



Estructuras Algebraicas (2014)
Práctico 2

- Sean G, H grupos, y sean $f, g : G \rightarrow H$ homomorfismos de grupos. Entonces:
 - $f(e_G) = e_H$ y $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.
 - La parte (i) puede ser falsa si G y H son monoides que no son grupos.
- Determinar si las siguientes asignaciones son homomorfismos, y en tal caso decir si son monomorfismos y/o epimorfismos. (Considerar \mathbb{Z} y \mathbb{Z}_n , $n = 6, 5, 12$, con las sumas usuales).
 - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a) := ma$, con $m \in \mathbb{Z}$.
 - $f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$, $f(a) := 2a$.
 - $f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$, $f(a) := 3a$.
 - $f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$, $f(a) := 2a$.
 - $f : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, $f(a) := 3a$.
- Sea f un endomorfismo de \mathbb{Z}_{30} tal que $\ker(f) = \{0, 10, 20\}$. Si $f(23) = 9$, determine el conjunto de los a tal que $f(a) = 9$.
- Sea $f : G \rightarrow H$ homomorfismo de grupos. Probar:
 - $A < G \Rightarrow f(A) < H$ y $B < H \Rightarrow f^{-1}(B) < G$.
 - $\ker(f) < G$, $\text{Im}(f) < H$. Si G es abeliano, entonces $\text{Im}(f)$ es abeliano.
- ¿Cuántos epimorfismos hay de \mathbb{Z} en \mathbb{S}_3 ?
- Dar todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. ¿Es $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ isomorfo a \mathbb{Z}_4 ?
- Sea $f : G \rightarrow H$ homomorfismo de grupos, con f biyectiva. Probar que f^{-1} es un homomorfismo de grupos.
- Sea G un grupo.
 - Sea $f : G \rightarrow G$ definida por $f(a) = a^{-1}$. Probar que f es isomorfismo si y sólo si G es abeliano.
 - Sea $f : G \rightarrow G$ definida por $f(a) = a^2$. G es abeliano, si y solo si f es endomorfismo.
- Sea G el grupo aditivo $\mathbb{Z}[X]$ (todos los polinomios con coeficientes enteros) y sea H el grupo multiplicativo de todos los números racionales positivos. Pruebe que G y H son isomorfos.
- Un subconjunto finito no vacío de un grupo G es un subgrupo si y sólo si es cerrado bajo el producto del grupo G .
- Sean A y B subgrupos de G . $A \cup B$ es un subgrupo de G si y solo si $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

12. Calcular $\text{End}(\mathbb{Z})$, $\text{End}(\mathbb{Q})$, $\text{Aut}(\mathbb{Z})$, $\text{Aut}(\mathbb{Q})$.
13. (i) Sea Q_8 el subgrupo de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ generado por $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Probar que Q_8 es no abeliano de orden 8.
- (ii) Sea H el subgrupo de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ generado por $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Probar que H es no abeliano de orden 8, isomorfo a D_4 y no isomorfo a Q_8 .
14. Calcular los subgrupos propios de $(\mathbb{R}, +)$ que son cerrados (topológicamente).
[Sugerencia: Sea H subgrupo propio cerrado de $(\mathbb{R}, +)$. Considere $h_0 := \inf\{h \in H : h > 0\}$ y pruebe que $h_0 \neq 0$, y posteriormente $H = \langle h_0 \rangle$.]
¿Puede probar un resultado similar para los subgrupos propios cerrados de (\mathbb{S}^1, \cdot) (los números complejos de norma 1 con el producto usual)?
15. Sean G un grupo finito y $f : G \rightarrow G$ un automorfismo sin puntos fijos distintos de la identidad tal que $f^2 = \text{id}$. Entonces G es abeliano.
[Sugerencia: Muestre que todo elemento g de G puede ser escrito de la forma $x^{-1}f(x)$. Luego, pruebe que f debe ser la función que a todo g lo manda en su inverso.]
16. Sea G un grupo. Definimos $C(G) := \{a \in G : ab = ba, \forall b \in G\}$. Probar que $C(G)$ es un subgrupo abeliano de G (llamado el *centro de G*).
17. Dar todos los a en \mathbb{Z}_{24} tales que $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_{24}$.
18. Sea G un grupo y $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Denotemos por $|a|$ al orden de a en G . Entonces, para todo a y $b \in G$, valen:
- (i) $|a| = |a^{-1}| = |bab^{-1}|$.
 - (ii) $|ab| = |ba|$.
 - (iii) Si a tiene orden finito n entonces $|a^k| = \frac{n}{\text{mcd}(k, n)}$. En particular, si $k|n$ entonces $|a^k| = \frac{n}{k}$.
 - (iv) Si $a \in G$ tiene orden finito, entonces $|f(a)|$ divide a $|a|$.
19. Pruebe que no hay un epimorfismo de $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$.
20. Sea G un grupo abeliano.
- (i) Si existen $a, b \in G$, con $|a| = m$, $|b| = n$, entonces existe $c \in G$ tal que $|c| = [m, n]$ (el mínimo común múltiplo de m y n).
Sugerencia: Piense primero el caso cuando m y n son coprimos. Para el caso general, construya \hat{a} y \hat{b} con ordenes \hat{n} y \hat{m} respectivamente, tales que \hat{n} y \hat{m} son coprimos, y $[m, n] = [\hat{m}, \hat{n}]$.
 - (ii) Sean $p, q \in \mathbb{N}$, primos distintos. Si $|G| = pq$ y existen $a, b \in G$, con $|a| = p$, $|b| = q$, entonces G es cíclico.
21. Sean G y H grupos, con $G = \langle a \rangle$ cíclico. Mostrar que todo homomorfismo de G en H está determinado por su valor en a .
22. Sea G un grupo y $\text{Subg}(G) := \{A : A < G\}$. Si $\text{Subg}(G)$ es finito, entonces G es finito.
23. (a) Sea H el subgrupo cíclico de \mathbb{S}_3 generado por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces ninguna coclase a izquierda de H (excepto la misma H) es también una coclase a derecha de H .
- (b) Sea K el subgrupo cíclico de \mathbb{S}_3 generado por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces toda coclase a izquierda de K es también una coclase a derecha de K .

