Práctico 7

1. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si existen, máximos y mínimos, relativos y absolutos, en el conjunto A.

(a) $f(x) = x^3 + x$, $A = [-1, 2]$.
(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, $A = [-2, 2]$.
(c) $f(x) = 2 - |x + 1|$, $A = (-2, 1]$.
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $A = (-1, 1)$.
(e) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
(f) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$, $A = [0, \frac{3\pi}{4}]$.

2.
(a) Determinar los pares de números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo.
(b) Demostrar que entre todos los rectángulos que tienen determinado perímetro, el cuadrado tiene área máxima.
(c) Encontrar las dimensiones de un triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio r.

3. Demostrar que el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + m$ no posee dos raíces distintas en el intervalo $[0, 1]$.

4. Para cada uno de las siguientes funciones verificar el teorema del valor medio, encontrando explícitamente el valor de c.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 2]$.
(b) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x + 1}$ en $[2, 9]$.

5. Sea $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$. Demostrar que no hay un valor c tal que

$$f(2) - f(0) = 2f'(c).$$

¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

6. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores máximos y/o mínimos, los intervalos de concavidad, y los puntos de inflexión de las siguientes funciones y graficar.

(a) $f(x) = x^{2/3}$
(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
(c) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$
(d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$
(e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x + 5}}$
(f) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)}$

7. Graficar las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{3 + x^2}$.
(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$.
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 5}$.
(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
(e) $f(x) = x^2(x - 2)^2$.

8. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones en cada inciso.
(a) $f'(-1) = 0$; f no es derivable en $x = 1$; y $f'(x) < 0$ para $|x| < 1$.
(b) $f'(x) > 0$ para $|x| > 1$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < 0$; y $f''(x) > 0$ si $x > 0$.

9. Determinar los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$. (b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$. (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$. (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)x^{-3}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$. (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x}$. (g) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$. (h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{x^3-1}$.

10. Probar que $|\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b|\leq|a-b|$ para $a,b\in\mathbb{R}$. Deducir que $\operatorname{sen}(x)<x$, si $x>0$.

11. Sean $f,g:I\to\mathbb{R}$ derivables en todo punto del intervalo abierto I.

(a) Si $f'(x)>g'(x)$ para todo $x\in I$, y $f(a)=g(a)$, demostrar que $f(x)>g(x)$ para $x>a$ y $f(x)<g(x)$ para $x<a$.

(b) Demostrar que no se cumple lo enunciado en (a) si no se supone $f(a)=g(a)$.

(c) Demostrar que $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$ cuando $x>1$.

12. Sea f una función tal que $f'(x)=1/x$ para todo $x>0$ y $f(1)=0$. Demostrar que $f(xy)=f(x)+f(y)$ para todo $x,y>0$ (Sugerencia: Calcular $g'(x)$ para $g(x)=f(xy)$).

13. Sea f una función n-veces derivable en todo $\mathbb{R}$, tal que $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_{n+1})=0$ para $x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$. Demostrar que existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(x)=0$.