UNIVERSIDAD NACIONAL
DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

Estructuras Algebraicas (2014)
Práctico 4

1. Sea m un entero. Demostrar que si $\{G_i : i \in I\}$ es una familia de grupos abelianos y $G \simeq \sum G_i$ entonces entonces $mG \simeq \sum mG_i$ y $G/mG \simeq \sum G_i/mG_i$.

2. Un subconjunto X de un grupo abeliano G se dice linealmente independiente (l.i.) si $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = 0$ implica que $n_i = 0$ para todo i (aquí n_i es entero y $x_1, \dots, x_n$ son elementos distintos de X).

   a) Demostrar que X es l.i. si y sólo si todo elemento de $< X >$ puede ser escrito de manera única como suma $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ con los n_i enteros y los $x_1, \dots, x_n$ elementos distintos de X.

   b) Demostrar que si F es abeliano libre en X entonces X es l.i.

   c) Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas sobre un grupo abeliano libre F en n generadores:
   - Todo subconjunto generador de n elementos es l.i.
   - Todo subconjunto l.i. de n elementos es una base.
   - Todo subconjunto l.i. de menos de n elementos puede ser extendido a una base de F.
   - Todo conjunto de generadores contiene una base.

3. Sea G el subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ generado por $a = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y por $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Demostrar que G tiene un subgrupo que no es finitamente generado.
   [Sugerencia: Considerar el subgrupo formado por las matrices cuyos elementos de la diagonal son 1s.]

4. Demostrar que si G es un grupo abeliano finitamente generado tal que el único elemento de orden finito en G es el cero, entonces G es abeliano libre. Mostrar que el grupo aditivo de los racionales no es abeliano libre (tampoco finitamente generado) y por lo tanto la conclusión anterior es falsa si no pedimos finitamente generado.

5. En cada uno de los siguientes casos dar una base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ de A, el natural $k \leq 3$ y los enteros $d_1, \dots d_k$ tales que $d_1 | d_2 | \dots | d_k$ y $\{d_1\alpha_1, \dots, d_k\alpha_k\}$ es base de B.

   a) $A = \mathbb{Z}^3$ y B el subgrupo de A generado por los elementos $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

   b) $A = \mathbb{Z}^3$ y B el subgrupo de A generado por los elementos $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$.

   c) $A = \mathbb{Z}^3$ y B el subgrupo de A generado por los elementos $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 4)$.

6. Mostrar que un grupo abeliano finito que no es cíclico contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, para algún primo p.

7. ¿Cuántos subgrupos de orden p^2 tiene el grupo $\mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$?

8. Dar los divisores elementales y los factores invariantes de los grupos $G_1 := \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{35}$ y $G_2 = \mathbb{Z}_{26} \oplus \mathbb{Z}_{42} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}_{200} \oplus \mathbb{Z}_{1000}$.

9. Mostrar que los factores invariantes de $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ son (m,n) y $[m,n]$ (el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de m y n) si $(m,n) > 1$, y mn si $(m,n) = 1$.

10. Dar todos los grupos abelianos de orden 67.375, determinando en cada caso sus divisores elementales y sus factores invariantes.

11. Determinar la estructura del grupo abeliano G definido por generadores $\{a,b\}$ y relaciones $2a+4b=0$ y $3b=0$. Hacer lo mismo para el grupo con generadores $\{a,b,c,d\}$ y relaciones $2a+3b=4a=5c+11d=0$ y para el grupo con generadores $\{a,b,c,d,e\}$ y relaciones $\{a-7b+14d-21c=0; 5a-7b-2c+10d-15e=0; 3a-3b-2c+6d-9e=0; a-b+2d-3e=0\}$.

12. Sean G grupo y $A \lhd G$, con A abeliano. Mostrar que G/A opera sobre A por conjugación y obtener un homomorfismo $f : G/A \to \mathrm{Aut}(A)$

13. Sean N y H dos grupos y sea $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea G el conjunto $N \times H$ y definimos en este conjunto el producto
$$(n_1,h_1).(n_2,h_2) = (n_1\phi(h_1)(n_2), h_1h_2).$$
Demostrar que G es un grupo. El grupo G se llama producto semidirecto de H y N a través de ϕ y se denota $N \rtimes_\phi H$.

14. Sean $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ y $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$. Determinar qué grupo conocido es $\mathbb{Z}_3 \rtimes_\phi \mathbb{Z}_2$ con $\phi(a)(x) = ax$, $a \in \mathbb{Z}_2$ y $x \in \mathbb{Z}_3$.

15. Sean G grupo y $K < G$. Mostrar que
(i) $K \lhd N_G(K)$. (ii) $K \lhd G$ si y sólo si $N_G(K) = G$. (iii) $C_G(K) \lhd N_G(K)$.

16. Sea G grupo. Supongamos que un elemento a de G tiene exactamente dos conjugados. Probar que G contiene un subgrupo normal propio.

