

1. En cada uno de los siguientes casos, encontrar $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

(a) $\begin{cases} f(x) = x^4 \\ l = a^4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ a = 1, l = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f(x) = x^4 + \frac{1}{x} \\ a = 1, l = 2 \end{cases}$

2. Demostrar por definición los siguientes límites.

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a > 0$ (b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$

3. Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow y} \frac{x^n - y^n}{x - y}$ (e) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h\sqrt{1+h}} - \frac{1}{h} \right)$ (f) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \quad (a > 0)$
 (g) $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - [x])$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x \cos x}$

4. Sean f y g dos funciones tales que existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$.

- (a) Demostrar que si $f(x) \leq g(x)$ para todo x , entonces $l_1 \leq l_2$.
 (b) Si $f(x) < g(x)$ para todo x , ¿implica esto que $l_1 < l_2$?

5. Supongamos que f, g y h satisfacen $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x y que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.

6. (a) Trazar el gráfico de la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1, \\ x + 2 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ 4 & \text{si } x = 1, \\ 4 - x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(b) Con el gráfico de la parte (a), determinar el valor de los siguientes límites cuando existan.

(i) $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ (iii) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ (iv) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$
 (v) $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ (viii) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

7. Demostrar por definición los siguientes límites.

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)^2} = \infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{3x - 2} = \frac{1}{3}$ (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 10) = \infty$

8. Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

(a) $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{3y - 4}{6y + 1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x + 7}{4x^2 - 1}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$

9. Demostrar las siguientes afirmaciones.

- (a) Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$.
 (b) Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ existe, entonces no necesariamente existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 (c) Si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(|x|)$.
 (d) Si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x)$ existe, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(1/x) = \infty$.
 (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ no existe.
 (g) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)| = |l|$.

10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$ demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

11. Calcular los siguientes límites. Recordar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{sen}(3x)}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\operatorname{cos}(x)}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{cos}(x)}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1}$

12. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar. Asumir que las funciones f y g están definidas en un entorno de a o de 0 según corresponda.

- (a) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ existen, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe.
 (b) Si no existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, entonces no existe $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$.
 (c) Si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$.
 (d) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ para toda función g .
 (e) Si $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.