Práctico 3

1. Calcular los siguientes límites.

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5-2n}{3n-7}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+7n}{n^4-2}$ (c) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ (e) $\lim_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2-4n})$ (f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n} - \dfrac{n^3}{(n-1)^2}$

2. Calcular los siguientes límites y verificarlos usando la definición.

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}\right)$ (c) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$

3. Determinar si las siguientes sucesiones convergen o divergen. Si convergen, calcular el límite.

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n\cos n}{n^2+1}$

4. (a) Probar por definición que $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.
(b) Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+5n-1}{n-7}$. Justificar.

5. (a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $\{a_n\}$ converge y $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $a_n = l$.
(b) Sea la sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_n = (-1)^n$.
  (i) Dar tres subsucesiones convergentes de $\{a_n\}$ distintas.
  (ii) Probar que si $\{a_{n_j}\}$ es una subsucesión convergente, entonces $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = 1$ ó -1.

6. Para probar el siguiente ejercicio usaremos resultados que se deducen usando el Binomio de Newton (se probará en Álgebra I)

(i) $(1+h)^n \geq 1+nh$ para $h>0$.

(ii) $(1+h)^n \geq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ para $h>0$.

(a) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$, si $a>1$ (Sugerencia: expresar $a=1+h$, donde $h>0$).
(b) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, si $0<a<1$.
(c) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, si $a>1$ (Sugerencia: expresar $\sqrt[n]{a} = 1+h_n$, $h_n>0$).
(d) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, si $0<a<1$.
(e) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (Sugerencia: usar (ii)).

7. (a) Probar que para todo número real $l \in (0,1)$, existe una sucesión $\{q_n\}$ de números racionales tal que $q_n \in (0,1)$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = l$.
(b) Considerar la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$$

¿Para qué números $l \in \mathbb{R}$ existe una subsucesión que converge hacia l?

8. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.
(a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión creciente.
(b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
(c) Si $\{a_n\}$ es una sucesión acotada inferiormente y tiene una subsucesión decreciente, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

9. (a) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también converge la sucesión de Cauchy original.
(b) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente.

10. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y sean $y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$, $z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. Notar que $z_n \leq y_n$.

(a) Demostrar que las sucesiones $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ convergen.

(b) Hallar $\lim_{n\to\infty} y_n$ y $\lim_{n\to\infty} z_n$ para:

(i) $x_n = (-1)^n$ (ii) $x_n = \dfrac{1}{n}$ (iii) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

(c) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe si y sólo si $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$, y en este caso $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$

Nota: Se denomina *límite superior* de $\{x_n\}$ a $\lim_{n\to\infty} y_n$, y se lo denota $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Similarmente, se denomina *límite inferior* de $\{x_n\}$ a $\lim_{n\to\infty} z_n$, y se lo denota $\liminf_{n\to\infty} x_n$.