UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

Estructuras Algebraicas (2014)
Parcial 2

I. *a)* Sean F el grupo abeliano libre $\mathbb{Z}^4$ y A el subgrupo de F generado por

$$\{(2,0,0,0),(0,10,0,0),(0,0,18,0)\}.$$

Encontrar una base de F $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$, el natural $k \leq 4$ y los enteros $d_1, d_2, \ldots, d_k$ tales que $d_1|d_2|\ldots|d_k$ y $\{d_1w_1,\ldots,d_kw_k\}$ es una base de A.

b) Determinar la estructura del grupo abeliano G definido por generadores $\{a,b,c,d\}$ y relaciones $2a=0$, $10b=0$ y $18c=0$.

c) Sea G un grupo abeliano y sea $G_t := \{g \in G : |g| \text{ es finito}\}$ (el *subgrupo de torsión* de G). Pruebe que si G es finitamente generado, entonces G_t debe ser un subgrupo finito de G.

d) Sea $n = |G_t|$ con G el grupo del item *b)*. Clasificar todos los grupos abelianos de orden n.

II. Sea R un anillo (no necesariamente conmutativo) y con identidad $1_R \neq 0$.

a) Sea a un elemento nilpotente de R. Pruebe que $c := 1 + a$ es una unidad de R.

b) Sean a y b elementos nilpotentes de R que conmutan con el producto de R. Entonces $a+b$ es un elemento nilpotente de R.

c) Sea $c \in R$ una unidad con inversa c^{-1}. Probar que la función $\tau : R \to R$, $x \mapsto cxc^{-1}$ es un automorfismo de anillos de R.

d) Supongamos que el anillo R es un anillo tal que el único automorfismo de anillo de R es la identidad. Probar que N, el conjunto de los todos los elementos nilpotentes de R, es un ideal de R. Dar un ejemplo de anillo con identidad donde el conjunto de elementos nilpotentes no es un ideal.

III. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas ó falsas. Justificar.

a) En un anillo conmutativo con identidad, $1_R \neq 0$, el conjunto de divisores de cero junto con el cero es una unión de algunos ideales primos de R.

b) Un grupo de orden 56 no puede ser simple.

c) Si R es un anillo conmutativo con identidad $1_R \neq 0$. El ideal generado por x en $R[x]$ es primo si y solo si R es un dominio de integridad.

d) $f(x,y) = y^2 - x^3$ es reducible en $\mathbb{Z}[x,y]$.

e) Un máximo común divisor de $11 + 7\sqrt{-1}$ y $18 - \sqrt{-1}$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ es -1.