Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

Estructuras Algebraicas 2014 – Guía de estudio

I. Grupos
- Clasificación de grupos cíclicos.
- Teorema de Lagrange.
- Teoremas de Isomorfismos.
- Producto directo, producto directo débil y suma directa, propiedad universal de ellos. Teoremas 8.6. y 8.11.
- Producto semidirecto, Si $n \triangleright G$ y $K < G$ tales que $G = N \vee K$ entonces $G \simeq N \ltimes K$.
- Definición de grupo libre y Corolario 9.3.
- Propiedades básicas de los grupos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^{\times}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^{\times}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\times}$, $\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, D_n, S_n; isomorfismos entre ellos (o productos de ellos).
- Expresar permutaciones como producto de ciclos disjuntos o trasposiciones.
- Acciones, ecuación de clases: $|X| = |X_0| + \sum [G : G_i]$ con $[G : G_i] > 1$. Caso particular $X = G$ y $X_0 = C(G)$.
- Teorema de Cauchy, Primer Teorema de Sylow.
- Bases en grupos abelianos; A abeliano libre sii tiene una base; bases finitas tienen la misma cardinalidad.
- Forma normal de Smith de una matriz entera, bases de subgrupos de $\mathbb{Z}^m$.
- Teorema de Clasificación de grupos abelianos finitamente generados: demostración de la existencia de la descomposición, demostración de unicidad en casos concretos (p. ej. ¿por qué no son isomorfos $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$?)
- Descripción de grupos abelianos de orden dado.

II. Anillos
- Propiedades básicas de los anillos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $M_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{Z}_m$, $C(X)$, $C(x_0)$, $R[x_1, \ldots, x_n]$: descripción de (algunos de) sus ideales (primos, maximales, principales); isomorfismos entre ellos: p. ej. ¿es $\mathbb{Z}_{ab} \simeq \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$, o ¿es $\mathbb{R}^4 \simeq M_2(\mathbb{R})$?, o ¿es $\mathbb{C} \simeq \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$?
- Primer teorema de isomorfismo.
- Teorema chino del resto.
- Exitstencia de ideales maximales, lemma de Zorn.
- Ideales primos y maximales I en R vs cociente R/I dominio íntegro o cuerpo.
- Ideales primos y maximales vs elementos primos e irreducibles.
- Construcción de $S^{-1}R$ y la localización en un ideal primo.
- DIP implica DFU.
- DE implica DIP.
- Polinomios primitivos, Lemma de Gauss, factorización en $\mathbb{Z}[x]$ vs factorización $\mathbb{Q}[x]$.
- Si D es DFU, entonces $D[x_1, \ldots, x_n]$ DFU.
- Factorización en $\mathbb{Z}[\xi]$ con, p. ej., $\xi = i, \sqrt{2}, \sqrt{10}$.

III. Módulos (unitarios)
- Ejemplos básicos de módulos: grupos abelianos sobre $\mathbb{Z}$, E.V. sobre cuerpos, E.V. sobre matrices, E.V. sobre anillo de polinomios, anillo sobre sí mismo.
- Suma y producto directo, cocientes.
- Primer y segundo teoremas de isomorfismo.
- Módulos libres y bases: todo E.V. (sobre cuerpo) tiene base.
- Son equivalentes en módulos unitarios (i) M libre, (ii) M es suma de copias R, (iii) M tiene base.
- Si $V = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ y $R = \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ entonces R tiene bases de 1 o 2 elementos como R-módulo.
- Si R es DIP, todo submódulo de un módulo libre (f.g.) es libre (f.g.). Ejemplos donde no es cierto.
- Teorema de estructura de módulos f.g. sobre DIP. Teoremas de descomposición primaria y cíclica de transformaciones lineales.
- Sucesiones exactas y lema de los 5 (versión corta).
- $\operatorname{Hom}(M, \cdot)$ es exacto a izquierda. Ejemplo de inexactitud a derecha.
- P es proyectivo si y solo si es sumando directo de un libre (en partticular, libre implica proyectivo).