene una base del espacio vectorial.

7. Todo conjunto L.I. es parte de una base.

8. Demostrar:

   1) Si e es una OEF de tipo II, entonces det $e(A)$ =det$A$.

   2) Si e es una OEF de tipo III, entonces det $e(A) = -$det$A$.

9. Demostrar que si A y B son matrices $n \times n$ sobre un cuerpo, entonces:

   1) A es inversible si y solo si det$A \neq 0$

   2) det(AB) =det(A)det(B).