Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FAMAF

Estructuras Algebraicas (2014)
Parcial 1

I. Elegir uno (y sólo uno) de los siguientes dos ejercicios

IA. Sean G y $\overline{G}$ grupos.

a) Sean $f : G \to \overline{G}$ un homomorfismo y $a \in G$ de orden finito. Entonces el orden de $f(a)$ divide el orden de a. Más aún, si $\mathrm{mcd}(|G|, |\overline{G}|) = 1$ entonces $f(a) = e_{\overline{G}}$ para todo $a \in G$.

b) Si $a \in G$ tiene orden finito n y k es un número natural tal que $k|n$ entonces $|a^k| = n/k$.

c) Sean $f : G \to \overline{G}$ un homomorfismo sobreyectivo con G de orden finito, y $b \in \overline{G}$ de orden m. Entonces existe también en G un elemento de orden m.

d) Si $|G| = p^m$ con p primo y G tiene la propiedad de tener a lo más un subgrupo de cada tamaño, entonces G es cíclico.[1]

IB. Sea $Q_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ el grupo cuya multiplicación está dada por $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$, y las reglas usuales de multiplicación por ± 1 (el grupo Q_8 es llamado el *grupo cuaterniónico*).

a) Describir de manera lo más completa posible todos los subgrupos de Q_8.

b) ¿Cuáles son sus subgrupos normales?

c) Para cada subgrupo normal N de Q_8 decir quién es el grupo Q_8/N.

II. Sea G un grupo. Dados $a, b \in G$ se define el *conmutador* de a y b como $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$. El *subgrupo conmutador* de G es el grupo generado por los conmutadores de G, $[G, G] :=< [a, b] : a, b \in G >$.

a) Pruebe que para todo automorfismo f de G, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, y así $[G, G]$ es invariante por todo automorfismo de G.

b) Pruebe que para todo subgrupo N de G, tal que $[G, G] \leq N$, se tiene que N es normal en G y el grupo G/N es abeliano.

c) Calcular el conmutador del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$, con $n = 3, 4$. Pruebe que el conmutador del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$, con $n \geq 5$, es el grupo alternante $\mathbb{A}_n$ (utilizar, si es necesario, el resultado que dice que $\mathbb{A}_n$ es simple $\forall n \geq 5$).

III. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar

a) Si H es un subgrupo normal de un grupo G tal que H y G/H son cíclicos, entonces G es cíclico.

b) El grupo múltiplicativo de los números racionales sin el cero, $\mathbb{Q}^{\times} := \mathbb{Q} - \{0\}$, es cíclico.

c) El grupo aditivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no es cíclico.

d) El grupo aditivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no es libre en la categoría de grupos arbitrarios.

[1] Veremos más adelante que esta propiedad caracteriza a los grupos cíclicos; sin la hipótesis sobre el orden de G.