UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

**Facultad de Matemática, Astronomía y Física**
**Universidad Nacional de Córdoba**

FAMAF

Estructuras Algebraicas (2014)
Parcial 2 - Recuperatorio

I.
   a) (26 p) Sean $F$ el grupo abeliano libre $\mathbb{Z}^3$ y $A$ el subgrupo de $F$ generado por $\{(6,0,0),(0,6,0),(0,0,10)\}$. Encontrar una base de $F$ $\{w_1,w_2,w_3\}$, el natural $k \leq 3$ y los enteros $d_1,d_2,\dots,d_k$ tales que $d_1|d_2|\dots|d_k$ y $\{d_1w_1,\dots,d_kw_k\}$ es una base de $A$.
   b) (12 p) Determinar la estructura del grupo abeliano $G$ definido por generadores $\{a,b,c\}$ y relaciones $6a=0$, $6b=0$ y $10c=0$.
   c) (12 p) Sea $n=|G|$ con $G$ el grupo del item anterior. Clasificar todos los grupos abelianos de orden $n$.

II. Sean $R$ y $S$ anillos (no necesariamente con identidad).

   a) (6 p) Dar la definición de la *característica* de $R$, $\operatorname{Char}(R)$. Pruebe que si hay un entero positivo $m$ tal que $ma=0$ para todo $a\in R$, entonces $m$ debe ser un múltiplo de $\operatorname{Char}(R)$.
   b) (6 p) Pruebe que el producto cartesiano $R\times S$ es un anillo donde la suma y el producto son dados *componente a componente* y $\operatorname{Char}(R\times S)=\operatorname{mcm}(\operatorname{Char}(R),\operatorname{Char}(S))$.
   c) (14 p) Dar ejemplos de un anillo $R$ con $\operatorname{Char}(R)\neq 0$ y un anillo $R$ con $\operatorname{Char}(R)=0$ pero con al menos un subanillo $S$ tal que $\operatorname{Char}(S)\neq 0$. Justificar las respuestas.
   d) Elija al menos uno de los siguientes ejercicios y resuelva:
      1) (24 p) Sean $R$ y $S$ anillos con identidad y $\varphi: R\to S$ un homomorfismo de anillo sobreyectivo. Pruebe que $\operatorname{Char}(S)|\operatorname{Char}(R)$.
      2) (24 p) Sea $R$ un anillo conmutativo con identidad $1_R\neq 0$ y $\operatorname{Char}(R)=p$ con $p$ un número primo. Muestre que la función $\varphi: R\to R$, $x\mapsto x^p$ es un homomorfismo de anillos.

III. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas ó falsas. Justificar.

   a) (15 p) En un anillo conmutativo con identidad, el conjunto consistente del cero y todos los divisores de cero contiene al menos un ideal primo.
   b) (7 p) Un grupo de orden 56 no puede ser simple.
   c) (8 p) Si $R$ es un anillo, $S$ dominio de integridad y $\varphi: R\to S$ homomorfismo de anillos no nulo, entonces $\operatorname{Ker}(\varphi)$ es un ideal primo de $R$.
   d) (10 p) El polinomio $x^4+1$ es irreducible es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.
   e) (10 p) Un máximo común divisor de $11+7\sqrt{-1}$ y $18-\sqrt{-1}$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ es $-\sqrt{-1}$.