Práctico 5

Nota: Los ejercicios marcados con (*) pueden ser resueltos en una segunda instancia.

1. Decir en qué puntos son continuas las siguientes funciones y justificar.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}, & x < 0; \\ x\,\mathrm{sen}(x), & x \geq 0. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(5x)}{x}, & x < 0; \\ 5, & x = 0; \\ \dfrac{\sqrt{1+10x}-1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1; \\ 6, & x = -1. \end{cases}$ (d) $f(x) = [x]$ (e) $f(x) = [1/x]$

2. Determinar para cuáles de las siguientes funciones f existe una función continua F, definida en toda la recta real, que extienda a f.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ (b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (c) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$

3. (a) Probar que si $|f(x)| \leq |x|$, entonces f es continua en 0.
(b) Probar que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, g es continua en 0 y $g(0) = 0$, entonces f es continua en 0.

4. Probar que si f es continua en a, entonces también son continuas en a las siguientes funciones: $|f|$, $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = \max(-f, 0)$.

5. (a) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que si $f|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$.
(b) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y coinciden en $\mathbb{Q}$, entonces son iguales.

6. (a) Mostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una extensión continua g definida en todo $\mathbb{R}$.
(b) Mostrar que la conclusión del punto anterior es falsa si cambiamos $[a, b]$ por (a, b).
(c) Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y que g es continua en $[b, c]$. Probar que si $f(b) = g(b)$, entonces la función $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, c]$, donde h está definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ g(x), & x \in [b, c]. \end{cases}$$

7. Para cada una de las siguientes funciones decir si están acotadas superior o inferiormente y si alcanzan sus valores máximos o mínimos.
(a) $f(x) = x^2$ en: (i) $(-1, 1)$; (ii) $\mathbb{R}$; (iii) $[0, \infty)$; (iv) $(-1, 2]$.
(b) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.
(c) $f(x) = 2 + \mathrm{sen}(x)$ en: (i) $[k\pi, (k+1)\pi]$, k entero; (ii) $(k\pi, (k+1)\pi)$, k entero.

8. Sea $p(x) = x^5 + x + 1$.
(a) Demostrar que $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ (Sugerencia: comparar p con la función x^5).
(b) Probar que p es suryectiva sobre $\mathbb{R}$.
(c) Encontrar a y b tales que p tenga un cero en $[a, b]$.

9. Sea f una función continua y supongamos que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué se puede decir de f?

10. (a) Probar que si f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, entonces existe un x en (a,b) tal que $f(x) = g(x)$.
(b) Mostrar que la ecuación $\operatorname{sen}(x) = x + 1$, tiene al menos una solución. Graficar las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $x + 1$ en el mismo sistema de ejes coordenados.
(c) Mostrar que existe un $x \in [0, \pi/2]$ tal que $x^3 \operatorname{sen}^7(x) = 2$.

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar.
(a) Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}$ entonces f alcanza un mínimo.
(b) Si $|f|$ es continua en a entonces entonces f es continua en a.
(c) Existe un número que es exactamente una unidad mayor que su cubo.

12. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$. Mostrar que si f es continua, entonces tiene un punto fijo, esto es, existe un x tal que $f(x) = x$. Interpretar gráficamente.

13. (*)
(a) Definir una función que no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en todo punto.
(b) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, pero continua en todos los demás puntos.
(c) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ y en 0, pero continua en todos los demás puntos.

14. (*)
(a) ¿Cuántas funciones f continuas hay tales que $f(x)^2 = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$?
(b) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior si no exigimos continuidad?
(c) Si f y g son continuas con $g(x) \neq 0$ para todo x y si $f^2 = g^2$, probar que $f = g$ o $f = -g$.
(d) ¿Qué sucede si no suponemos g nunca nula en el inciso anterior?

15. (*) Sea f definida y continua en todo $\mathbb{R}$. Supongamos que f es siempre positiva y que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.