Práctico 6

Parte I

En esta primera parte, cada vez que se pida determinar una derivada, es necesario usar la definición y no las reglas usuales de derivación.

1. (a) Demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$ para $a \neq 0$.
(b) Demostrar que la recta tangente a la gráfica de f en $(a, 1/a)$ no corta la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$.
(c) Demostrar que si $g(x) = 1/x^2$, entonces $g'(a) = -2/a^3$ para $a \neq 0$.
(d) Demostrar que la tangente a la gráfica de g en $(a, 1/a^2)$ corta a la gráfica de g en otro punto.
(e) Demostrar que si $h(x) = \sqrt{x}$, entonces $h'(a) = a^{-1/2}/2$ para $a > 0$.
(f) Si $f(x) = [x]$, hallar f' donde sea posible.

2. Sea f una función derivable en el intervalo abierto (a, b) y $c \in \mathbb{R}$. En cada caso hallar g' en su respectivo dominio.

(a) $g(x) = f(x) + c$ (b) $g(x) = cf(x)$ (c) $g(x) = f(x + c)$
(d) $g(x) = f(cx)$ (e) $g(x) = f(x)^2$

3. (a) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Mostrar que f es derivable en 0.
(b) Sea f una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Demostrar que f es derivable en 0.

4. (*) Sea f una función derivable en a. Demostrar:

(a) $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (b) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$

Parte II

A partir de ahora sí es posible usar las reglas usuales, aunque en algunos casos será necesario usar también la definición.

5. Calcular f' en cada uno de los siguientes casos.

(a) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - \pi x$ (b) $f(x) = (x^3 + 3)(2x^2 - 1)$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$
(d) $f(x) = \tan(x)$ (e) $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^8$ (f) $f(x) = x^2 \cos(1/x)$
(g) $f(x) = \big(\tan(4x^2 + 1)\big)^{\frac{4}{3}}$ (h) $f(x) = \cos(x \operatorname{sen}(x))$ (i) $f(x) = \cos(\sqrt{x^4 + 7})$
(j) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{\operatorname{sen}(3x)}}{1 - x + x^5}$ (k) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^7(x))}{x}$ (l) $f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

6. (a) Probar que la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.
(b) Calcular f' y probar que f' no es continua en 0.

7. (*) Calcular $f^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si:

(a) $f(x) = x^{10}$ (b) $f(x) = \cos(x)$ (c) $f(x) = 1/x$ (d) $f(z) = \sqrt{z}$ (e) $f(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$

8. Encontrar un polinomio P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ y $P''(2) = 2$.

9. En cada uno de los siguientes casos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto (x_0, y_0) indicado.

(a) $\begin{cases} y = 1 - 2x - 3x^2, \\ (x_0, y_0) = (-2, -7) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \\ (x_0, y_0) = (1, 1) \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{1-x}, \\ (x_0, y_0) = (0, 0) \end{cases}$

10. Decidir en qué puntos es derivable la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 & \text{si } |x| < 1, \\ 2x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 7 - x & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

11. (a) Supongamos que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0. Demostrar que f es derivable en 0, y hallar $f'(0)$ en términos de g.

(b) Supongamos que f es derivable en 0, y que $f(0) = 0$. Demostrar que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0.

12. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $f + g$ es derivable en a, entonces f y g son derivables en a.

(b) Si fg es derivable en a, entonces f y g son derivables en a.

(c) Si f es derivable en a y $f(a) \neq 0$, entonces $|f|$ es derivable en a.

(d) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que no es derivable en una cantidad infinita de puntos.

(e) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que es derivable en 0 y no lo es en cualquier intervalo abierto que contiene al 0.

(f) Dados $a < b$, toda función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), se extiende a una función derivable en todo $\mathbb{R}$.

13. Considerar la función biyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6 - x - x^3$. Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $(-4, 2)$.

14. Determinar en los siguientes casos $(f^{-1})'(d)$.

(a) $f(x) = x^5 + 2$, $d = 1$.

(b) $f(x) = \sqrt{4 - x}$, $d = 3$.

(c) $f(x) = \tan(2x)$, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, $d = 1$.

15. Encontrar f' para:

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$ (b) $f(x) = \arccos(x)$ (c) $f(x) = \arctan(x)$