UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

Estructuras Algebraicas (2014)
Práctico 1

1. Decidir en cada caso si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, si es abeliano o no.

   (a) $G = \mathbb{R}_{>0}$, $a * b = a^b$.
   (b) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(m, n) * (r, s) = (m + (-1)^n r, n + s)$.
   (c) $G = \{f : X \to X \ : \ f$ es inyectiva $\}$, con X un conjunto no vacío, $f * g = f \circ g$. ¿Si X es finito?
   (d) $G = \{f : X \to X \ : \ f$ es suryectiva $\}$, con X un conjunto no vacío, $f * g = f \circ g$. ¿Si X es finito?
   (e) $G = \mathcal{P}(X)$ (partes de X), con X un conjunto, $A * B = A \cup B$.
   (f) $G = \mathcal{P}(X)$ (partes de X), con X un conjunto, $A * B = A \cap B$.
   (g) $G = \mathcal{P}(X)$ (partes de X), con X un conjunto, $A * B = A \cup B - A \cap B$.
   (h) $G = \mathrm{Aff}(n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = T(x) + \mathbf{v}, \text{ donde } T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$, $f * g = f \circ g$.
   (i) G un conjunto con más de un elemento y $a * b = b$ para todo a, b en G.

2. Sea G un semigrupo que tiene una identidad a izquierda e, y cada elemento tiene un inverso a derecha, es decir que para cada elemento x existe un y tal que $xy = e$. Decir si es cierto que G es un grupo.

3. Sea G un grupo con la propiedad que para todo a, b, c en G tales que $ab = ca$ implica $b = c$. Probar que G es abeliano.

4. Probar que todos los grupos de orden ≤ 5 son abelianos. ¿Son todos cíclicos? ¿Cuántos grupos no isomorfos de orden 4 hay?

5. Suponga que la siguiente tabla es la tabla de multiplicar de un grupo. Complete los espacios en blanco.

$*$	e	a	b	c	d
e	e				
a		b			e
b		c	d	e	
c		d		a	b
d					

   Ayuda: Comience probando que e es la identidad del grupo.

6. Sea D_4 el conjunto de las transformaciones rígidas del plano que dejan fijo al cuadrado del plano $\mathbb{R}^2$ centrado en el origen. Dar la tabla de multiplicar de D_4. ¿Es abeliano?

7. Escribir la tabla de multiplicar y dar el orden de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

8. Determinar los elementos del subgrupo cíclico de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ generado por $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Sea G un grupo finito. Muestre que el número de elementos x de G tales que $x^3 = e$ es impar. Muestre que el número de elementos x de G tales que $x^2 \neq e$ es par. ¿Qué puede decir, en general, sobre la cantidad de elementos x de G, distintos de la identidad, tales que $x^p = e$ donde p es un número primo fijo?

10. Sea G un grupo finito de orden par. Mostrar que existe $a \neq e$ tal que $a^2 = e$.

11. Decidir si en un grupo las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

    (i) $a = a^{-1} \Leftrightarrow a^2 = e$.
    (ii) $a^m = a^n \Rightarrow n = m$.
    (iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Rightarrow ab = ba$.
    (iv) G abeliano $\Leftrightarrow a^2b^2 = (ab)^2$.

12. Probar que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ es grupo $\Leftrightarrow p$ es primo.

13. Sea G un grupo finito abeliano sin elementos x tales que $x^2 = e$, salvo $x = e$. Evaluar $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ donde $a_1, \ldots, a_n$ son todos los distintos elementos de G.

14. Probar la siguiente parte del teorema de Wilson: Si p es un número primo entonces $(p-2)! \equiv 1(\text{mod } p)$.

15. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Sea $F(X,G) = \{f : X \to G \ : f \text{ es función}\}$. Mostrar que $F(X,G)$ es un grupo con la operación $f * g := fg$, donde $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Mostrar que si G es abeliano, entonces $F(X,G)$ también lo es.

16. Sea G un grupo tal que $a^2 = e$, $\forall\, a \in G$. Mostrar que G es abeliano.

17. Sea G un semigrupo. Probar que G es grupo si y sólo si las ecuaciones $ya = b$ y $ax = b$ tienen solución en G, para todo a, $b \in G$.

18. Sea G un semigrupo finito. Si vale la ley cancelativa a ambos lados (es decir, $ac = bc \Rightarrow a = b$ y $ca = cb \Rightarrow a = b$), entonces G es un grupo. Mostrar que este resultado es falso si G es infinito.

19. Sea G un grupo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

    (i) G es abeliano.
    (ii) $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall\, a, b \in G$.
    (iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, $\forall\, a, b \in G$.
    (iv) $(ab)^n = a^nb^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, a, b \in G$.
    (v) $(ab)^n = a^nb^n$, $\forall\, a, b \in G$, para tres enteros consecutivos.

20. Sea p un número primo. Definimos

$$R_p := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,:\, (b,p) = 1 \right\}, \qquad R^p := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,:\, b = p^i, \text{ con } i \geq 0 \right\}.$$

    Mostrar que R_p y R^p son grupos abelianos con la suma de $\mathbb{Q}$.

21. (a) La relación $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$ es relación de congruencia en $(\mathbb{Q}, +)$.
    (b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es grupo abeliano infinito.

22. Sea G un grupo, $a, b \in G$, $r \in \mathbb{N}$. Si $bab^{-1} = a^r$, entonces $b^jab^{-j} = a^{r^j}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

23. (a) Probar que $|\mathbb{S}_n| = n!$.
    (b) Hallar en $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ elementos a tales que $a = a^{-1}$ y $a^3 = e$.