17. Si H es un subgrupo de un grupo G, entonces $N_G(H)/C_G(H)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(H)$.

18. Sea G grupo. Se dice que $f : G \to G$ es un automorfismo *interior* o *interno* si existe $g \in G$ tal que $f(x) = gxg^{-1}$, para todo $x \in G$. Se denota $\mathrm{Int}(G) := \{f : G \to G \,:\, f \text{ es interior}\}$.
Probar que
(i) $\mathrm{Int}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$ (ii) $G/C(G) \cong \mathrm{Int}(G)$.

19. Mostrar que existe un automorfismo de $(\mathbb{Z}_6, +)$ que no es automorfismo interior.

20. Sean G grupo y $a \in G$, con $a \neq e_G$ y $|a| \neq 2$. Mostrar que existe un automorfismo distinto de la identidad. Caracterizar los grupos donde esto ocurre.

21. Sea G grupo.
    (i) Si $|G| = m$ y p es el menor primo que divide a m, entonces todo subgrupo de índice p es normal.
    (ii) Supongamos que $|G| = pn$, con p primo y $p > n$. Si $H < G$, con $|H| = p$, entonces $H \lhd G$.
    (iii) Si $|G| = p^n$, con p primo, y $N \lhd G$, con $|N| = p$, entonces $N \subseteq C(G)$.

22. Sean G un grupo finito de orden $|G| = n.m$, $\pi : G \to \mathbb{A}(G)$ la representación *traslación a izquierda* de G, y sea x un elemento de G de orden n. Entonces la permutación $\pi(x)$ es un producto de m n-ciclos. Además, $\pi(x)$ es una permutación impar si y solo si $|x|$ es par y $[G :< x >]$ es impar.

23. Sean G y π como en el ejercicio anterior. Pruebe que si $\pi(G)$ contiene una permutación impar, entonces G tiene un subgrupo de indice 2.
[Sugerencia: Considerar el Ejercicio 5 del práctico 3.]

24. Si $N \lhd G$, y N y G/N son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

25. ¿Es cierto que si G es un p-grupo entonces $|G| < \infty$?

26. Sean G un p-grupo finito y H un subgrupo normal no trivial de G. Probar que $H \cap C(G) \neq \{e\}$.

27. Sea G un grupo de orden p^n, con p primo. Probar que para cada k, con $0 \leq k \leq n$, G tiene un subgrupo normal de orden p^k.

28. Sea G un p-grupo infinito. Demostrar que vale alguna de las siguientes

    a) G tiene un subgrupo de orden p^n, para cada $n \in \mathbb{N}$, ó
    b) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que cada subgrupo finito tiene orden $\leq p^m$.

29. Sean P un p-subgrupo de Sylow normal de un grupo finito G y $f \in \mathrm{End}(G)$. Probar que $f(P) < P$.

30. Sean G un grupo finito y $H \lhd G$, con $|H| = p^k$. Probar que H está contenido en cada p-subgrupo de Sylow de G.

31. Sea G un grupo finito. Si cada p-subgrupo de Sylow de G es normal para cada primo p, entonces G es el producto de sus subgrupos de Sylow.

32. Probar que si $|G| = 2k$ donde k es impar, entonces G tiene un subgrupo de índice 2.
    [Sugerencia: Sea $x \in G$ tal que $|x| = 2$. Considerar los Ejercicios 22 y 23.]

33. Si $|G| = p^n q$, con $p > q$ primos, entonces G contiene un único subgrupo normal de índice q.

34. Cada grupo de orden 12, 28, 56 y 200 debe contener un subgrupo de Sylow normal, y, por lo tanto, no es simple.

35. ¿Cuántos elementos de orden 7 existen en un grupo simple de orden 168?

36. Todo grupo de orden p^2, con p primo es abeliano
    [Sugerencia: Notar que el centro de un tal G no es trivial.]

37. Todo grupo de orden pq con p y q primos distintos, $p > q$, es de la forma $\mathbb{Z}_p \rtimes_\phi \mathbb{Z}_q$ ($\phi : \mathbb{Z}_q \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ es un homomorfismo).
    [Sugerencia: Estudiar [Proposition II 6.1, Hungerford][1]]

38. Sea G un grupo de orden p^3, con p primo.

    (i) Si G posee más de un subgrupo normal de orden p, entonces G es abeliano y no cíclico.
    (ii) Si G es no abeliano, entonces $|C(G)| = p$.

    [Nota: Se puede probar que, si $p \neq 2$, entonces los grupos no abelianos de orden p^3 son $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)$ (el grupo de Heisenberg con entradas en $\mathbb{Z}_p$) y $\mathbb{Z}_{p^2} \rtimes_\phi \mathbb{Z}_p$ donde ϕ es dada por la acción de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_{p^2}$ definida como $\overline{a} \cdot [x] = [(ap+1)x]$ con $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$ y $[x] \in \mathbb{Z}_{p^2}$][2]

[1] Thomas William Hungerford. Algebra. Graduate Texts in Mathematics , Volume 73 (GTM 73). Duodécima Impresión, Springer-Verlag, New York (2003)

[2] David S. Dummit, Richard M. Foote. Abstract Algebra. 3rd Edition, Wiley (2013)