24. Probar el Teorema de Fermat: Si p es primo y $(a, p) = 1$, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. (Ayuda: pensar en el grupo $(\mathbb{Z}_p - \{0\}, \cdot)$).
25. Probar que existen sólo dos grupos de orden 4 salvo isomorfismos.
26. Sea G un grupo y $H, K < G$. Probar que $HK < G$ si y sólo si $HK = KH$. En particular, si G es abeliano, entonces $HK < G$. (Nota: $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$).
27. Sean $k, m, p \in \mathbb{N}$, con p primo. Sean G un grupo, con $|G| = p^k m$ ($p \nmid m$), $H, K < G$ tales que $|H| = p^k$, $|K| = p^d$, $0 < d \leq k$ y $K \not\subseteq H$. Mostrar que HK no es subgrupo de G .
28. Sean G un grupo y $N < G$. Si $[G : N] = 2$, entonces $N \triangleleft G$.
29. Sea G un grupo, $\{N_i : i \in I\}$ familia de subgrupos normales de G . Entonces $\bigcap_{i \in I} N_i \triangleleft G$.
30. Sean G un grupo, $H < G$ y $a \in G$. Probar que $aHa^{-1} < G$ y $aHa^{-1} \cong H$.
31. Sean G un grupo finito, $H < G$ y $|H| = n$. Si H es el único subgrupo de orden n en G , entonces $H \triangleleft G$.
32. Sea G un grupo. Probar que $C(G) \triangleleft G$. Además, si $G/C(G)$ es un grupo cíclico, entonces G es abeliano.
33. Encontrar subgrupos H y K de D_4 tales que $H \triangleleft K$, $K \triangleleft D_4$, $H \not\triangleleft D_4$.
34. Sean G_1, G_2 grupos y $N_i \triangleleft G_i$, $i = 1, 2$. Probar:

$$(a) N_1 \times N_2 \triangleleft G_1 \times G_2, \quad (b) (G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2).$$

35. Calcular $6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
36. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Probar las siguientes afirmaciones.
- (i) Si $B \triangleleft H$, entonces $f^{-1}(B) \triangleleft G$.
- (ii) Si f es epimorfismo y $A \triangleleft G$, entonces $f(A) \triangleleft H$. ¿Vale lo mismo si no pedimos que f sea epimorfismo?
37. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
- (i) Si $|G| = p$, con p primo, entonces G es cíclico.
- (ii) Si $|G| = p^2$, con p primo, entonces G es cíclico.
- (iii) Si $|G| < \infty$ y $a^2 = e$, $\forall a \in G$, entonces $|G| = 2^n$.
- (iv) Si $H \triangleleft G$ y $K \triangleleft G$, entonces $H \vee K \triangleleft G$. (Nota: $H \vee K := \langle H \cup K \rangle$).
- (v) Si G es un grupo finito con un epimorfismo en \mathbb{Z}_{10} , entonces G tiene subgrupos normales de índice 2 y 5.
- (vi) Cualquier grupo abeliano de orden 35 es cíclico.
[Sugerencia. Considerar el ejercicio 9 del práctico 1 para conseguir elementos de orden 7 y 5.]
- (vii) Cualquier grupo de orden 35 es cíclico.
- (viii) Cualquier grupo G tal que $|G| = pq$ con p y q números primos es un grupo abeliano ó su centro es $\{e\}$.
- (ix) Sean G_1 y G_2 grupos, y $H_i \triangleleft G_i$, $i = 1, 2$.
- (i) Si $G_1 \cong G_2$ y $H_1 \cong H_2$, entonces $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.
- (ii) Si $G_1 \cong G_2$ y $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, entonces $H_1 \cong H_2$.
- (iii) Si $H_1 \cong H_2$ y $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, entonces $G_1 \cong G_2$.