UNIVERSIDAD NACIONAL
DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

Estructuras Algebraicas (2014)
Parcial 1 - Recuperatorio

I. Sean G y H grupos, y $f : G \to H$ un epimorfismo

   a) (8 p) Si $K \leq H$ entonces $f^{-1}(K) \leq G$ y $[H : K] = [G : f^{-1}(K)]$. Además, si $K \trianglelefteq H$ entonces $f^{-1}(K) \trianglelefteq G$.
   b) (6 p) Si $N \trianglelefteq G$ entonces $f(N) \trianglelefteq H$.
   c) (4 p) Probar que el grupo aditivo $\mathbb{Q}$ no tiene subgrupos propios de índice finito.
   d) (4 p) Probar que el grupo aditivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no tiene subgrupos propios de índice finito.
   e) (3 p) Probar que $\mathbb{Q}$ no tiene *subgrupos maximales*.[1]

II. Denotemos por $\mathbb{S}_n$ el grupo de permutaciones de n elementos y sea G un grupo.

   a) (8 p) Sea $H \leq \mathbb{S}_n$. Probar que todos los miembros de H son pares ó exactamente la mitad de los miembros de H son pares.
   b) (6 p) Si σ es un r-ciclo de $\mathbb{S}_n$, digamos $\sigma = (i_1\, i_2\, \ldots\, i_r)$ y $\tau \in \mathbb{S}_n$, entonces $\tau\sigma\tau^{-1}$ es el r-ciclo $(\tau(i_1)\, \tau(i_2)\, \ldots\, \tau(i_r))$.
   c) (4 p) Pruebe que si $\sigma \in \mathbb{S}_n$ es el producto de ciclos disjuntos de longitud $r_1, \ldots r_k$, entonces el orden de σ es el $\mathrm{mcm}(r_1, \ldots, r_k)$.
   d) (4 p) Sea H un subgrupo de $\mathbb{S}_n$ de orden 2. Pruebe que H no puede ser un subgrupo normal de $\mathbb{S}_n$.
   e) Sea $\mathbb{A}_n$ el grupo de las permutaciones pares de n elementos. Elija al menos uno de los siguientes ejercicios y resuelva:
      1) (3 p) Pruebe que $\mathbb{A}_n$ con $n \geq 5$, es el único subgrupo normal propio de $\mathbb{S}_n$.
      2) (3 p) Pruebe que $\mathbb{A}_n$ es el único subgrupo de $\mathbb{S}_n$ de índice 2.

III. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar

   a) (6 p) Si H es un subgrupo normal de un grupo G tal que H y G/H son grupos abelianos. Entonces G es abeliano.
   b) (6 p) El grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_5^{\times}$ es cíclico.
   c) (12 p) Un grupo donde todos sus elementos tienen orden finito debe ser un grupo finito.
   d) (13 p) $\mathbb{Q}$ es un grupo cíclico.
   e) (13 p) $\mathbb{Q}$ es un grupo libre.

[1]**Def:** Un subgrupo propio K de un grupo G se dice maximal si $K \subseteq H$ con H subgrupo propio de G, implica que $K = H$.