Lista de Teoremas

1. (Teorema 1.4.6) Si A es una matriz $m \times n$, con $m < n$, el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una solución no trivial.

2. (Corolario, pp. 20) Sean A y B matrices $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces B es equivalente por filas a A si y sólo si $B = PA$, donde P es un producto de matrices elementales $m \times m$.

3. (Teorema 1.6.12) Si A es una matriz $n \times n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) A es inversible.

   (ii) A es equivalente por filas a la matriz identidad $n \times n$.

   (iii) A es producto de matrices elementales.

4. (Teorema 1.6.13) Si A es una matriz $n \times n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) A es inversible.

   (ii) El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene sólo la solución trivial.

   (iii) El sistema $AX = Y$ admite solución, para todo $Y \in \mathbb{F}^{n\times 1}$.

5. Sea $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{F}^n$ un subconjunto de $\mathbb{F}^n$ y sea A la matriz cuyas columnas son los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Entonces S es linealmente independiente si y sólo si la matriz reducida por filas de A no tiene variables libres.

6. Sea V E.V. sobre $\mathbb{F}$, sea S un subconjunto linealmente independiente de V y sea $\beta \in V$. Entonces son equivalentes:

   (i) $\beta \in \langle S \rangle$.

   (ii) $S \cup \{\beta\}$ es linealmente dependiente.

7. (Teorema 2.3.4) Sea V E.V. sobre $\mathbb{F}$ y supongamos que $V = \langle\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}\rangle$. Entonces todo subconjunto de V de más de m elementos es linealmente dependiente, o equivalentemente, todo subconjunto de V linealmente independiente tiene a lo sumo m elementos.

8. Sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ base de V, entonces toda otra base tiene exactamente m elementos. Más precisamente, sea S subconjunto de V. Entonces:

   (a) Si S tiene más de m elementos, es linealmente dependiente.

   (b) Si S tiene menos de m elementos, no genera V.

   (Ver Corolario 2.3.2.)

9. Sea V un E.V. sobre $\mathbb{F}$ de dimensión finita y sea S un subconjunto de V.

   (a) Si S es linealmente independiente entonces S es parte de una base de V.

   (b) Si S genera V entonces S contiene una base de V.

10. Sea V un E.V. sobre $\mathbb{F}$ de dimensión finita y sea W un S.E.V de V. Entonces $\dim W \leq \dim V$.

11. (Teorema 2.3.6) Sea V un E.V. sobre $\mathbb{F}$ de dimensión finita y sean W_1 y W_2 S.E.V de V. Entonces $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

12. (Teorema 3.1.2) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\dim V = \dim \mathrm{Nu}\, T + \dim \mathrm{Im}\, T.$$

13. (Teorema 3.1.3) Sea $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Entonces el rango fila de A es igual a su rango columna.

14. (pp. 79) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Nu}\, T = 0$.

15. (Teorema 3.2.9) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ tales que $\dim V = \dim W$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (i) T es inversible.

    (ii) T es no singular.

    (iii) T es sobreyectiva.

16. (Teorema 3.3.10) Todo espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{F}$ es isomorfo a $\mathbb{F}^n$.

17. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces V es isomorfo a W si y sólo si $\dim V = \dim W$.

18. (Teorema 6.2.2, sin demostración) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$, sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Sean $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}$ los valores propios distintos de T y W_i el núcleo de $T - c_i\,\mathrm{id}$, $i = 1, \dots, k$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (i) T es diagonalizable.

    (ii) El polinomio característico de T es $(x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$ y $\dim W_i = d_i$, $i = 1, \dots, k$.

    (iii) $\dim W_1 + \cdots + \dim W_k = \dim V$.