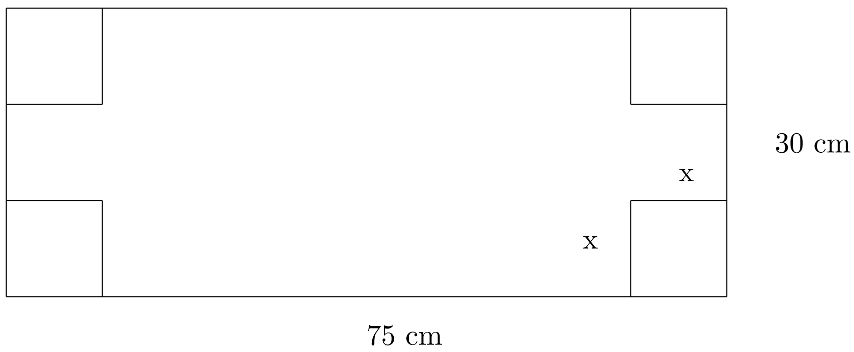
1. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

2. Dar el área de la superficie de un cubo como función de su volumen.

3. Se forma una caja sin tapa a partir de una pieza rectangular de cartón de 30 cm por 75 cm, cortando cuadrados iguales de lado x, en cada esquina, para doblar hacia arriba los rectángulos como se ve en la figura. Expresar el volumen, V, de la caja en función de x.



4. Una unión de taxistas cobra \$ 2 por el primer kilómetro (o fracción) y 20 centavos por cada décimo de kilómetro (o fracción) siguiente. Indicar el costo, C, de un viaje en taxi en función de la distancia x, recorrida en kilómetros, para $0 < x \leq 2$, y trazar la gráfica de esta función.

5. En la siguiente tabla aparece la población P de una ciudad, en miles de habitantes, de 1970 a 1980.

t	1970	1972	1974	1976	1978	1980
P	71	73	78	87	102	123

(a) Trazar la gráfica de P en función del tiempo.
(b) Con la gráfica estimar la población en 1979.

6. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. (b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$. (d) $f(x) = (\sqrt{x})^2$.

7. Encontrar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

8. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Determinar las siguientes expresiones, indicando para cuáles x tienen sentido:
(a) $f(f(x))$.
(b) $f(1/x)$.
(c) $f(cx)$.

9. Sean $C(x) = x^2$, $P(x) = \dfrac{1}{x}$ y $S(x) = \mathrm{sen}(x)$.

(i) Determinar:

(a) $(C \circ P)(y)$. (b) $(C \circ P \circ S)(t) + (S \circ P)(t)$.

(ii) Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de C, P, S.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x^2)}$. (b) $f(t) = \mathrm{sen}\left(\mathrm{sen}(t)\right)$. (c) $f(u) = \mathrm{sen}^2\left(\dfrac{1}{u}\right)$.

10. (a) Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definimos la función C_A como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Si A y B son dos subconjuntos arbitrarios de los números reales, encontrar expresiones para $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ y $C_{\mathbb{R}\setminus A}$, en términos de C_A y C_B.

(b) Probar que si f es una función tal que $f(x) = 0$ ó 1 para todo x, entonces existe un conjunto A tal que $f = C_A$.

(c) Demostrar que $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A.

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, donde f, g y h son funciones definidas en todo $\mathbb{R}$.

(a) Si f y g son pares, entonces $f + g$ es par.
(b) Si f es par y g es impar, entonces $f + g$ es impar.
(c) Si f y g son impares, entonces fg es par.
(d) Si f y g son impares, entonces $f \circ g$ es par.
(e) La función $|f|$ es par.
(f) La función $f(|x|)$ es par.
(g) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
(h) $\frac{1}{f\circ g} = \frac{1}{f} \circ g$.

12. (a) Sea $f(x) = x + 1$. ¿Existe una función g tal que $f \circ g = g \circ f$?
(b) Sea f una función constante. ¿Para qué funciones g se cumple $f \circ g = g \circ f$?
(c) Supongamos que g es una función tal que $f \circ g = g \circ f$ para toda función f. Demostrar que g es la función identidad.

13. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & 0 \le x < 1, \\ -x + 3 & 1 \le x < 4, \\ \frac{1}{2}x - 3 & 4 \le x \le 6. \end{cases}$$

Graficar la función g donde:

(a) $g(x) = f(x)$. (b) $g(x) = f(x) - 1$. (c) $g(x) = f(x + 2)$.
(d) $g(x) = 2f(x)$. (e) $g(x) = -f(x)$. (f) $g(x) = f(2x)$.
(g) $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$. (h) $g(x) = f(-x)$. (i) $g(x) = |f(x)|$.

14. Esbozar la gráfica de las siguientes funciones, dar su dominio, y analizar si son inyectivas y/o suryectivas, donde el conjunto de llegada es $\mathbb{R}$.

(a) $a(t) = 5t - 2$. (b) $b(x) = 3x^2 + 2x - 1$. (c) $d(t) = |t - 3|$.
(d) $X(t) = \frac{t}{|t|}$. (e) $V(x) = |\operatorname{sen}(x)|$. (f) $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

15. Si $x \in \mathbb{R}$, denotamos $[x]$ el mayor entero menor o igual a x, y $\{x\}$ la distancia de x al entero más próximo. Notar

$$\{x\} = \min(\ x - [x]\ ,\ [x] + 1 - x\ ).$$

Graficar las siguientes funciones.

(a) $f(x) = [x]$. (b) $f(x) = x - [x]$. (c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$.
(d) $f(x) = [1/x]$. (e) $f(x) = \{x\}$.

16. Hallar f^{-1} para cada una de las siguientes funciones, e indicar su dominio.

(a) $f(x) = x^3 + 1$.

(b) $f(x) = (x-1)^3$.

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2, \\ 0 & \text{si } x = 2. \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 1 - x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$