

1. Demostrar los siguientes enunciados. Justificar todos los pasos, indicando las propiedades usadas.
 - (a) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
 - (b) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.
 - (c) $a(b - c) = ab - ac$.
 - (d) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
 - (e) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$.
 - (f) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$.

2. ¿Dónde está el error de la siguiente “demostración”?
Supongamos $x = y$. Entonces

$$\begin{aligned}x^2 &= xy, \\x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\(x + y)(x - y) &= y(x - y), \\x + y &= y, \\2y &= y, \\2 &= 1.\end{aligned}$$

3. Sean a, b, c números reales. Demostrar los siguientes enunciados:

- (a) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
- (b) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- (c) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
- (d) Si $a > 1$, entonces $a < a^2$. Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
- (e) $ab > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0)$.
- (f) Si $a^2 < b^2$ y $a > 0$, entonces $b > a$ o $b < -a$.

4. Encontrar todos los números reales x que satisfacen las siguientes desigualdades y graficar el resultado en la recta real.

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| (a) $4 - x < 3 - 3x$. | (b) $5 - x^2 < 8$. | (c) $x^2 > 9$. |
| (d) $(x - 1)(x - 3) > 0$. | (e) $x^2 - x + 10 > 16$. | (f) $x + 1 > x$. |
| (g) $x - 1 > x$. | (h) $-3/x > 1$. | (i) $(x - 1)/(x + 1) > 0$. |

5. El área de un rectángulo es 4 m^2 . Determinar las dimensiones del rectángulo, sabiendo que si a la longitud de la base la incrementamos en una unidad y a la altura la disminuimos en dos unidades, entonces el área del nuevo rectángulo sigue siendo 4 m^2 .

6. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

- (a) Si $a^2 = 1$, entonces $a = 1$ o $a = -1$.
- (b) Si $a^2 = b^2$, entonces $a^3 = b^3$.
- (c) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a - c < b - d$.
- (d) Si $a < b$ y c no es negativo, entonces $ac < bc$.
- (e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y < 0$.
- (f) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid xy > 0$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Probar que $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$. ¿Cuándo vale la igualdad?

Nota: El número \sqrt{ab} se denomina la *media geométrica* entre a y b , mientras que $(a + b)/2$ se denomina la *media aritmética o promedio* entre a y b .

8. Probar que si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
9. (a) Probar que si $a^3 = 1$, entonces $a = 1$.
(b) Usar el inciso anterior para deducir que si $a^3 = b^3$, entonces $a = b$.
10. Expresar lo siguiente prescindiendo de los signos de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.
(a) $||x| - 1|$.
(b) $a - |(a - |a|)|$.
11. Demostrar las siguientes afirmaciones:
(a) $|x| = |-x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
(c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.
12. Resolver las siguientes desigualdades, interpretarlas en términos de distancias, y graficar el conjunto de soluciones.
(a) $|x - 3| < 8$. (b) $|x - 3| \geq 8$. (c) $|x - 3| < 0$. (d) $|2x - 3| > 1$.
13. Resolver las siguientes ecuaciones.
(a) $|x - 3| = c$ ($c \in \mathbb{R}^{\geq 0}$). (b) $|x - 1||x + 2| = 3$. (c) $|x - 1| + |x + 2| = 3$.
14. Probar los siguientes ítems para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
(a) $|x - y| \leq |x| + |y|$. (b) $|x - y| \geq |x| - |y|$. (c) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.
15. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos de números reales tiene supremo, ínfimo, máximo o mínimo.
(a) $[3, 8)$. (b) $(-\infty, \pi)$. (c) $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
(d) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$. (e) $\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. (f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{3}{4} \leq x \leq 0\}$.
(g) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$. (h) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$. (i) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.
16. Probar que si A y B son subconjuntos de \mathbb{R} acotados superiormente, entonces $A \cup B$ es acotado superiormente.
17. Sean A y B subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} tales que $x \leq y$ para todo $x \in A$, $y \in B$. Demostrar que:
(a) $\sup A \leq y$ para todo $y \in B$.
(b) $\sup A \leq \inf B$.
18. Determinar si los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} son densos.
(a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (b) $\mathbb{R} \setminus (0, 10^{-5})$. (c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
19. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.
(a) Si $\sup A \leq \inf B$, entonces $A \cap B = \emptyset$.
(b) $\max\{x, -x\} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(c) Un conjunto formado por todos los números reales salvo un número finito de ellos es denso.